Úloha I.4 ... Řekoplavec

5 bodů; průměr 2,02; řešilo 46 studentů

Plavec se snaží přeplavat řeku, v níž teče voda rychlostí[1] $v_\mathrm{r} = 2\,\mathrm{km/h}$. *Sám přitom (ve stojaté vodě) plave rychlostí* $1\,\mathrm{m/s}$. *Po jaké dráze a jakým směrem musí plavat, aby se nejméně namohl? V jakém místě a za jak dlouho vyplave na druhý břeh? A co aby jeho dráha byla nejkratší?*

Vymyslel plavec Petr. (Rozcvičková úloha z FYKOSu.)

Rychlost plavce označme $v_\mathrm{p} = 1\,\mathrm{m/s}$. Šířku řeky[2] označme d. Protože plavec plave vůči vodě stále stejně rychle bez ohledu na to, kam ho unáší proud, tak potřebuje plavat co nejkratší dobu, aby se co nejméně namohl. To znamená, že v soustavě spojené s pohybující se řekou bude plavat kolmo na břeh.

Protože koná vzhledem k zemi dva na sobě nezávislé rovnoměrné přímočaré pohyby, výsledkem jejich složení bude opět přímka, která bude se břehem, od kterého vyplaval, svírat úhel[3]

$$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{v_\mathrm{p}}{v_\mathrm{r}}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{1\,\mathrm{m/s}}{0{,}56\,\mathrm{m/s}}\right) = \mathrm{arctg}\,\frac{9}{5} = 61^\circ\,,$$

kde v_p označuje rychlost plavce. Na druhý břeh vyplave za čas $t = d/v_\mathrm{p}$. Proud ho přitom snese o vzdálenost

$$s = tv_\mathrm{r} = d\frac{v_\mathrm{r}}{v_\mathrm{p}} = d\cdot\frac{0{,}56\,\mathrm{m/s}}{1\,\mathrm{m/s}} = \frac{5}{9}d\,.$$

Aby jeho dráha byla nejkratší, musí vyplavat kolmo na druhém břehu. Přitom aby plaval kolmo na břeh, musí mít složka v_p rovnoběžná se břehem stejnou velikost (ale opačný směr) jako v_r. Vzhledem k řece tedy musí plavat tak, aby vektor jeho rychlosti svíral s proudem úhel

$$\beta = \arccos\left(\frac{v_\mathrm{r}}{v_\mathrm{p}}\right) = \arccos\frac{5}{9} = 56^\circ\,.$$

K tomu, abychom zjistili, za jak dlouho vyplave, potřebujeme znát složku rychlosti v_p, která je kolmá na břeh. Snadno ji dopočteme z Pythagorovy věty jako $v_\mathrm{n} = \sqrt{v_\mathrm{p}^2 - v_\mathrm{r}^2}$. Čas, za který vyplave, je

$$t = \frac{d}{v_n} = \frac{d}{\sqrt{v_\mathrm{p}^2 - v_\mathrm{r}^2}} = \frac{d}{\sqrt{(1\,\mathrm{m/s})^2 - (0{,}56\,\mathrm{m/s})^2}} = \frac{d}{0{,}83\,\mathrm{m/s}}\,.$$

---

[1] Zadané rychlosti jsou v různých jednotkách, tudíž pro výpočty převedeme vše na m/s:

$$v_\mathrm{r} = 2\,\mathrm{km/h} = 2\,\mathrm{km/h}\cdot\frac{1000\,\mathrm{m/km}}{3600\,\mathrm{s/h}} \doteq 0{,}56\,\mathrm{m/s}.$$

[2] Verze úlohy ve FYKOSu obsahovala navíc zadanou hodnotu šířky řeky $d = 10\,\mathrm{m}$. Bez zadání konkrétní hodnoty vzdálenosti pochopitelně nelze určit ostatní vzdálenosti v metrech, ale jen v šířkách řeky, stejně tak nelze číselně dopočíst příslušné časy. To jsme však po vás nechtěli – chtěli jsme především obecný výraz bez dosazení, abyste si zvykli počítat „bez čísel“. Řešení se zadanou hodnotou d si můžete prohlédnout na stránkách FYKOSu (ročník 25, série 1, úloha 2).

[3] Funkce arctg a arccos jsou funkce inverzní k funkcím tg a cos. Zejména pro ty z vás, kteří o těchto funkcích ještě neslyšeli, do třetí série připravujeme studijní text a sadu úloh zabývající se tímto tématem, tedy *goniometrickými a cyklometrickými funkcemi.*

Petr Ryšavý
petr@fykos.cz