VÝFUK

VÝpočty Fyzikálních ÚKolů – kores. sem. MFF UK pro ZŠ ročník 1±1 číslo 5/7

Úvodem

Milé řešitelky a milí řešitelé,

s počátkem jara k vám přichází zadání předposlední série korespondenčního semináře Výfuk v letošním školním roce. Je to také vaše předposlední možnost vylepšit své pořadí a s ním zvýšit své šance dostat se na **tábor**, jímž bude letošní ročník završen a jenž se bude konat **od 29. června do 8. července** na Vysočině. Zde budete mít možnost setkat se s ostatními řešiteli, užít si s nimi spoustu her a také se mnoho přiučit v odborném programu, který připravujeme.

A poněvadž je pro vás tábor za odměnu a bude spolufinancován MFF UK a z programu Think Big, bude poplatek za účast velmi nízký nebo žádný.

Věnujte, prosím, pozornost přiloženému dotazníku, který lze vyplnit též elektronicky na našich webových stránkách. Jeho vyplnění nám pomůže při organisaci tábora (je vlastně předběžnou přihláškou) a umožní nám přizpůsobit náplň odborného programu tábora (a také samotného korespondenčního semináře) vašim znalostem.

Organizátoři

Zadání V. série

Termín uploadu: 24. dubna 2012 20.00
Termín odeslání: 20. dubna 2012

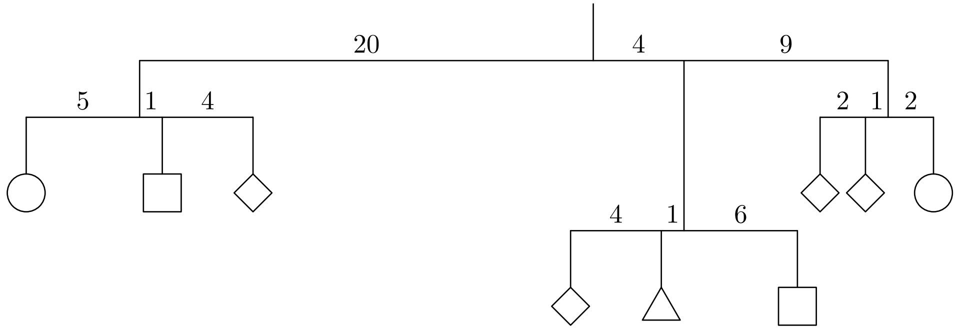
Úloha V.1 ... Vešák — 3 body

Franta z rána rozvěšoval závaží na svůj věšák (obrázek 1). Určete ostatní hmotnosti závaží na obrázku, když víte, že závaží tvaru trojúhelníku má hmotnost 21 jednotek.

Franta má čtyři druhy závaží, která jsou každá jinak těžká. Rozvěšuje je na svůj věšák, který tvoří rovnoramenné váhy, na kterých jsou zavěšeny další tři. Vzdálenosti částí jednotlivých (nehmotných) ramen jsou zapsány na obrázku. Proto hlavní váhy mají délky ramen 20 a 13.

Úloha V.2 ... Martin a Marťan — 3 body

Martin se houpe na houpačce tak, že ve chvíli, kdy je výchylka houpačky 90 stupňů, se houpačka zastaví a začne se vracet zpět. Na neznámé planetě daleko ve vesmíru se houpe Marťan, jenže tak, že se houpačka zastaví v největší výchylce 180 stupňů, tedy se téměř přetáčí. Jaký je poměr hmotnosti planety Země a planety, na které se houpe Marťan, víte-li, že Martin i Marťan mají

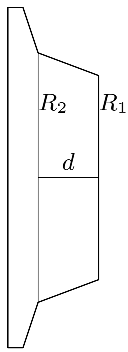


Obr. 1: Frantův věšák v rovnováze

stejnou hmotnost, houpačky jsou stejně dlouhé a rychlost houpaček v dolní úvrati (při průchodu rovnovážnou polohou) je stejná?

Úloha V.3 ... Vlak v zatáčce 5 bodů

Když auto projíždí zatáčkou, musí kolo, které jede po vnějším oblouku, urazit delší dráhu. K tomu slouží takzvaný diferenciál, který umožní otáčet každým kolem zvlášť. Vlak ale nemá diferenciál. Aby vnější kolo mohlo urazit delší dráhu, mají jeho kola tvar jako na obrázku. A jak jste si možná všimli při jízdě vlakem, jsou vlakové zatáčky klopené tak, že se vlak nakloní „dovnitř“ do zatáčky. Představte si, že by vlak neustále jezdil po kruhové dráze, která by byla vhodně sklopená. Jaký nejmenší poloměr může mít kružnice, na níž bude ležet vnitřní kolejnice? Víte poloměry R_1, R_2, tloušťku d a rozchod kolejnic s.



Úloha V.4 ... 24hodinová šichta 3 body

Spočtěte, kolik práce vykoná motor nástěnných hodin během jednoho dne. Hodiny mají ručičky o tvaru tenkých tyčí, minutová ručička má hmotnost m a délku l, hodinová hmotnost M a délku L.

Obě ručičky se pohybují spojitě. Při brzdění motor žádnou práci nekoná, ale energie se ztrácí. Vteřinovou ručičku hodiny nemají.

Úloha V.E ... Díra v lahvi 6 bodů

Do větší nádoby udělejte malou dírku blízko u dna (použijte například PET lahev). A poté změřte, jak závisí vodorovná vzdálenost dostřiku vody, na výšce hladiny v nádobě. Na čem všem podle vás může záležet? Zkuste úlohu i graficky zpracovat (na vodorovnou osu zapisujte výšku hladiny a na svislou vzdálenost od dírky).

Úloha V.C ... Precisní váza 5 bodů

Pokuste se určit velikost obsahu dna vázy. Nádoba měla dno tvaru hvězdy, avšak její stěny byly kolmé na její dno. Měření jsme provedli za vás a to tak, že jsme postupně do nádoby přilévali po 1 dl vody a zaznamenávali výšku hladiny nad dnem. Výsledky naleznete v tabulce 1. Použijte postup popsaný v Elektrickém příkladě a určete obsah podstavy S. Pozor na jednotky! Výšku jsme měřili v centimetrech, ale objem v decilitrech. Abyste dostali obsah v cm^2, je třeba nejdříve hodnoty objemu převést na cm^3.

Tabulka 1: Závislost objemu vody na výšce hladiny ve váze.

V/dl	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
h/cm	10,5	15,2	19,8	26,3	32,1

Řešení IV. série

Úloha IV.1 ... Schody z Chrudimi

2 body; průměr 0,97; řešilo 30 studentů

Eskalátory v metru na Náměstí Míru mají n schodů a pohybují se rychlostí v. Spočtěte, kolik schodů ve skutečnosti vyšlapete, pokud po nich jdete rychlostí v_1: a) po směru jízdy, b) proti směru jízdy. Při pohybu proti směru uvažujte, že $v_1 > v$. *Aleš po cestě do otevřených dveří.*

Označme d délku jednoho schodu a $V = v/d$ rychlost eskalátorů ve schodech za sekundu. Podobně označme $V_1 = v_1/d$. Pokud se pohybujeme po směru jízdy, je naše výsledná rychlost vůči vnějšímu pozorovateli rovna $V_\mathrm{a} = V_1 + V$, pohybujeme-li se proti směru, je $V_\mathrm{b} = V_1 - V$. Čas, za který pak projdeme n schodů, je

$$t_\mathrm{a} = \frac{n}{V_1 + V}\,, \quad \text{resp.} \quad t_\mathrm{b} = \frac{n}{V_1 - V}\,.$$

Kolik ujdeme schodů je pak dáno součinem tohoto času a naší rychlosti vzhledem k schodům, tedy

$$N_\mathrm{a} = V_1 \frac{n}{V_1 + V} = n \frac{v_1}{v_1 + v}\,, \quad \text{resp.} \quad N_\mathrm{b} = V_1 \frac{n}{V_1 - V} = n \frac{v_1}{v_1 - v}\,.$$

Petr Ryšavý
petr@fykos.cz

Úloha IV.2 ... Horská dráha

3 body; průměr 1,89; řešilo 36 studentů

Představ si, že jedeš na horské dráze, která má kruhový tvar a zapomněl jsi se připoutat. V nejvyšším bodě tedy budeš hlavou dolů. Je možné, abys nevypadl? Co musí horská dráha splňovat? *Bětka si představovala, jaké to asi je na horské dráze.*

Je možné v nejvyšším bodě horské dráhy nevypadnout, pokud bude odstředivá síla (v neinerciální vztažné soustavě spojené s vozíčkem horské dráhy) alespoň tak velká jako gravitační síla. Odstředivá síla působí ze středu kružnice (kruhové horské dráhy).

$$F_\mathrm{O} \geq F_G$$

$$m\frac{v^2}{r} \geq mg\,,$$

kde m je hmotnost vozíčku horské dráhy i s pasažéry, r je poloměr horské dráhy a v rychlost, kterou jede vozíček. Odtud snadno vyjádříme, jakou minimální rychlostí se musí pohybovat vozíček, aby jeho posádka nevypadla.

$$v \geq \sqrt{rg}$$
$$v_{\min} = \sqrt{rg}\,.$$

Člověk, jedoucí nepřipoutaný na horské dráze, v nejvyšším bodě nevypadne, pokud bude mezi poloměrem kruhové dráhy a rychlostí vozíčku platit nerovnost $v \geq \sqrt{rg}$.

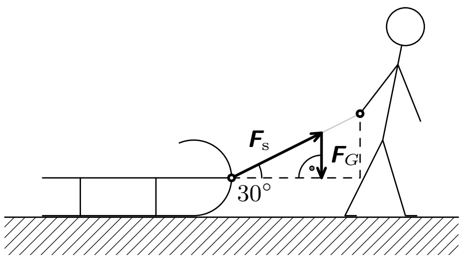
Alžběta Nečadová
`bjetka@fykos.cz`

Úloha IV.3 ... I mistr tesař se utne

5 bodů; průměr 2,16; řešilo 32 studentů

V textu o goniometrických funkcích v minulé sérii jsme se dopustili jednoho z nejhorších omylů, které v učební literatuře mohou nastat – ilustrující příklad je zde vyřešen úplně špatně, takže namísto objasnění látky ji naopak zatemňuje. Připomeňme, že zadání úlohy znělo:

> *Malý Schlitt za sebou táhne stále stejně rychle na provázku dřevěné sáňky o hmotnosti* 5 kg*. Úhel, který svírá provázek s podlahou je* $\alpha = 30^\circ$ *(obrázek 2). Jakou silou* F_s *musí Schlitt sáně táhnout?*



Obr. 2: Schlitt táhne sáně

A v textu uvedené „řešení“ znělo takto:

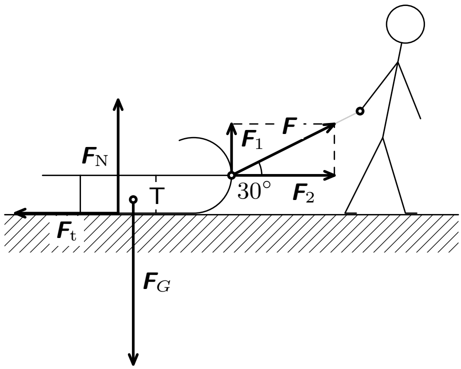
> *Vycházíme z toho, že při rovnoměrném přímočarém pohybu jsou síly v rovnováze. Spočítáme si gravitační sílu, která působí na sáně* $F_G = mg = 50\,\mathrm{N}$*. Víme, že platí* $\sin\alpha = F_G/F_s$*. Vyjádříme si a dosadíme*

$$F_s = \frac{F_G}{\sin\alpha} = \frac{50\,\mathrm{N}}{\frac{1}{2}} = 100\,\mathrm{N}\,.$$

> *Schlitt musí sáně táhnout silou* 100 N.

Proč je uvedené řešení špatně? Která veličina v zadání chybí, abychom úlohu mohli správně vyřešit? Jaké je tedy správné řešení? *Anča se sekla a Marek to neopravil.*

Při rovnoměrném přímočarém pohybu jsou síly působící na saně v rovnováze. Na saně působí tíhová síla F_G, která je v rovnováze s tlakovou silou podložky F_N a silou F_1, jež je složkou síly F, kterou Schlitt táhne saně. Druhá složka F_2 síly F je v rovnováze s třecí silou F_T.



Obr. 3: Síly působící na saně při rovnoměrném přímočarém pohybu

Tyto vztahy mezi silami můžeme zapsat pomocí následujících rovnic:

$$F_G - F_\mathrm{N} - F_1 = 0\,,$$
$$F_\mathrm{T} - F_2 = 0\,.$$

Tlaková síla podložky je shodná s tlakovou silou saní, z níž lze určit třecí sílu pomocí vztahu

$$F_\mathrm{T} = fF_\mathrm{N}\,,$$

kde f je součinitel smykového tření. Vzájemně kolmé složky síly F si vyjádříme pomocí goniometrických funkcí, dosadíme do předešlých rovnic a vyjádříme si vztah pro hledanou sílu F.

$$\begin{aligned}
F_2 &= F\cos 30^\circ\\
F_1 &= F\sin 30^\circ\\
F_\mathrm{N} = F_G - F_1 &= mg - F\sin 30^\circ\\
F_\mathrm{T} &= F_2\\
fF_\mathrm{N} &= F\cos 30^\circ\\
f(mg - F\sin 30^\circ) &= F\cos 30^\circ\\
fmg &= F(f\sin 30^\circ + \cos 30^\circ)\\
F &= \frac{fmg}{f\sin 30^\circ + \cos 30^\circ}\\
F &= \frac{f\cdot 50\,\mathrm{N}}{f/2 + \sqrt{3}/2}
\end{aligned}$$

K úplnému vyřešení úlohy nám v zadání chybí hodnota součinitele smykového tření. V původním řešení byla za velikost síly F_1 dosazena celá F_G, což znamená, že vypočtenou silou by Schlitt sáňky zvedl nad zem.

Eliška Pilátová
eliska@fykos.cz

Úloha IV.4 ... Politicky kontroverzní vánice

6 bodů; průměr 3,13; řešilo 23 studentů

Na pohřbu Kim Čong-ila napadlo za jednu hodinu $h = 10\,\mathrm{cm}$ sněhu. Kolik kilogramů sněhu bylo v jednom m^3 vzduchu během sněžení? A kolik to je přibližně vloček? Představme si, že sněhové vločky jsou neprůhledné bílé kuličky. Na jakou vzdálenost byli truchlící Korejci schopni vidět Kimovu rakev? (Řekněme, že vločky nesmí zastínit více než 95 % rakve, aby ještě byla vidět.) Jak se změní tato vzdálenost, pokud by bylo $h = 5\,\mathrm{cm}$? Mára se zabývá politikou.

Hustota sněhu silně závisí na jeho vlhkosti, ovšem v tabulkách se pro čerstvě padlý prašan udává hustota $\varrho = 125\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Hmotnost sněhu padlého na plochu čtverce o straně $L = 1\,\mathrm{m}$ je potom $m = hL^2\varrho = 12{,}5\,\mathrm{kg}$. Když si vzpomeneme na poslední sněžení, odhadneme rychlost padání sněhu na $v = 0{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (Rychlost padání sněhu je samozřejmě pokaždé značně jiná a závisí mimo jiné na velikosti vloček, my však dále budeme používat uvedený odhad rychlosti.) Pokud za čas $T = 1\,\mathrm{h}$ napadlo na plochu L^2 12,5 kg sněhu, pak si můžeme představit, že celé toto množství se nacházelo ve vzduchu ve sloupci o výšce $H = vT = 1800\,\mathrm{m}$. (hodinu jsme samozřejmě nezapomněli převést na vteřiny). Do tohoto sloupce se vejde H/L krychlí o straně L, proto se v jedné krychli o straně L nachází sníh o hmotnosti

$$\mu = \frac{m}{H/L} = \frac{h\varrho L^3}{vT} \approx 7\,\mathrm{g}\,.$$

A jak vlastně vypadá sněhová vločka? Sníh je tvořen malými krystalky ledu, které jsou v podstatě ploché a mají tvar podobný šestiúhelníku. Tyto krásné krystalky mohou být jak tvarem tak velikostí velmi rozmanité. Navíc se jednotlivé krystalky obvykle shlukují („slepují“) do mnohem větších objektů – vloček, jejichž velikost silně závisí na atmosferických podmínkách. Guinessova kniha rekordů dokonce tvrdí, že byla pozorována sněhová vločka o velikosti bezmála 40 cm! Je proto v podstatě nemožné přesně odhadnout počet sněhových vloček v $1\,\mathrm{m}^3$ vzduchu. Pokud bychom přeci jen předpokládali, že jedna vločka je přibližně tvaru koule o poloměru $r = 1\,\mathrm{mm}$, tedy o objemu $V = 4\pi r^3/3 = 4{,}2\,\mathrm{mm}^3$, a hustotě stejné jako má padlý sníh, pak by počet vloček v $1\,\mathrm{m}^3$ vzduchu byl

$$N = \frac{\mu}{V\varrho} \approx 13000\,.$$

Pokud bychom všech těchto $N = 13000$ vloček nalepili na jednu ze stěn krychle o hraně $L = 1\,\mathrm{m}$, pokryly by vločky plochu

$$\sigma = N\pi r^2 = \frac{hL^3}{\frac{4}{3}vTr} = 0{,}042\,\mathrm{m}^2\,,$$

tedy vločky by pokryly $q = \sigma/L^2 = 4{,}2\,\%$ povrchu jedné stěny krychle. Jinými slovy, 4,2 % výhledu by zastínily a 95,8 % propustily. Každá metr tlustá vrstva padajícího sněhu propustí 95,8 % ze světla, které k ní prošlo. Například deset metrů tlustá vrstva proto propustí $q^{10} = 0{,}958^{10} = 0{,}65$ světla, vrstva tloušťky D metrů propustí $q^D = 0{,}958^D$. Všimněme si, že takto můžeme počítat i pro neceločíselné D. Co kdybychom tedy chtěli rakev vidět aspoň z 5 %? Museli bychom řešit rovnici $q^D = 0{,}05$. Buď bychom zkoušeli, jak musí D být velké, aby na pravé straně vyšlo 0,05, nebo bychom s výhodou mohli použít funkce logaritmus, kterou najdete na každé lepší kalkulačce a o které se dříve nebo později dozvíte ve škole. Toto je již nad rámec základoškolského řešení, pro úplnost ale uvedeme, že pomocí logaritmu bychom psali

$$D = \log_q 0{,}05 = \log_{0{,}958} 0{,}05 = 70\,.$$

Tak či tak dospějeme k závěru, že viditelnosti 5 % odpovídá vrstva padajícího sněhu tlustá zhruba 70 m. Jistě uznáte, že pokud za hodinu napadne 10 cm sněhu, jedná se již o silné sněžení. Snadno si uvědomíme, že pokud by za hodinu napadla jen polovina sněhu, tedy $h = 5\,\mathrm{cm}$, musela by vrstva padajícího sněhu být dvakrát tlustší, aby dosáhla stejného zastínění.

Poznámky k došlým řešením

V řešení jste na mnoha místech mohli samostatně zvolit velikost parametrů, jako třeba rychlost padání, velikost vločky a tak podobně. Mohli jste tak obdržet docela odlišné výsledky, což ale vůbec neznamená, že by byly špatné. Někteří z Vás si neuvědomili, že pro výpočet je třeba odhadnout rychlost letu vloček ve vzduchu. Většina z Vás si neuvědomila, že pro výpočet viditelnosti je třeba spíše uvažovat plošný průřez vloček, než jejich objem. Na závěr si všimněme ještě jednoho: Když se sníh skládá z krystalků ledu, který je sám o sobě průhledný, jaktože sníh je bílý? Pokud s fyzikou zůstanete kamarádi, jistě se odpověď na tuto zajímavou otázku v budoucnosti dozvíte.

Marek Scholz
`mara@fykos.cz`

Úloha IV.E ... Lyžování na blátě

7 bodů; průměr 2,80; řešilo 15 studentů

Je možné, že v našich končinách bude letos lyžařské náčiní vcelku nepoužitelné. Abyste si s ním užili alespoň trochu zábavy, změřte moment setrvačnosti (při otáčení kolem osy procházející těžištěm a kolmé na skluznici nebo hůlku) lyže nebo lyžařské hůlky. Nezapomeňte v řešení uvést parametry vámi měřené výstroje (druh, velikost, hmotnost…).

Marek byl naštvaný, že stále trčí v Praze.

Teorie

Není od věci se opět ze začátku zamyslet, co má být výsledkem našeho experimentu a jak má vůbec samotný experiment probíhat.

Cílem našeho měření je určit moment setrvačnosti, což je fyzikální veličina udávající míru, s jakou těleso setrvává v otáčivém (rotačním) pohybu. Její velikost závisí na rozložení hmoty tělesa (hmotnosti jednotlivých částí tělesa) vzhledem k ose otáčení – těžší a vzdálenější části tělesa od osy otáčení mají větší moment setrvačnosti.

Pro hmotný bod o hmotnosti m, který se pohybuje po kružnici kolem osy otáčení ve vzdálenosti r, se moment setrvačnosti J spočítá ze vztahu

$$J = mr^2 .$$

V našem experimentu však lyže ani hůlka nevystupují jako hmotný bod, proto pro jejich určení momentu setrvačnosti tento vztah použít nelze.

Mohli bychom si sice představit, že jednotlivé velice malé části zkoumaného tělesa (molekuly a atomy) jsou vlastně hmotné body pohybující se po kruhových drahách kolem osy otáčení, a spočítat výsledný moment setrvačnosti tělesa jakou součet všech těchto dílčích momentů setrvačnosti. Bez potřebné matematické průpravy bychom však nad měřeními (pokud bychom vůbec sehnali natolik přesnou techniku!) a výpočty strávili roky...

Jak tedy moment setrvačnosti změřit? Lze použít několik různorodých metod měření (většina z nich je však pro náš experiment příliš komplikovaná), my na to půjdeme tak trochu trikem. Toto tzv. měření dynamickou metodou je vhodné pro určení momentu setrvačnosti pravidelných homogenních těles, pro náš experiment si jako zkoumané těleso tedy zvolíme lyžařskou hůlku, která se více blíží podstatě homogenního tělesa než lyže.

Podstatou této metody je, že naše těleso (hůlku) necháme kmitat kolem osy, která neprochází jeho těžištěm (sestrojíme tedy fyzikální kyvadlo), a moment setrvačnosti pro pohyb kolem osy otáčení, která prochází těžištěm tělesa, poté dopočítáme.

Měření

Náš experiment provedeme postupně se třemi lyžařskými hůlkami, u nichž změříme jejich parametry – hmotnost m a délku l:

- běžkařská hůlka MARATHON: $l_1 = 134{,}5\,\mathrm{cm}$, $m_1 = 300\,\mathrm{g}$;
- sjezdařská hůlka BIRKI: $l_2 = 105\,\mathrm{cm}$, $m_2 = 260\,\mathrm{g}$;
- sjezdařská hůlka PROSPORT: $l_3 = 104{,}5\,\mathrm{cm}$, $m_3 = 170\,\mathrm{g}$.

Pro účely experimentu je třeba dále určit těžiště hůlek – nejlépe jejich zavěšením na provázek a dosažením rovnovážné polohy posouváním smyčky provázku na jednu či druhou stranu hůlky.

Poté si zvolíme osu otáčení (místo, kde smyčka provázku obepíná hůlku) mimo těžiště hůlky, v našem případě $d = 10\,\mathrm{cm}$ od těžiště směrem k hrotu hůlky. Hůlka zavěšená na provázku v rovnovážné poloze by nyní měla směřovat šikmo ke stropu. Všimněte si, že pokud hůlku lehce vychýlíme směrem blíže k podlaze a pak ji pustíme, začne kmitat kolem své rovnovážné polohy a po čase se v ní zastaví.

Naším úkolem teď bude změřit periodu tohoto kmitání hůlky. Pozor! Experiment provádíme pouze pro malou výchylku hůlky, při větším vychýlení hůlky se totiž perioda kmitu zvětšuje a závisí také na úhlu vychýlení hůlky (což je jednak složitější na výpočet a jednak na přesné změření úhlu výchylky).

Jelikož samotný jeden kmit (přesun tělesa z vychýleného stavu přes rovnovážnou polohu do vychýlení na druhé straně a zpět přes rovnovážnou polohu do původního vychýleného stavu) je vcelku rychlá záležitost a naše měření stopkami by bylo tak zatíženo relativně velkou chybou, je rozumné změřit čas více kmitů a výslednou periodu určit ze vztahu

$$T = \frac{t}{n} ,$$

kde T je perioda jednoho kmitu, t je naměřený čas a n značí počet kmitů tělesa.

Konkrétně při našem experimentu změříme čas t pro $n = 3$ kmity tělesa. S každou hůlkou provedeme pět měření při stejných podmínkách (viz výše).

Naměřené hodnoty můžeme vidět v tabulce 2.

Tabulka 2: Naměřené hodnoty

	Marathon		Birky		Prosport	
	$\frac{t}{\mathrm{s}}$	$\frac{T}{\mathrm{s}}$	$\frac{t}{\mathrm{s}}$	$\frac{T}{\mathrm{s}}$	$\frac{t}{\mathrm{s}}$	$\frac{T}{\mathrm{s}}$
1. pokus	8,6	2,9	6,6	2,2	7,7	2,6
2. pokus	8,8	2,9	6,7	2,2	7,6	2,5
3. pokus	9,0	3,0	7,0	2,3	7,7	2,6
4. pokus	9,0	3,0	7,0	2,3	7,8	2,6
5. pokus	8,8	2,9	6,8	2,3	7,4	2,5
průměr	8,84	2,95	6,82	2,27	7,64	2,55

Výpočet

Pro periodu kmitu T fyzického kyvadla platí vztah

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}\,,$$

kde m je hmotnost tělesa, g je tíhové zrychlení, d vzdálenost osy otáčení od těžiště a J moment setrvačnosti tělesa vzhledem k této ose. Z této rovnice tak pro moment setrvačnosti J platí

$$J = \frac{T^2}{(2\pi)^2}mgd\,.$$

Nyní využijeme již slibovaného triku, kterým je tzv. Steinerova věta. Ta umožňuje vypočítat moment setrvačnosti tělesa rotujícího kolem osy, která neprochází jeho těžištěm a je s osou procházející těžištěm rovnoběžná. Námi hledaný moment setrvačnosti J_0 je určen vztahem

$$J_0 = J - md^2.$$

Poznámka Za povšimnutí stojí, že dle tohoto vztahu je moment setrvačnosti J tím větší, čím je jeho osa otáčení vzdálenější od těžiště a nejmenší moment setrvačnosti J_0 náleží ose otáčení procházející těžištěm.

Obecně tak můžeme moment setrvačnosti J_0 vypočítat ze vztahu

$$J_0 = \frac{T^2}{(2\pi)^2}mgd - md^2\,.$$

Pro námi naměřené hodnoty tak vychází výsledný moment setrvačnosti J_0:
- běžkařská hůlka MARATHON: $J_1 = 0{,}062\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$,
- sjezdařská hůlka BIRKI: $J_2 = 0{,}031\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$,
- sjezdařská hůlka PROSPORT: $J_3 = 0{,}026\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$.

Chyba měření

Výsledný moment setrvačnosti máme, nyní určíme chybu měření. Při měření hmotnosti a délky hůlek (a tudíž i vzdálenosti nové osy otáčení od těžiště) se za absolutní chybu těchto veličin považuje polovina nejmenšího dílku měřidla, s jehož přesností měříme. Vzdálenost nové osy otáčení od těžiště hůlek jsme měřili s přesností na 0,5 cm, absolutní chyba tedy bude $d' = 0{,}25\,\mathrm{cm}$. Hmotnost hůlek jsme určovali s přesností na 5 g, absolutní chyba bude v tomto případě $m' = 2{,}5\,\mathrm{g}$.

Výpočet absolutní chyby měření periody kmitu je složitější, pomocí výpočtu směrodatné odchylky nám z naměřených dat vychází:

$$\begin{aligned} T_1 &= (2{,}95 \pm 0{,}08)\,\mathrm{s}\,, \\ T_2 &= (2{,}27 \pm 0{,}08)\,\mathrm{s}\,, \\ T_3 &= (2{,}55 \pm 0{,}07)\,\mathrm{s}\,, \end{aligned}$$

kde první číslo v závorce představuje průměrně naměřenou periodu kmitu hůlky a druhé číslo pak absolutní chybu měření.

Relativní chybu měření pro jednotlivé parametry vystupující ve výsledné rovnici určíme jako podíl jejich absolutní chyby a průměrně naměřené hodnoty. Vychází nám:

$$\begin{aligned} d'' &= 0{,}02500\,, \\ m_1'' &= 0{,}00833\,, \\ m_2'' &= 0{,}00962\,, \\ m_3'' &= 0{,}01471\,, \\ T_1'' &= 0{,}02712\,, \\ T_2'' &= 0{,}03524\,, \\ T_3'' &= 0{,}02745\,. \end{aligned}$$

Z následujících výpočtů dle teorie chyb (účelem této úlohy není podrobný rozbor postupu určování chyb měření, neuvádíme zde tudíž přesné kroky výpočtů vedoucí k určení výsledné odchylky – více k tomuto tématu (kromě našeho seriálu) např. na webových stránkách[1]) se konečný moment setrvačnosti rovnájí:

$$J_1 = (0{,}062 \pm 0{,}003)\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}\,,\ J_2 = (0{,}031 \pm 0{,}002)\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}\,,\ J_3 = (0{,}026 \pm 0{,}001)\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}\,,$$

kde opět první číslo v závorce představuje moment setrvačnosti a druhé číslo pak absolutní chybu měření této veličiny.

Diskuse

Pro ověření alespoň řádové správnosti hodnoty experimentálně určeného momentu setrvačnosti jednotlivých hůlek si ještě na závěr zkusíme dosadit naměřené hodnoty do rovnice

$$J = \frac{1}{12} m l^2\,,$$

což je vzorec pro výpočet momentu setrvačnosti J tyče délky l a hmotnosti m vzhledem k ose otáčení procházející středem tyče kolmo k její délce. Zde uvažovaná tyč je na rozdíl od skutečné

[1] `http://www.kfy.zcu.cz/prakt/chyby.pdf`

lyžařské hůlky homogenní těleso s těžištěm ve svém středu, a proto nelze tento vztah pro přesné určení momentu setrvačnosti použít.

Pro parametry hůlek nám z této rovnice vychází:

$$J_1^\star = 0{,}045\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}\,,$$
$$J_2^\star = 0{,}024\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}\,,$$
$$J_3^\star = 0{,}015\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}\,.$$

Vidíme, že tyto hodnoty se vcelku výrazně liší od námi naměřených hodnot. Téměř shodný je však poměr hodnot $J_1^\star$ a $J_2^\star$ s poměrem námi naměřených hodnot J_1 a J_2. Potvrdil se také předpoklad vycházející z teorie, že největší moment setrvačnosti při takto zadaných podmínkách měření má hůlka s největší hmotností a délkou, naopak nejmenší moment setrvačnosti má hůlka nejkratší a nejlehčí.

Co se týče chybovosti měření, největší odchylky od správného výsledku jsme se mohli dopustit při měření periody kmitu hůlky, menší pak při určování její hmotnosti či jejího těžiště a vzdálenosti d od něj. Dalšími nepřesnosti v experimentu mohla způsobit např. pružnost provázku či příliš velké vychýlení hůlky z její rovnovážné polohy.

Tomáš Havelka
`havis@fykos.cz`

Úloha IV.C ... Odporný odpor

3 body; průměr 2,17; řešilo 23 studentů

Anička chtěla měřit odpor drátu. Měla k dispozici ampérmetr třídy přesnosti $p = 0{,}5$ *s rozsahem* $100\,\mathrm{mA}$ *a voltmetr s rozsahem* $10\,\mathrm{V}$ *a stejné třídy přesnosti. Naměřila, že drátem prochází proud* $30\,\mathrm{mA}$ *a je na něm napětí* $7\,\mathrm{V}$*. Spočtěte, jaká je chyba měření napětí a proudu. Dále spočtěte odpor drátu a jeho chybu i relativní odchylku.*

Nejprve určíme odchylky Δ_I a Δ_U naměřených veličin. Třída přesnosti je $p = 0{,}5\,\%$. Pro měření proudu Anička použila ampérmetr o rozsahu 100 mA. Z toho dostáváme

$$\Delta_I = 100\,\mathrm{mA}\cdot\frac{0{,}5\,\%}{100\,\%} = 0{,}5\,\mathrm{mA}\,.$$

Naměřený proud zapíšeme jako $I = (30{,}0 \pm 0{,}5)\,\mathrm{mA}$. Na měření napětí si vzala voltmetr s rozsahem $10\,\mathrm{V}$ a stejnou třídou přesnosti $0{,}5\,\%$. Výslednou odchylku spočítáme jako

$$\Delta_U = 10\,\mathrm{V}\cdot\frac{0{,}5\,\%}{100\,\%} = 0{,}05\,\mathrm{V}\,.$$

Výsledné napětí opět zapíšeme jako nepřesné číslo $U = (7{,}00 \pm 0{,}05)\,\mathrm{V}$.

Nyní přejdeme k výpočtu odporu. Použijeme Ohmův zákon

$$R = \frac{U}{I} = \frac{7\,\mathrm{V}}{30\,\mathrm{mA}} \approx 233\,\Omega$$

Pomocí vzorce v tabulce ze seriálového textuvypočítáme relativní odchylku δ_R. Na to ale potřebujeme spočítat relativní chyby napětí a proudu:

$$\delta_I = \frac{0{,}5\,\mathrm{mA}}{30\,\mathrm{mA}} \approx 1{,}7\,\%\,,$$
$$\delta_U = \frac{0{,}05\,\mathrm{V}}{7\,\mathrm{V}} \approx 0{,}7\,\%\,.$$

Použitím čtvrtého řádku oné tabulky dostáváme

$$\delta_R = \delta_I + \delta_U = 1{,}7\,\% + 0{,}7\,\% \approx 2{,}4\,\%$$

Relativní odchylku nakonec přepočítáme na absolutní

$$\Delta_R = \delta_R R \approx 5{,}56\,\Omega\,,$$

nakonec zapíšeme výsledný odpor

$$R = (233{,}33 \pm 5{,}56)\,\Omega\,.$$

Poznámky k došlým řešením

Někteří z vás si všimli, že v textu seriálu byla úmyslná chyba. Správný vzorec na vypočítání absolutní chyby je

$$\Delta = \delta \cdot \text{naměřená hodnota}\,.$$

Petr Pecha
`xlfd@fykos.cz`

Výfučtení: O kráse regrese

Co znamená lineární?

Následující text se vás pokusí nenásilně seznámit s procesem lineární regrese, který je pro zpracování výsledků fyzikálního měření mnohdy velice praktický. Mnoho fyzikálních veličin spolu souvisí přes nějakou konstantu a jejich závislost je lineární. Slovo lineární znamená, že danou závislost lze zapsat jako polynom prvního stupně, tedy

$$y = ax + b\,,$$

kde a a b jsou nějaké pevné konstanty a x je proměnná. Grafem takovéto funkce je přímka, linie, odtud slovo lineární. Konstanta b určuje, kde bude graf funkce protínat osu y (dosadíme-li za $x = 0$, dostaneme $y = b$) a konstanta a zase určuje, jak strmý bude růst veličiny y (graf $y = 3x + 1$ poroste strměji než $y = 2x + 1$). Pokud konstanta b bude nulová, graf funkce bude procházet počátkem, pokud bude nulová konstanta a, závislost $y = 0x + b = b$ je konstantní a už o lineární závislosti nemluvíme.

Příkladem lineárních závislostí v přírodě může být například závislost napětí na rezistoru na proudu, který jim prochází,

$$U = RI\,.$$

Konstanta b je nulová (při nulovém proudu je nulové napětí) a konstanta a je rovna odporu rezistoru $a = R$.

Další lineární závislostí může být třeba závislost objemu vody, která je v nádobě s kolmými stěnami na výšce hladiny v ní. Konstanta úměrnosti a je v tomto případě plocha dna nádoby.

$$V = Sh\,.$$

Co znamená regrese?

Regrese pochází z latinského slova *regredi*, což znamená navracet se, ustupovat. Do statistiky toto slovo zavedl Francis Galton a označil tím „návrat k průměru“, fakt, že vysocí otcové mívají často syny menší, než jsou oni sami a synové malých otců bývají zase často vyšší, než jsou oni sami. Pojem se rozšířil na jakékoliv zkoumání závislostí náhodných veličin.

My budeme pojmem „lineární regrese“ označovat prokládání přímky naměřenými daty tak, aby přímka co nejlépe vystihovala jejich závislost. Body reprezentující jednotlivá měření přitom nemusí na přímce úplně ležet, ale rádi bychom, aby jim přímka odpovídala co nejvíce.

Elektrický příklad

Lineární regrese se například využije v případě měření odporu drátu. Do měření mohou vstoupit nejrůznější chyby. Ručička přístrojů se například může na určitých místech stupnice trochu zadrhávat, zdroj napětí může při určitých napětích více kolísat než při jiných. Abychom minimalizovali vliv těchto chyb, nebudeme měřit proud a napětí na drátu pouze jednou, ale několikrát a to při různých hodnotách. Výsledky měření naleznete v tabulce 3.

Tabulka 3: Závislost napětí na proudu

I/A	1	2	3	4	5	6	7
U/V	2,1	3,9	5,7	8,2	10,2	11,9	13,8

Nyní bychom chtěli data proložit lineární funkcí $f(I) = a \cdot I + b$ tak, aby byla hodnota $f(I)$ vždy naměřeným hodnotám co nejblíže. Toto prokládání se děje metodou nejmenších čtverců. To znamená, že vyzkoušíme spoustu různých lineárních funkcí $f(I)$ a pak pro každý naměřený proud spočítáme „čtverec“ c, což je druhá mocnina rozdílu naměřeného napětí U při proudu I a hodnoty lineární funkce v bodě $I - f(I)$. Zapsáno vzorcem

$$c(I) = \big(U(I) - f(I)\big)^2 .$$

Všechny tyto čtverce pro všech sedm naměřených hodnot bychom sečetli a pak bychom je mezi sebou porovnali pro různé zkoušené lineární funkce. U té funkce $f(I)$, kde by byl součet čtverců nejmenší, je jasné, že naměřeným hodnotám vyhovuje nejlépe. Takto bychom třeba zjistili, že $f_1(I) = 2 \cdot I + 0$ je lepší než $f_2(I) = 3 \cdot I + 1$. Protože pro funkci f_1 je součet čtverců 0,24 a pro funkci f_2 je tento součet 206,04.

Je f_1 nejlepší? Co třeba $f_3(I) = 1{,}9 \cdot I + 0$? Nebo $f_2(I) = 1{,}09 \cdot I + 0{,}1$? Lineárních funkcí je nekonečně mnoho (za a a b si můžeme zvolit jakákoli čísla). Proto je celé toto počítání metody nejmenších čtverců vhodné svěřit počítači. Ten sice nevyzkouší všechny lineární funkce, ale jistě jich i pro velké počty naměřených dat zvládne víc než vy. Funkce lineární regrese má zabudované například tabulkový procesor, nebo můžete použít program na kreslení grafů *gnuplot*, jako jsme to udělali my. Program gnuplot určil, že nejlepší lineární funkce (viz obrázek 4), jaká sedí na naše data je

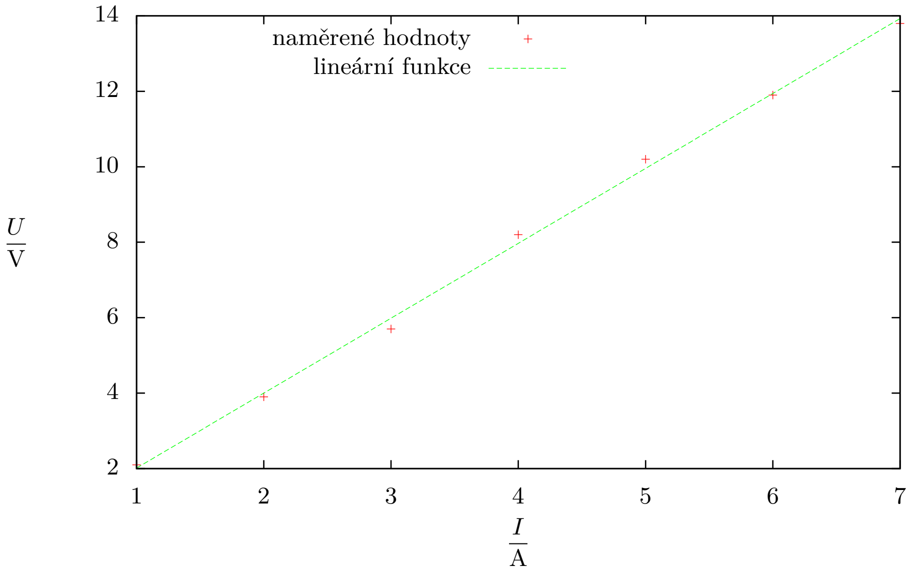
$$f(I) = 1{,}99 \cdot I + 0{,}1 .$$

Dokonce zvládne vypočítat, jak přesné je určení koeficientů a, b:

$$a = 1{,}99 \pm 0{,}04\,,$$
$$b = 0{,}1 \pm 0{,}1\,.$$

Konstanta a pak hraje roli námi hledaného odporu a proto můžeme zpracování slavnostně zakončit

$$a = 1{,}99 \pm 0{,}04\,\Omega\,.$$



Obr. 4: Data proložená přímkou dle lineární regrese

Co když závislost není lineární?

Metodu nejmenších čtverců můžeme samozřejmě použít i na jiné funkce, než lineární. Nejdříve musíme odhadnout, jak by závislost mohla vypadat. Můžeme zkoušet například různé polynomy, tam už budeme potřebovat více parametrů, například u polynomu třetího stupně budeme hledat čtyři konstanty

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\,.$$

Idea je stejná, vyzkoušet různé funkce a porovnat součty čtverců pro všechna naměřená data. Obecně je to ale výpočetně náročnější a ne vždy se to povede. Pokud bude totiž chyba určení parametrů $a, b, c, \ldots$ stejně velká nebo dokonce větší než parametry samy, nemá takový výsledek valného významu a program, který použijeme, může zahlásit, že se mu vhodné parametry nepodařilo nalézt. Potom je třeba použít jiný typ funkce.

Pořadí řešitelů po IV. sérii

V listinách osmých a devátých ročníků jsou vynecháni řešitelé s nejnižším počtem bodů, co neřešili IV. sérii. Úplné listiny jsou na webu.

Kategorie osmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	E	C	IV	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	2	3	5	6	7	3	**26**	*94*	
1.	*Martin Štyks*	G Lovosice	2	3	5	3	6	3	**22**	*86*	
2.	*Matěj Mezera*	ZŠ Havlíčkův Brod, Nuselská	2	3	5	6	4	3	**23**	*82*	
3.	*Klára Ševčíková*	G Uherské Hradiště	2	3	2	5	4	3	**19**	*76*	
4.	*Jaroslav Janoš*	G Zlín, Lesní čtvrť	2	3	3	5	4	3	**20**	*73*	
5.	*Jáchym Bártík*	G Havlíčkův Brod	2	3	3	3	2	3	**16**	*68*	
6.	*Simona Gabrielová*	G České Budějovice, Jírovcova	2	1	1	3	2	4	**13**	*55*	
7.	*Jaromír Mielec*	G Ostrava-Zábřeh	1	3	2	4	–	2	**12**	*54*	
7.	*Lucie Hronová*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	2	3	4	5	1	1	**16**	*54*	
9.	*Roman Chasák*	ZŠ a MŠ J. Schrotha, Lipová-lázně	0	2	3	3	2	4	**14**	*42*	
10.	*David Žáček*	G Ch. Dopplera Praha	–	3	2	4	–	–	**9**	*36*	
11.	*Matěj Štula*	GSOŠPg Liberec	–	–	–	–	–	–	**0**	*32*	
12.	*Tomáš Macek*	Jiráskovo G Náchod	–	–	–	–	–	–	**0**	*29*	
13.	*Vjačeslav Horbač*	G Liberec, Jeronýmová	–	–	–	–	–	–	**0**	*28*	
14.	*Aleksej Gaj*	G Ch. Dopplera Praha	0	0	2	–	–	2	**4**	*24*	
14.	*Jan Holásek*	G Ústí nad Orlicí	–	–	–	–	–	–	**0**	*24*	
14.	*Zuzana Matůšová*	CZŠ Veselí nad Moravou	0	2	0	1	2	2	**7**	*24*	
17.	*Dinh Huy Nhat Minh*	G Kadaň	–	–	–	–	–	–	**0**	*22*	
18.	*Sebastian Duarte*	G Ch. Dopplera Praha	2	0	3	–	–	–	**5**	*21*	
19.	*Martin Griner*	G Ch. Dopplera Praha	–	2	2	–	–	–	**4**	*19*	
20.	*Vojtěch Dědek*	G Ch. Dopplera Praha	0	3	2	–	–	–	**5**	*18*	
21.	*Kačka Feslová*	G Ch. Dopplera Praha	–	2	2	–	–	0	**4**	*17*	
21.	*Miloš Müller*	ZŠ Jesenice	0	0	2	–	–	–	**2**	*17*	
21.	*Tomáš Volejník*	G Ch. Dopplera Praha	–	1	–	–	–	–	**1**	*17*	
24.	*Jakub Matějka*	G Ch. Dopplera Praha	0	3	–	–	–	–	**3**	*16*	
25.	*Klára Slováčková*	G Ch. Dopplera Praha	–	2	–	–	–	–	**2**	*15*	
25.	*Markéta Holubová*	G Ch. Dopplera Praha	–	1	2	–	–	0	**3**	*15*	
27.	*Sebastian Janda*	G Ch. Dopplera Praha	–	1	2	–	–	–	**3**	*14*	
27.	*Tereza Čechová*	G Ch. Dopplera Praha	–	1	2	–	–	0	**3**	*14*	
29.	*Tamara Maňáková*	G Šumperk	–	–	–	–	–	–	**0**	*13*	
30.	*Martina Fusková*	G Uherské Hradiště	–	–	–	–	–	–	**0**	*12*	
30.	*Matěj Coufal*	G Havlíčkův Brod	0	–	–	–	–	–	**0**	*12*	
32.	*Jonáš Uřičář*	CZŠ Veselí nad Moravou	–	1	–	–	–	2	**3**	*11*	
33.	*Kateřina Zemková*	GOB Telč	0	–	–	2	–	–	**2**	*10*	
34.	*František Couf*	G Ch. Dopplera Praha	2	–	–	1	0	–	**3**	*9*	
34.	*Jan Ondruš*	Gymnázium Ostrov	–	–	–	–	–	–	**0**	*9*	
34.	*Ondřej Altman*	G Ch. Dopplera Praha	–	3	–	–	–	–	**3**	*9*	
37.	*Jan Kašník*	Gymnázium Cheb	–	–	–	–	–	–	**0**	*8*	
38.	*Miky Hosnedl*	G Ch. Dopplera Praha	0	0	1	–	–	–	**1**	*7*	
43.	*Michal Kocourek*	G Ch. Dopplera Praha	2	–	1	0	–	–	**3**	*3*	

Kategorie šestých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	E	C	IV	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	2	3	5	6	7	3	**26**	*94*	
1.	*Olga Krumlová*		–	–	–	–	–	–	**0**	*3*	

Kategorie sedmých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**E**	**C**	**IV**	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	2	3	5	6	7	3	**26**	*94*	
1.	*Jan Preiss*	G Lovosice	0	2	4	2	–	3	**11**	*34*	
2.	*Pham The Huynh Duc*	G Šumperk	–	–	–	–	–	–	**0**	*13*	
3.	*Martin Orság*	G Vyškov	1	–	–	3	–	–	**4**	*12*	
4.	*Jan Macháček*	G Holešov	–	2	1	–	–	–	**3**	*11*	
5.	*Mikuláš Plešák*	G Jablonec nad Nisou	–	–	–	–	–	–	**0**	*10*	
6.	*Adéla Hanková*	G Lovosice	–	–	–	–	–	–	**0**	*2*	

Kategorie devátých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**E**	**C**	**IV**	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	2	3	5	6	7	3	**26**	*94*	
1.	*Matěj Hrabal*	G Uherské Hradiště	2	3	4	5	5	3	**22**	*74*	
2.	*Klára Stefanová*	G B. Němcové Hradec Králové	2	3	5	5	5	2	**22**	*73*	
3.	*Zdeněk Nekula*	ZŠ Prosiměřice	1	3	2	2	–	2	**10**	*63*	
4.	*Josef Kolář*	ZŠ Litovel, Vítězná	–	–	–	–	–	–	**0**	*48*	
5.	*Filip Šmejkal*	G Uherské Hradiště	0	2	1	3	2	3	**11**	*38*	
6.	*Marek Janka*	Slovanské G Olomouc	–	–	–	–	–	–	**0**	*37*	
7.	*Gabriela Šmejkalová*	G Uherské Hradiště	0	1	0	3	2	3	**9**	*36*	
8.	*Daniel Pišťák*	G Ch. Dopplera Praha	–	–	–	–	–	–	**0**	*26*	
9.	*Tomáš Vymazal*	RG a ZŠ Prostějov	0	0	0	3	1	1	**5**	*24*	
10.	*Zuzana Viceníková*	G Uherské Hradiště	0	1	–	1	–	–	**2**	*22*	
11.	*Anna Kovářiková*	RG a ZŠ Prostějov	–	–	–	–	–	–	**0**	*21*	
12.	*Jan Hladík*	G Ch. Dopplera Praha	–	–	–	–	–	–	**0**	*20*	
13.	*Martin Rajdl*	G Ch. Dopplera Praha	–	–	–	–	–	–	**0**	*19*	
13.	*Vojtěch Hýbl*	G8 Mladá Boleslav	–	–	–	–	–	–	**0**	*19*	
15.	*Marek Otýpka*	G Židlochovice	–	–	1	–	–	–	**1**	*16*	

FYKOS – Výfuk
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://vyfuk.fykos.cz`
e-mail pro řešení: `vyfuk-reseni@fykos.cz`
e-mail: `vyfuk@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.