

Úloha I.2 ... Kolejní výtah

4 body; průměr 2,38; řešilo 55 studentů

Řadim nastoupil do výtahu na koleji 17. listopadu, stisknul tlačítko s požadovaným poschodím a výtah se rozjel. Za několik okamžiků Řadima něco praštilo do hlavy. Výtah se totiž zrázu zastavil a Řadima udeřil. Byl to tak silný náraz, že si Řadim ani nepamatoval, kterým směrem jel. Dokázali byste mu poradit? Co by se stalo, kdyby jel opačným směrem? Strop výtahu je od podlahy vzdálen 2 m a Řadim je vysoký 170 cm. Jakou nejmenší rychlostí se výtah před zastavením pohyboval? Řadim o sobě rozšiřoval drby.

Když Řadim jel výtahem, nejdříve se pohyboval stejným směrem a stejnou rychlostí jako výtah, takže vůči sobě byli v klidu. Najednou však výtah něco zastavilo. Řadimovo tělo se však pohybovalo dál stále stejným směrem a rychlostí, dokud ho také něco nezastavilo – strop výtahu.

Kterým směrem tedy původně jel? Po zastavení výtahu pokračoval nahoru až ke stropu a to byl stejný směr, jakým jeli on i výtah zpočátku. Takže musel jet nahoru.

Pokud by jel dolů a výtah by zastavil, Řadim by jel opět dál, dokud by ho také něco nezastavilo. V tomhle případě však stojí na podlaze výtahu. Ta ho zastaví hned, jak se zastaví výtah, takže se nestane nic.

Jakou rychlostí musel výtah jet, aby zlomyslně praštil Řadima do hlavy?

První řešení Co se stalo po zastavení výtahu? Můžeme říci, že ho výtah „vyhodil“ svisle vzhůru rychlostí, jakou jel, kterou si označíme v_0 . Když něco vyhodíme do vzduchu, tak nám tam hraje roli ještě gravitace. Rychlost v nějakém bodě vrhu tedy spočteme: $v = v_0 - gt$. Když dosáhne vyhozovaný předmět nejvyššího bodu, má nulovou rychlost (obrací se a potom začne padat na druhou stranu). Tu dosadíme do předchozího vztahu.

$$\begin{aligned} 0 &= v_0 - gt, \\ v_0 &= gt, \\ t &= \frac{v_0}{g}. \end{aligned}$$

Získali jsme tedy čas, za který předmět dolétne do nejvyššího bodu. Vezmeme si vzorec pro výšku vrhu svislého vzhůru. První sčítanec nám popisuje výšku, které by předmět dosáhl bez gravitace. Druhá složka je vzorec dráhy pro volný pád (kde působí pouze gravitační síla), kterou musíme odečíst, protože má opačný směr (házíme nahoru, předměty padají dolů).

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

kde h je dosažená výška. Dosadíme tam čas pro nejvyšší bod

$$h = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0}{g} \right)^2 = \frac{v_0^2}{2g}.$$

My však chceme zjistit, jaké má být v_0 , tak si výraz ještě trochu upravíme

$$\begin{aligned} 2hg &= v_0^2 \\ v_0 &= \sqrt{2hg} \end{aligned}$$

Teď už máme všechno, co potřebujeme; g najdeme v tabulkách a h = výška výtahu – výška Řadima = 0,3 m. Teď stačí už jen dosadit

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot 0,3 \text{ m} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = \sqrt{5,886 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}} \doteq 2,4 \text{ m/s}.$$

Výtah se tedy musel pohybovat alespoň rychlostí 2,4 m/s směrem nahoru.

Druhé řešení Použít také můžeme zákon zachování energie. Víme, že pokud Radim jel, stál pevně na podlaze, takže výška, do níž vystoupal, byla nulová: $h_1 = 0$ m. Zato rychlost (jak Radima, tak výtahu) je největší – v_1 . V okamžiku, kdy Radim narazí, nachází se ve výšce $h_2 = 0,3$ m a rychlost je nulová (zastavil ho strop výtahu), $v_2 = 0$ m/s.

Zákon zachování energie nám říká, že součet energií (v našem případě potenciální V a kinetické T) se nemění.

$$\begin{aligned} V_1 + T_1 &= V_2 + T_2, \\ mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 &= mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2, \end{aligned}$$

kde g je gravitační zrychlení a m je Radimova hmotnost. My ale víme, že $h_1 = 0$ a $v_2 = 0$, takže i V_1 a T_2 jsou nula. Po dosazení a upravení získáme

$$\begin{aligned} T_1 = V_2 &= \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_2, \\ v_1^2 &= \frac{2mgh_2}{m}, \\ v_1 &= \sqrt{2gh_2}, \\ v_1 &= \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot 0,3 \text{ m}}, \\ v_1 &\doteq 2,43 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Veličina v_1 je hledaná rychlost výtahu před zastavením.

Anna Chejnovská
anca@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.