Úloha III.C ... Růžová

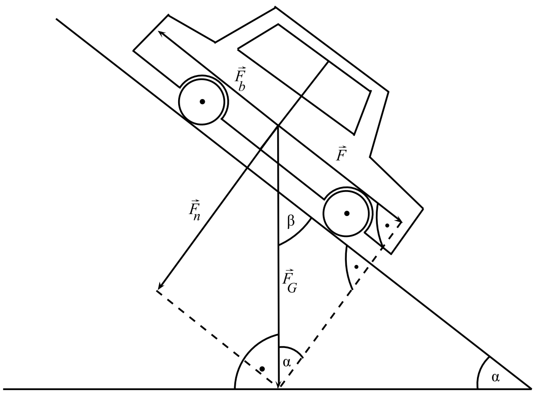
5 bodů; průměr 3,30; řešilo 37 studentů

a) *Růžový trabant vážící* 1,5 t *jede s kopce stálou rychlostí* 40 km/h. *Auto brzdí. To má za následek brzdnou sílu* 800 N. *Určete sklon kopce.*

b) *Na lanku délky* 2 m *je zavěšena růžová kulička. Kyvadlo vychýlíme o* 5°. *O kolik se zvedne střed kuličky ve vychýlené poloze oproti původní?*

c) *Anička koupila bratrovi k Vánocům kouzelnickou hůlku dlouhou* 25 cm *a shání růžovou krabičku, do které hůlku zabalí. Jak vysoká má být krabička, když její podstava má rozměry* 10 *a* 15 cm. *Anička chce, aby hůlka v krabičce ležela v pozici tělesové úhlopříčky.*

a) Na auto působí tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$, kterou lze rozložit do dvou navzájem kolmých směrů: na pohybovou sílu $\boldsymbol{F}$ (rovnoběžná s nakloněnou rovinou) a na normálovou sílu (kolmá na nakloněnou rovinu). Vznikne pravoúhlý rovnoběžník, jehož úhlopříčkou je vektor síly $\boldsymbol{F}_G$, který směřuje kolmo k zemi. Na obrázku vznikne několik pravoúhlých trojúhelníků.



Obr. 1: Trabant jede z kopce

Doplněním úhlů podle pravidla o součtu úhlů v trojúhelníku získáme pravoúhlý trojúhelník s přeponou $\boldsymbol{F}_G$ a odvěsnou $\boldsymbol{F}$, která je protilehlá úhlu α, což je hledaný sklon kopce. Pomocí goniometrických funkcí si nyní můžeme vyjádřit pohybovou složku tíhové síly trabantu.

$$\sin\alpha = \frac{F}{F_G}$$
$$F = F_G \cdot \sin\alpha$$

Auto se pohybuje rovnoměrným pohybem. Jeho zrychlení je tedy nulové, a tím je nulová i výslednice sil.

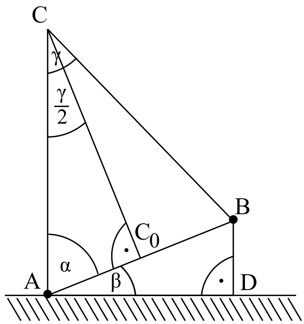
$$F = m \cdot a = m \cdot 0 = 0\,\mathrm{N}$$

Nulová výslednice vznikne vyrušením síly $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{F}_\mathrm{b}$, a proto

$$
\begin{aligned}
F &= F_\mathrm{b}\\
F_\mathrm{b} &= F_G \cdot \sin\alpha\\
\sin\alpha &= \frac{F_\mathrm{b}}{F_G} = \frac{F_\mathrm{b}}{m\cdot g}\\
\alpha &= \arcsin\frac{800\,\mathrm{N}}{1500\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}} \approx \arcsin 0{,}054 \approx 3{,}11^\circ
\end{aligned}
$$

Sklon kopce, ze kterého sjíždí trabant je přibližně $3^\circ 7'$.

b) Lano s kuličkou je ve svislé poloze, poté je vychýleno o pět stupňů. Délka lana je stále stejná, a proto tvoří ramena rovnoramenného trojúhelníku ABC s úhlem $\gamma = 5^\circ$ u místa zavěšení.



Obr. 2: Kulička vychýlená na kyvadle

V rovnoramenném trojúhelníku jsou úhly u základny shodné a součet všech úhlů v trojúhelníku je 180°, tedy$\alpha = (180^\circ - \gamma)/2 = 90^\circ - \gamma/2$. Když je lano s kuličkou ve svislé poloze, můžeme si představit, že se dotýká rovné desky, na kterou je lano kolmé. Po vychýlení zjistíme, o kolik se zvedla kulička, určením vzdálenosti kuličky od této desky. Na obrázku 2 vidíme, že nám vznikl pravoúhlý trojúhelník ADB, jehož strana DB je hledanou výškou kuličky. V trojúhelníku můžeme zjistit $|\measuredangle \mathsf{BAD}|$.

$$
\begin{aligned}
|\measuredangle \mathsf{CAD}| &= 90^\circ = \alpha + \beta\\
\beta = 90^\circ - \alpha &= 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = 90^\circ - 90^\circ + \frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma}{2}
\end{aligned}
$$

Dále můžeme zjistit velikost přepony AB. V rovnoramenném trojúhelníku ABC je výška na základnu totožná s jeho těžnicí (spojnice vrcholu a středu protilehlé strany) a zároveň je tato úsečka i osou úhlu γ. Máme tedy další pravoúhlý trojúhelník $\mathsf{AC_0C}$ s přeponou $|\mathsf{AC}| = 2\,\mathrm{m}$ a $|\measuredangle \mathsf{C_0CA}| = \gamma/2$. Z tohoto trojúhelníku si můžeme vyjádřit $|\mathsf{AB}|$.

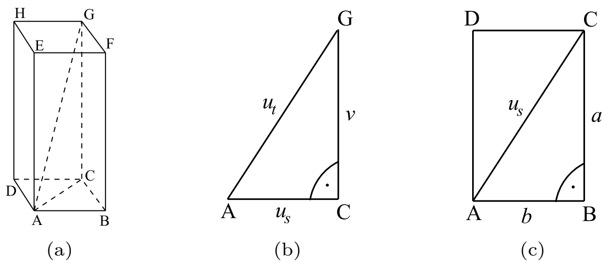
$$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{|\mathsf{AB}|}{2\cdot|\mathsf{AC}|}$$
$$|\mathsf{AB}| = 2\cdot|\mathsf{AC}|\sin\frac{\gamma}{2}$$

Nyní již můžeme dopočítat zvýšení kuličky.

$$\sin\beta = \frac{|\mathsf{BD}|}{|\mathsf{AB}|}$$
$$|\mathsf{BD}| = \sin\beta|\mathsf{AB}| = \sin\frac{\gamma}{2}\cdot 2\cdot|\mathsf{AC}|\sin\frac{\gamma}{2} = 2\cdot|\mathsf{AC}|\sin^2\frac{\gamma}{2}$$
$$|\mathsf{BD}| = 2\cdot 2\cdot\sin^2\frac{5^\circ}{2} \approx 0{,}0076\,\mathrm{m} \approx 0{,}76\,\mathrm{cm}$$

Ve vychýlené poloze bude střed kuličky přibližně o 0,76 cm výš než v původní poloze.

c) Když dá Anička hůlku do krabičky tvaru kvádru tak, aby tvořila tělesovou úhlopříčku, bude hůlka spojovat body A, G (obrázek 3a). Tím vznikne pravoúhlý trojúhelník ACG, kde tělesová úhlopříčka AG je jeho přeponou, strana AC je stěnovou úhlopříčkou podstavy krabičky a CG je hranou krabičky o délce její výšky. Pomocí Pythagorovy věty si vyjádříme u_s a u_t. Úpravou



Obr. 3: Umístění hůlky do kvádrové krabičky

dostaneme vztah pro výpočet výšky krabičky.

$$u_\mathrm{s}{}^2 = a^2 + b^2$$
$$u_\mathrm{t}{}^2 = u_\mathrm{s}{}^2 + v^2 \qquad \Rightarrow \qquad v^2 = u_\mathrm{t}{}^2 - u_\mathrm{s}{}^2$$
$$\frac{v}{\mathrm{cm}} = \sqrt{u_\mathrm{t}{}^2 - (a^2+b^2)} = \sqrt{u_\mathrm{t}{}^2 - a^2 - b^2} = \sqrt{25^2 - 10^2 - 15^2} =$$
$$= \sqrt{625 - 100 - 225} = \sqrt{300} = \sqrt{3\cdot 100} = 10\cdot\sqrt{3}$$
$$v \approx 17{,}32\,\mathrm{cm}$$

Anička potřebuje 17,32 cm vysokou krabičku, aby hůlka byla v pozici tělesové úhlopříčky.

Eliška Pilátová
eliska@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.