Úloha IV.E ... Lyžování na blátě

7 bodů; průměr 2,80; řešilo 15 studentů

Je možné, že v našich končinách bude letos lyžařské náčiní vcelku nepoužitelné. Abyste si s ním užili alespoň trochu zábavy, změřte moment setrvačnosti (při otáčení kolem osy procházející těžištěm a kolmé na skluznici nebo hůlku) lyže nebo lyžařské hůlky. Nezapomeňte v řešení uvést parametry vámi měřené výstroje (druh, velikost, hmotnost...).

Marek byl naštvaný, že stále trčí v Praze.

Teorie

Není od věci se opět ze začátku zamyslet, co má být výsledkem našeho experimentu a jak má vůbec samotný experiment probíhat.

Cílem našeho měření je určit moment setrvačnosti, což je fyzikální veličina udávající míru, s jakou těleso setrvává v otáčivém (rotačním) pohybu. Její velikost závisí na rozložení hmoty tělesa (hmotnosti jednotlivých částí tělesa) vzhledem k ose otáčení – těžší a vzdálenější části tělesa od osy otáčení mají větší moment setrvačnosti.

Pro hmotný bod o hmotnosti m, který se pohybuje po kružnici kolem osy otáčení ve vzdálenosti r, se moment setrvačnosti J spočítá ze vztahu

$$J = mr^2\,.$$

V našem experimentu však lyže ani hůlka nevystupují jako hmotný bod, proto pro jejich určení momentu setrvačnosti tento vztah použít nelze.

Mohli bychom si sice představit, že jednotlivé velice malé části zkoumaného tělesa (molekuly a atomy) jsou vlastně hmotné body pohybující se po kruhových drahách kolem osy otáčení, a spočítat výsledný moment setrvačnosti tělesa jakou součet všech těchto dílčích momentů setrvačnosti. Bez potřebné matematické průpravy bychom však nad měřeními (pokud bychom vůbec sehnali natolik přesnou techniku!) a výpočty strávili roky...

Jak tedy moment setrvačnosti změřit? Lze použít několik různorodých metod měření (většina z nich je však pro náš experiment příliš komplikovaná), my na to půjdeme tak trochu trikem. Toto tzv. měření dynamickou metodou je vhodné pro určení momentu setrvačnosti pravidelných homogenních těles, pro náš experiment si jako zkoumané těleso tedy zvolíme lyžařskou hůlku, která se více blíží podstatě homogenního tělesa než lyže.

Podstatou této metody je, že naše těleso (hůlku) necháme kmitat kolem osy, která neprochází jeho těžištěm (sestrojíme tedy fyzikální kyvadlo), a moment setrvačnosti pro pohyb kolem osy otáčení, která prochází těžištěm tělesa, poté dopočítáme.

Měření

Náš experiment provedeme postupně se třemi lyžařskými hůlkami, u nichž změříme jejich parametry – hmotnost m a délku l:

- běžkařská hůlka MARATHON: $l_1 = 134{,}5\,\mathrm{cm}$, $m_1 = 300\,\mathrm{g}$;
- sjezdařská hůlka BIRKI: $l_2 = 105\,\mathrm{cm}$, $m_2 = 260\,\mathrm{g}$;
- sjezdařská hůlka PROSPORT: $l_3 = 104{,}5\,\mathrm{cm}$, $m_3 = 170\,\mathrm{g}$.

Pro účely experimentu je třeba dále určit těžiště hůlek – nejlépe jejich zavěšením na provázek a dosažením rovnovážné polohy posouváním smyčky provázku na jednu či druhou stranu hůlky.

Poté si zvolíme osu otáčení (místo, kde smyčka provázku obepíná hůlku) mimo těžiště hůlky, v našem případě $d = 10\,\mathrm{cm}$ od těžiště směrem k hrotu hůlky. Hůlka zavěšená na provázku v rovnovážné poloze by nyní měla směřovat šikmo ke stropu. Všimněte si, že pokud hůlku lehce vychýlíme směrem blíže k podlaze a pak ji pustíme, začne kmitat kolem své rovnovážné polohy a po čase se v ní zastaví.

Naším úkolem teď bude změřit periodu tohoto kmitání hůlky. Pozor! Experiment provádíme pouze pro malou výchylku hůlky, při větším vychýlení hůlky se totiž perioda kmitu zvětšuje a závisí také na úhlu vychýlení hůlky (což je jednak složitější na výpočet a jednak na přesné změření úhlu výchylky).

Jelikož samotný jeden kmit (přesun tělesa z vychýleného stavu přes rovnovážnou polohu do vychýlení na druhé straně a zpět přes rovnovážnou polohu do původního vychýleného stavu) je vcelku rychlá záležitost a naše měření stopkami by bylo tak zatíženo relativně velkou chybou, je rozumné změřit čas více kmitů a výslednou periodu určit ze vztahu

$$T = \frac{t}{n}\,,$$

kde T je perioda jednoho kmitu, t je naměřený čas a n značí počet kmitů tělesa.

Konkrétně při našem experimentu změříme čas t pro $n = 3$ kmity tělesa. S každou hůlkou provedeme pět měření při stejných podmínkách (viz výše).

Naměřené hodnoty můžeme vidět v tabulce 1.

Tabulka 1: Naměřené hodnoty

	Marathon		Birky		Prosport	
	$\frac{t}{\mathrm{s}}$	$\frac{T}{\mathrm{s}}$	$\frac{t}{\mathrm{s}}$	$\frac{T}{\mathrm{s}}$	$\frac{t}{\mathrm{s}}$	$\frac{T}{\mathrm{s}}$
1. pokus	8,6	2,9	6,6	2,2	7,7	2,6
2. pokus	8,8	2,9	6,7	2,2	7,6	2,5
3. pokus	9,0	3,0	7,0	2,3	7,7	2,6
4. pokus	9,0	3,0	7,0	2,3	7,8	2,6
5. pokus	8,8	2,9	6,8	2,3	7,4	2,5
průměr	8,84	2,95	6,82	2,27	7,64	2,55

Výpočet

Pro periodu kmitu T fyzického kyvadla platí vztah

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}\,,$$

kde m je hmotnost tělesa, g je tíhové zrychlení, d vzdálenost osy otáčení od těžiště a J moment setrvačnosti tělesa vzhledem k této ose. Z této rovnice tak pro moment setrvačnosti J platí

$$J = \frac{T^2}{(2\pi)^2}mgd\,.$$

Nyní využijeme již slibovaného triku, kterým je tzv. Steinerova věta. Ta umožňuje vypočítat moment setrvačnosti tělesa rotujícího kolem osy, která neprochází jeho těžištěm a je s osou procházející těžištěm rovnoběžná. Námi hledaný moment setrvačnosti J_0 je určen vztahem

$$J_0 = J - md^2.$$

Poznámka Za povšimnutí stojí, že dle tohoto vztahu je moment setrvačnosti J tím větší, čím je jeho osa otáčení vzdálenější od těžiště a nejmenší moment setrvačnosti J_0 náleží ose otáčení procházející těžištěm.

Obecně tak můžeme moment setrvačnosti J_0 vypočítat ze vztahu

$$J_0 = \frac{T^2}{(2\pi)^2} mgd - md^2 \,.$$

Pro námi naměřené hodnoty tak vychází výsledný moment setrvačnosti J_0:

- běžkařská hůlka MARATHON: $J_1 = 0{,}062\,\mathrm{kg\cdot m^2}$,
- sjezdařská hůlka BIRKI: $J_2 = 0{,}031\,\mathrm{kg\cdot m^2}$,
- sjezdařská hůlka PROSPORT: $J_3 = 0{,}026\,\mathrm{kg\cdot m^2}$.

Chyba měření

Výsledný moment setrvačnosti máme, nyní určíme chybu měření. Při měření hmotnosti a délky hůlek (a tudíž i vzdálenosti nové osy otáčení od těžiště) se za absolutní chybu těchto veličin považuje polovina nejmenšího dílku měřidla, s jehož přesností měříme. Vzdálenost nové osy otáčení od těžiště hůlek jsme měřili s přesností na 0,5 cm, absolutní chyba tedy bude $d' = 0{,}25\,\mathrm{cm}$. Hmotnost hůlek jsme určovali s přesností na 5 g, absolutní chyba bude v tomto případě $m' = 2{,}5\,\mathrm{g}$.

Výpočet absolutní chyby měření periody kmitu je složitější, pomocí výpočtu směrodatné odchylky nám z naměřených dat vychází:

$$T_1 = (2{,}95 \pm 0{,}08)\,\mathrm{s}\,,$$
$$T_2 = (2{,}27 \pm 0{,}08)\,\mathrm{s}\,,$$
$$T_3 = (2{,}55 \pm 0{,}07)\,\mathrm{s}\,,$$

kde první číslo v závorce představuje průměrně naměřenou periodu kmitu hůlky a druhé číslo pak absolutní chybu měření.

Relativní chybu měření pro jednotlivé parametry vystupující ve výsledné rovnici určíme jako podíl jejich absolutní chyby a průměrně naměřené hodnoty. Vychází nám:

$$d'' = 0{,}02500\,,$$
$$m_1'' = 0{,}00833\,,$$
$$m_2'' = 0{,}00962\,,$$
$$m_3'' = 0{,}01471\,,$$
$$T_1'' = 0{,}02712\,,$$
$$T_2'' = 0{,}03524\,,$$
$$T_3'' = 0{,}02745\,.$$

Z následujících výpočtů dle teorie chyb (účelem této úlohy není podrobný rozbor postupu určování chyb měření, neuvádíme zde tudíž přesné kroky výpočtů vedoucí k určení výsledné odchylky – více k tomuto tématu (kromě našeho seriálu) např. na webových stránkách[1]) se konečný moment setrvačnosti rovnájí:

$$J_1 = (0{,}062 \pm 0{,}003)\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}\,,\; J_2 = (0{,}031 \pm 0{,}002)\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}\,,\; J_3 = (0{,}026 \pm 0{,}001)\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}\,,$$

kde opět první číslo v závorce představuje moment setrvačnosti a druhé číslo pak absolutní chybu měření této veličiny.

Diskuse

Pro ověření alespoň řádové správnosti hodnoty experimentálně určeného momentu setrvačnosti jednotlivých hůlek si ještě na závěr zkusíme dosadit naměřené hodnoty do rovnice

$$J = \frac{1}{12} m l^2\,,$$

což je vzorec pro výpočet momentu setrvačnosti J tyče délky l a hmotnosti m vzhledem k ose otáčení procházející středem tyče kolmo k její délce. Zde uvažovaná tyč je na rozdíl od skutečné lyžařské hůlky homogenní těleso s těžištěm ve svém středu, a proto nelze tento vztah pro přesné určení momentu setrvačnosti použít.

Pro parametry hůlek nám z této rovnice vychází:

$$J_1^\star = 0{,}045\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}\,,$$
$$J_2^\star = 0{,}024\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}\,,$$
$$J_3^\star = 0{,}015\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}\,.$$

Vidíme, že tyto hodnoty se vcelku výrazně liší od námi naměřených hodnot. Téměř shodný je však poměr hodnot $J_1^\star$ a $J_2^\star$ s poměrem námi naměřených hodnot J_1 a J_2. Potvrdil se také předpoklad vycházející z teorie, že největší moment setrvačnosti při takto zadaných podmínkách měření má hůlka s největší hmotností a délkou, naopak nejmenší moment setrvačnosti má hůlka nejkratší a nejlehčí.

Co se týče chybovosti měření, největší odchylky od správného výsledku jsme se mohli dopustit při měření periody kmitu hůlky, menší pak při určování její hmotnosti či jejího těžiště a vzdálenosti d od něj. Dalšími nepřesnosti v experimentu mohla způsobit např. pružnost provázku či příliš velké vychýlení hůlky z její rovnovážné polohy.

Tomáš Havelka
havis@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

[1] http://www.kfy.zcu.cz/prakt/chyby.pdf