

Úloha III.2 ... Topení na Sibiři

4 body; průměr 1,67; řešilo 27 studentů

Polárníci na daleké sibiřské stanici se rozhodli, že si přitopí. Ve skladu objevili dva elektrické přímotopy, z nichž jeden má elektrický odpor $R_1 = 1000 \Omega$ a druhý má elektrický odpor $R_2 = 100 \Omega$. Diesellový agregát, který bude dodávat energii pro topení, je umístěn vně stanice. Přívodní kabely od agregátu ke stanici mají odpor $R_v = 10 \Omega$. Jak mají polárníci postupovat, aby se ve stanici co nejlépe zahřáli? ®adim mrznul.

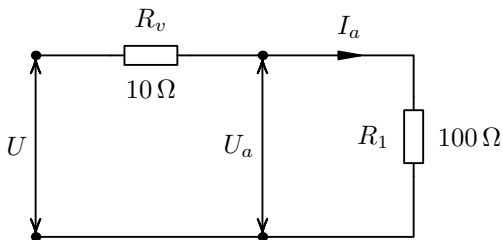


Polárníci mohou topení zapojit jenom čtyřmi způsoby:

- zapojit přímotop o odporu 100Ω
- zapojit přímotop o odporu $1 \text{ k}\Omega$
- zapojit oba přímotopy sériově
- zapojit oba přímotopy paralelně

To, co je bude zajímat, je elektrický příkon na topném tělese v přímotopu. Ve všech případech předpokládáme, že diesela agregát dodává stálé napětí U .

Zapojení prvního přímotopu



Obr. 1: Zapojení prvního přímotopu

Nejprve spočítáme celkový elektrický odpor

$$R_a = R_v + R_1 = 10 \Omega + 100 \Omega = 110 \Omega.$$

Obvodem prochází proud

$$I_a = \frac{U}{R_a} = \frac{U}{110 \Omega}.$$

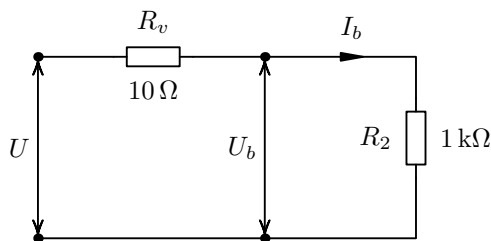
Nyní musíme spočítat napětí na přímotopu

$$U_a = I_a R_1 = \frac{U}{110 \Omega} \cdot 100 \Omega = \frac{100}{110} U.$$

Protože známe celkový proud I_a i celkové napětí U_a na spotřebičích uvnitř domu, můžeme vypočítat celkový výkon P_a .

$$P_a = U_a I_a = \frac{100}{110} U \cdot \frac{U}{110 \Omega} = \frac{U^2}{121 \Omega} = \left(\frac{U}{V}\right)^2 \cdot 8,26 \cdot 10^{-3} \text{ W}$$

Zapojení druhého přímotopu



Obr. 2: Zapojení druhého přímotopu

Pokud zapojíme jenom druhý přímotop, tak postupujeme úplně stejně.

$$R_b = R_v + R_2 = 10 \Omega + 1000 \Omega = 1010 \Omega$$

$$I_b = \frac{U}{R_b} = \frac{U}{1010 \Omega}$$

$$U_b = I_b R_2 = \frac{U}{1010 \Omega} \cdot 1000 \Omega = \frac{100}{101} U$$

$$P_b = U_b I_b = \frac{100}{101} U \cdot \frac{U}{1010 \Omega} = \frac{10 \cdot U^2}{10201 \Omega} = \left(\frac{U}{V}\right)^2 \cdot 9,80 \cdot 10^{-4} \text{ W}$$

Sériové zapojení

Pro sériové zapojení výpočet trochu upravíme. Nebude nás zajímat příkon na jednotlivých přímotopech, ale stačí nám vypočítat celkový výkon na obou dohromady.

Nejprve si spočteme odpor R_{12s} a dále budeme postupovat stejně.

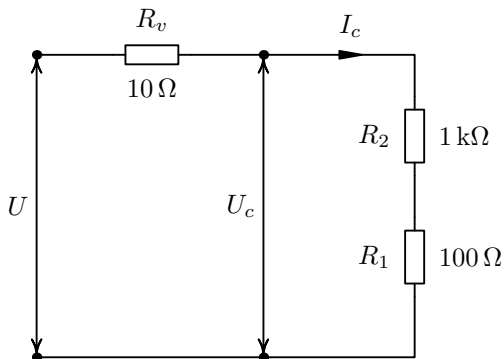
$$R_{12s} = R_1 + R_2 = 100 \Omega + 1000 \Omega = 1100 \Omega$$

$$R_c = R_v + R_{12s} = 10 \Omega + 1100 \Omega = 1110 \Omega$$

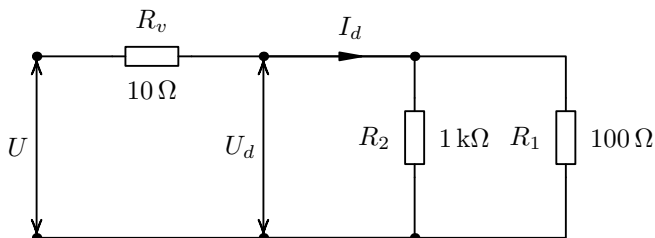
$$I_c = \frac{U}{R_c} = \frac{U}{1110 \Omega}$$

$$U_c = I_c R_{12s} = \frac{U}{1110 \Omega} \cdot 1100 \Omega = \frac{110}{111} U$$

$$P_c = U_c I_c = \frac{110}{111} U \cdot \frac{U}{1110 \Omega} = \frac{11 \cdot U^2}{12321 \Omega} = \left(\frac{U}{V}\right)^2 \cdot 8,93 \cdot 10^{-4} \text{ W}$$



Obr. 3: Sériové zapojení přímotopů

Paralelní zapojení

Obr. 4: Paralelní zapojení přímotopů

Pro paralelní zapojení vypočítáme celkový odpor R_{12p} odporů R_1 a R_2 . Dále ze stejného důvodu jako v sériovém zapojení můžeme pokračovat úplně stejně.

$$R_{12p} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{100 \Omega \cdot 1000 \Omega}{100 \Omega + 1000 \Omega} = \frac{1000}{11} \Omega$$

$$R_d = R_v + R_{12s} = 10 \Omega + \frac{1100}{11} \Omega = \frac{1110}{11} \Omega$$

$$I_d = \frac{U}{R_d} = \frac{U}{\frac{1110}{11} \Omega} = \frac{11 \cdot U}{1110 \Omega}$$

$$U_d = I_d R_{12s} = \frac{11 \cdot U}{1110 \Omega} \cdot \frac{1000}{11} \Omega = \frac{100}{111} U$$

$$P_d = U_d I_d = \frac{100}{111} U \cdot \frac{11 \cdot U}{1110 \Omega} = \frac{110 \cdot U^2}{12321 \Omega} = \left(\frac{U}{\sqrt{V}}\right)^2 \cdot 8,93 \cdot 10^{-3} \text{ W}$$

Rozborem jsme zjistili, že nejvíc se ohřejí, zapojí-li oba přímotopy paralelně. Podotkneme, že tento výsledek neplyne automaticky z toho, že v paralelním zapojení má obvod nejmenší odpor. Se snižováním odporu přímotopů bude totiž klesat napětí na přímotopech a vzrůstat

napětí na vodičích mezi stanicí a agregátem (součet napětí na vodičích a přímotopu je dle předpokladu pořád stejný – U). Výše uvedené výsledky lze snadno zobecnit (můžete si provést za cvičení): Bude-li celkový odpor části obvodu ve stanici R_R a odpor vodičů mezi agregátem a stanicí jako výše R_v , příkon části obvodu ve stanici bude

$$P_R = \frac{U^2 R_R}{(R_v + R_R)^2}.$$

Můžete si ověřit, že kdyby v naší úloze byl odpor přírodních vodičů třeba $2\text{ k}\Omega$ namísto $10\ \Omega$ (což by se, pravda, přírodním kabelům stávat nemělo), nejvýhodnější zapojení přímotopů by bylo sériové (a většina agregátem dodávaného příkonu by se protopila venku v přírodních vodičích).

Petr Pecha
x1fd@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.