VÝFUK

VÝpočty Fyzikálních ÚKolů – kores. sem. MFF UK pro ZŠ **ročník 1±1** **číslo 4/7**

Úvodem

Milé řešitelky a milí řešitelé,

dorazila k vám v tomto školním roce čtvrtá (tedy prostřední) brožurka korespodenčního semináře Výfuk a v ní dalších šest úloh nažhavených k vyřešení.

V první z nich si ověříte, jak eskalátory šetří námahu. Druhá vás uvede do bezpečnosti horských drah. V minulé sérii jsme se dopustili vskutku trestuhodné chyby ve studijním textu o goniometrických funkcích, vaším úkolem bude ji za nás napravit (k čemuž vám může dopomoci vzorové řešení úlohy III.S) ve třetí úloze. Čtvrtá úloha se vrací k nedávným událostem v totalitní KLDR. A poněvadž narozdíl od vzdálené Koreje nám v Čechách a na Moravě příliš mnoho sněhu zatím zima nenadělila, vymysleli jsme pro vás alternativní využití lyžařského náčiní v experimentální úloze.

Při vypracování experimentu vám může být nápomocen i studijní text o chybách měření, jsa vybaven jako vždy úlohou k procvičení dané látky.

Určitě vás může zajímat, že pomalu, ale jistě začínáme připravovat letní soustředění (tábor, chcete-li), kam hodláme pozvat přibližně 30 nejlepších řešitelů (s přihlédnutím k umístění v rámci školního ročníku). S největší pravděpodobností se bude soustředění konat **na začátku července**.

Máte před sebou ještě tři série, tak se snažte, ať se na soustředění dostanete — rozhodně nebudete litovat.

Dále prosíme ty, kteří nám posílají řešení elektronickou cestou, aby posílali řešení ve vhodném formátu, nejlépe v PDF. To, že je formát nevhodný, poznáte tak, že námi vytištěná řešení nevypadají podle vašich představ. A ti, již posíláte naskenované rukopisy, dbejte na dostatečný kontrast.

A nakonec, pokud si to příroda rozmyslí, přejeme všem lyžařům pěknou lyžovačku, sáňkařům sáňkovačku, bobystům bobovačku a těm, kteří se příliš rychlého pohybu bojí, krásné procházky zimní krajinou.

Organizátoři

Zadání IV. série

Termín doručení: 7. března 2012

Úloha IV.1 ... Schody z Chrudimi 2 body

Eskalátory v metru na Náměstí Míru mají n schodů a pohybují se rychlostí v. Spočtěte, kolik schodů ve skutečnosti vyšlapete, pokud po nich jdete rychlostí v_1: a) po směru jízdy, b) proti směru jízdy. Při pohybu proti směru uvažujte, že $v_1 > v$.

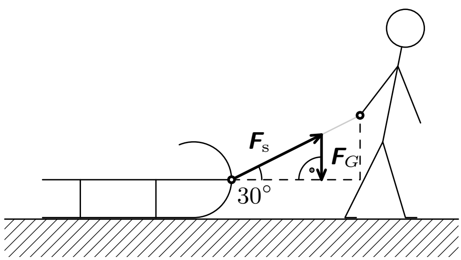
Úloha IV.2 ... Horská dráha 3 body

Představ si, že jedeš na horské dráze, která má kruhový tvar a zapomněl jsi se připoutat. V nejvyšším bodě tedy budeš hlavou dolů. Je možné, abys nevypadl? Co musí horská dráha splňovat?

Úloha IV.3 ... I mistr tesař se utne 5 bodů

V textu o goniometrických funkcích v minulé sérii jsme se dopustili jednoho z nejhorších omylů, které v učební literatuře mohou nastat – ilustrující příklad je zde vyřešen úplně špatně, takže namísto objasnění látky ji naopak zatemňuje. Připomeňme, že zadání úlohy znělo:

> *Malý Schlitt za sebou táhne stále stejně rychle na provázku dřevěné sáňky o hmotnosti* 5 kg. *Úhel, který svírá provázek s podlahou je $\alpha = 30°$ (obrázek 1). Jakou silou F_s musí Schlitt sáně táhnout?*



Obr. 1: Schlitt táhne sáně

A v textu uvedené „řešení“ znělo takto:

> Vycházíme z toho, že při rovnoměrném přímočarém pohybu jsou síly v rovnováze. Spočítáme si gravitační sílu, která působí na sáně $F_G = mg = 50\,\mathrm{N}$. Víme, že platí $\sin\alpha = F_G/F_s$. Vyjádříme si a dosadíme
>
> $$F_s = \frac{F_G}{\sin\alpha} = \frac{50\,\mathrm{N}}{\frac{1}{2}} = 100\,\mathrm{N}\,.$$
>
> Schlitt musí sáně táhnout silou 100 N.

Proč je uvedené řešení špatně? Která veličina v zadání chybí, abychom úlohu mohli správně vyřešit? Jaké je tedy správné řešení?

Úloha IV.4 ... Politicky kontroverzní vánice 6 bodů

Na pohřbu Kim Čong-ila napadlo za jednu hodinu $h = 10\,\mathrm{cm}$ sněhu. Kolik kilogramů sněhu bylo v jednom m^3 vzduchu během sněžení? A kolik to je přibližně vloček? Představme si, že sněhové vločky jsou neprůhledné bílé kuličky. Na jakou vzdálenost byli truchlící Korejci schopni vidět Kimovu rakev? (Řekněme, že vločky nesmí zastínit více než 95 % rakve, aby ještě byla vidět.) Jak se změní tato vzdálenost, pokud by bylo $h = 5\,\mathrm{cm}$?

Úloha IV.E ... Lyžování na blátě 7 bodů

Je možné, že v našich končinách bude letos lyžařské náčiní vcelku nepoužitelné. Abyste si s ním užili alespoň trochu zábavy, změřte moment setrvačnosti (při otáčení kolem osy procházející těžištěm a kolmé na skluznici nebo hůlku) lyže nebo lyžařské hůlky. Nezapomeňte v řešení uvést parametry vámi měřené výstroje (druh, velikost, hmotnost...).

Úloha IV.C ... Odporný odpor 3 body

Anička chtěla měřit odpor drátu. Měla k dispozici ampérmetr třídy přesnosti $p = 0{,}5$ s rozsahem $100\,\mathrm{mA}$ a voltmetr s rozsahem $10\,\mathrm{V}$ a stejné třídy přesnosti. Naměřila, že drátem prochází proud $30\,\mathrm{mA}$ a je na něm napětí $7\,\mathrm{V}$. Spočtěte, jaká je chyba měření napětí a proudu. Dále spočtěte odpor drátu a jeho chybu i relativní odchylku.

Řešení III. série

Úloha III.1 ... Průjem 2 body; průměr 1,10; řešilo 41 studentů

Všichni víme, jak vypadá rulička toaletního papíru. Vnitřní průměr ruličky je $r = 48\,\mathrm{mm}$ a vnější $R = 100\,\mathrm{mm}$, délka útržku $d = 10\,\mathrm{cm}$ a počet útržků $n = 200$. Jak je toaletní papír tlustý?

Mára si vzpomněl na své zažívací potíže.

Při pohledu na ruličku toaletního papíru seshora uvidíme dvě soustředné kružnice, vnitřní o průměru $r = 48\,\mathrm{mm}$, vnější o průměru $R = 100\,\mathrm{mm}$. Mezikruží mezi nimi je pak vyplněno smotaným papírem. Pokud papír rozmotáme a narovnáme, bude ze stejného pohledu vypadat jako velmi dlouhý obdélník, jehož jedna strana bude mít rozměr délky toaletního papíru D a druhá jeho tloušťky t. Obsahy obou dvou popsaných útvarů se musí rovnat.

Z počtu útržků n a délky jednoho útržku d určíme délku celého toaletního papíru

$$D = nd\,.$$

Obsah mezikruží vypočítáme jednoduše tak, že od obsahu vnější kružnice odečteme obsah kružnice vnitřní. Obsah obdélníku pak získáme vynásobením délek jeho stran. Ve vztahu pro obsah kružnice se používá poloměr kružnice, musíme tedy zadaný průměr dělit dvěma.

$$\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 = Dt$$

$$\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 = ndt$$

Tloušťka toaletního papíru t pak bude

$$t = \frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{r}{2}\right)^2}{nd}\,.$$

Před dosazením konkrétních hodnot nesmíme zapomenout převést všechny veličiny na stejné jednotky. Délku útržku $d = 10\,\mathrm{cm}$ tedy převedeme na $d = 100\,\mathrm{mm}$. Teď již můžeme do vztahu dosadit a vypočítat tak tloušťku toaletního papíru.

$$t = \frac{\pi\left(\frac{100\,\mathrm{mm}}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{48\,\mathrm{mm}}{2}\right)^2}{200\cdot 100\,\mathrm{mm}}$$

$$t = 0{,}3\,\mathrm{mm}$$

Tloušťka toaletního papíru je 0,3 mm.

Tereza Mašková
tereza@fykos.cz

Úloha III.2 ... Topení na Sibiři

4 body; průměr 1,67; řešilo 27 studentů

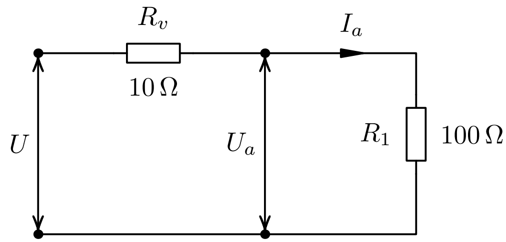
Polárníci na daleké sibiřské stanici se rozhodli, že si přitopí. Ve skladu objevili dva elektrické přímotopy, z nichž jeden má elektrický odpor $R_1 = 1000\,\Omega$ a druhý má elektrický odpor $R_2 = 100\,\Omega$. Dieselový agregát, který bude dodávat energii pro topení, je umístěn vně stanice. Přívodní kabely od agregátu ke stanici mají odpor $R_v = 10\,\Omega$. Jak mají polárnicí postupovat, aby se ve stanici co nejvíce zahřáli? ®*adim mrznul.*

Polárníci mohou topení zapojit jenom čtyřmi způsoby:

a) zapojit přímotop o odporu 100 Ω

b) zapojit přímotop o odporu 1 kΩ
c) zapojit oba přímotopy sériově
d) zapojit oba přímotopy paralelně
To, co je bude zajímat, je elektrický příkon na topném tělesu v přímotopu. Ve všech případech předpokládáme, že dieselagregát dodává stálé napětí U.

Zapojení prvního přímotopu



Obr. 2: Zapojení prvního přímotopu

Nejprve spočítáme celkový elektrický odpor

$$R_\mathrm{a} = R_v + R_1 = 10\,\Omega + 100\,\Omega = 110\,\Omega\,.$$

Obvodem prochází proud

$$I_\mathrm{a} = \frac{U}{R_\mathrm{a}} = \frac{U}{110\,\Omega}\,.$$

Nyní musíme spočítat napětí na přímotopu

$$U_\mathrm{a} = I_\mathrm{a} R_1 = \frac{U}{110\,\Omega} \cdot 100\,\Omega = \frac{100}{110} U\,.$$

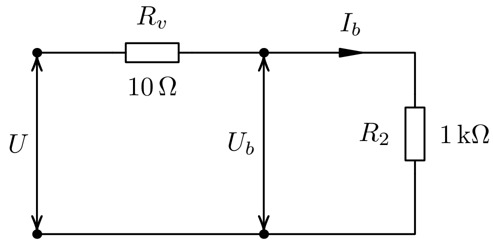
Protože známe celkový proud I_a i celkové napětí U_a na spotřebičích uvnitř domu, můžeme vypočítat celkový výkon P_a.

$$P_\mathrm{a} = U_\mathrm{a} I_\mathrm{a} = \frac{100}{110} U \cdot \frac{U}{110\,\Omega} = \frac{U^2}{121\,\Omega} = \left(\frac{U}{\mathrm{V}}\right)^2 \cdot 8{,}26 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{W}$$

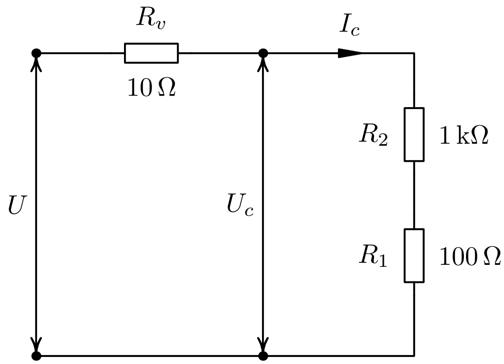
Zapojení druhého přímotopu

Pokud zapojíme jenom druhý přímotop, tak postupujeme úplně stejně.

$$R_\mathrm{b} = R_v + R_2 = 10\,\Omega + 1000\,\Omega = 1010\,\Omega$$
$$I_\mathrm{b} = \frac{U}{R_\mathrm{b}} = \frac{U}{1010\,\Omega}$$
$$U_\mathrm{b} = I_\mathrm{b} R_2 = \frac{U}{1010\,\Omega} \cdot 1000\,\Omega = \frac{100}{101} U$$
$$P_\mathrm{b} = U_\mathrm{b} I_\mathrm{b} = \frac{100}{101} U \cdot \frac{U}{1010\,\Omega} = \frac{10 \cdot U^2}{10201\,\Omega} = \left(\frac{U}{\mathrm{V}}\right)^2 \cdot 9{,}80 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{W}$$



Obr. 3: Zapojení druhého přímotopu



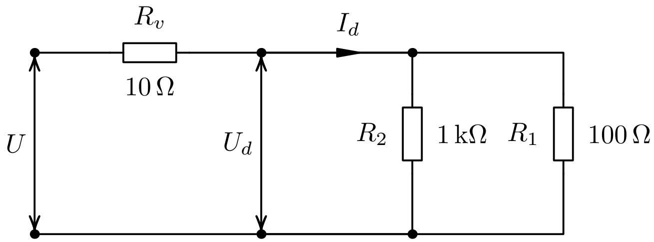
Obr. 4: Sériové zapojení přímotopů

Sériové zapojení

Pro sériové zapojení výpočet trochu upravíme. Nebude nás zajímat příkon na jednotlivých přímotopech, ale stačí nám vypočítat celkový výkon na obou dohromady.

Nejprve si spočteme odpor $R_{12\mathrm{s}}$ a dále budeme postupovat stejně.

$$
\begin{aligned}
R_{12\mathrm{s}} &= R_1 + R_2 = 100\,\Omega + 1000\,\Omega = 1100\,\Omega \\
R_\mathrm{c} &= R_v + R_{12\mathrm{s}} = 10\,\Omega + 1100\,\Omega = 1110\,\Omega \\
I_\mathrm{c} &= \frac{U}{R_\mathrm{c}} = \frac{U}{1110\,\Omega} \\
U_\mathrm{c} &= I_\mathrm{c} R_{12\mathrm{s}} = \frac{U}{1110\,\Omega} \cdot 1100\,\Omega = \frac{110}{111} U \\
P_\mathrm{c} &= U_\mathrm{c} I_\mathrm{c} = \frac{110}{111} U \cdot \frac{U}{1110\,\Omega} = \frac{11 \cdot U^2}{12321\,\Omega} = \left(\frac{U}{\mathrm{V}}\right)^2 \cdot 8{,}93 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{W}
\end{aligned}
$$



Obr. 5: Paralelní zapojení přímotopů

Paralelní zapojení

Pro paralelní zapojení vypočítáme celkový odpor R_{12p} odporů R_1 a R_2. Dále ze stejného důvodu jako v sériovém zapojení můžeme pokračovat úplně stejně.

$$R_{12p} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{100\,\Omega \cdot 1000\,\Omega}{100\,\Omega + 1000\,\Omega} = \frac{1000}{11}\Omega$$
$$R_\mathrm{d} = R_v + R_{12\mathrm{s}} = 10\,\Omega + \frac{1100}{11}\Omega = \frac{1110}{11}\Omega$$
$$I_\mathrm{d} = \frac{U}{R_\mathrm{d}} = \frac{U}{\frac{1110}{11}\Omega} = \frac{11 \cdot U}{1110\,\Omega}$$
$$U_\mathrm{d} = I_\mathrm{d} R_{12\mathrm{s}} = \frac{11 \cdot U}{1110\,\Omega} \cdot \frac{1000}{11}\Omega = \frac{100}{111}U$$
$$P_\mathrm{d} = U_\mathrm{d} I_\mathrm{d} = \frac{100}{111}U \cdot \frac{11 \cdot U}{1110\,\Omega} = \frac{110 \cdot U^2}{12321\,\Omega} = \left(\frac{U}{\mathrm{V}}\right)^2 \cdot 8{,}93 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{W}$$

Rozborem jsme zjistili, že nejvíc se ohřejí, zapojí-li oba přímotopy paralelně. Podotkněme, že tento výsledek neplyne automaticky z toho, že v paralelním zapojení má obvod nejmenší odpor. Se snižováním odporu přímotopů bude totiž klesat napětí na přímotopech a vzrůstat napětí na vodičích mezi stanicí a agregátem (součet napětí na vodičích a přímotopu je dle předpokladu pořád stejný – U). Výše uvedené výsledky lze snadno zobecnit (můžete si provést za cvičení): Bude-li celkový odpor části obvodu ve stanici R_R a odpor vodičů mezi agregátem a stanicí jako výše R_v, příkon části obvodu ve stanici bude

$$P_\mathrm{R} = \frac{U^2 R_\mathrm{R}}{(R_\mathrm{v} + R_\mathrm{R})^2}.$$

Můžete si ověřit, že kdyby v naší úloze byl odpor přívodních vodičů třeba $2\,\mathrm{k}\Omega$ namísto $10\,\Omega$ (což by se, pravda, přívodním kabelům stávat nemělo), nejvýhodnější zapojení přímotopů by bylo sériové (a většina agregátem dodávaného příkonu by se protopila venku v přívodních vodičích).

Petr Pecha
`xlfd@fykos.cz`

Úloha III.3 ... Wattův regulátor

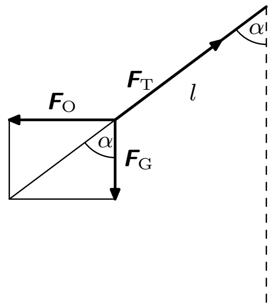
4 body; průměr 2,00; řešilo 28 studentů

Mějme dvě těžké kuličky. Každá z nich je připojena tyčkou do kloubu (z opačných stran). Obě koule se mohou vychylovat pouze v jedné svislé rovině. Celou soustavou začneme otáčet okolo *svislé osy procházející kloubkem. Jak závisí odchylka tyček na úhlové rychlosti?*

Regulovčík Lukáš.

Úlohu nejsnáze vyřešíme v neinerciální vztažné soustavě rotující společně s regulátorem. Na kuličku celkem působí tři síly – tíhová $\boldsymbol{F}_{\mathrm{G}}$, odstředivá $\boldsymbol{F}_{\mathrm{O}}$ a reakce tyčky $\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}$. Pokusme se najít podmínku, kdy budou síly vyrovnané (obrázek 6). Z jednoduché trigonometrie máme

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{|\boldsymbol{F}_{\mathrm{O}}|}{|\boldsymbol{F}_{\mathrm{G}}|} = \frac{\omega^2 l \sin\alpha}{g}\,,$$



Obr. 6

kde g je tíhové zrychlení a l délka tyčky od kloubu ke kuličce.

Nyní už je vidět první řešení $\sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$, označme jej „povislé“. Dále uvažujeme jen $\sin\alpha \neq 0$ a můžeme jím tedy dělit. Úpravou rovnice získáme vztah pro α.

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\omega^2 l}{g} \quad\Rightarrow\quad \alpha = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 l}\right) \tag{1}$$

Nezapomeňme, že poslední úpravu můžeme udělat jen s předpokladem

$$\omega^2 l \geq g \tag{2}$$

kvůli definičnímu oboru funkce arccos.

Jak výsledky fyzikálně interpretovat? Povislé řešení je za obvyklých okolností (2) labilní a stabilní výchylka kuliček závisí na rychlosti ω podle (1). Pokud však (2) neplatí, výchylka kuliček pak na rychlosti ω nezávisí ($\alpha = 0$) a regulátor nefunguje.

Michal Koutný
`michal@fykos.cz`

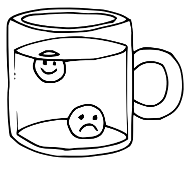
Úloha III.4 ... Lžička v oleji

4 body; průměr 1,50; řešilo 26 studentů

Při vaření večeře spadla do sklenice s olejem lžička. Zvídavý matfyzák se rozhodl, že lžičku nebude lovit, ale nechá ji vyplavat. Jak to udělá? Začne sklenici zahřívat a čeká, než se dosáhne takové teploty, až se hustoty vyrovnají a lžíce následně vyplave. Může se mu to podařit?

Olej má hustotu ϱ_1 a tepelnou roztažnost α_1. Lžička je vyrobena z kovu, který má hustotu ϱ_2 a tepelnou roztažnost α_2. Za jakých podmínek se tento pokus nezdaří?

Ⓡ*adim testoval své kulinářské dovednosti.*



Na lžíci v oleji působí dvě síly, vztlaková síla $F_v = V\varrho_1 g$, kde V je objem ponořeného tělesa a ϱ_1 je hustota oleje a v opačném směru působí tíhová síla $F_g = mg = V\varrho_2 g$, kde m je hmotnost ponořeného tělesa, kterou můžeme vyjádřit pomocí jeho objemu a hustoty. Odtud vidíme, že lžíce vyplave v případě, že hustota oleje ϱ_1 bude větší než hustota lžíce ϱ_2.

Při zahřívání se bude v důsledku teplotní roztažnosti měnit objem lžičky, ale také objem oleje a tedy jejich hustoty. Jelikož lžička a olej mají různé tepelné roztažnosti α, mohl by se pokus zdařit, pokud by tepelná roztažnost lžičky α_2 byla větší než tepelná roztažnost oleje α_1. Pokud bude naopak menší, bylo by třeba sklenici chladit.

Hustotu tělesa po změně teploty o ΔT si můžeme vyjádřit přibližně jako

$$\varrho \approx \varrho_0(1 - \alpha\Delta T)\,,$$

kde ϱ_0 je hustota tělesa při původní teplotě. Toto platí při pokojové teplotě, závislost pro vysoké teploty neznáme. Budeme však předpokládat, že tento vztah platí dostatečně přesně do 300 °C. To je bod varu oleje a pokud lžička nevyplave do té doby, tak potom už se olej vyvaří.

Spočítáme si rozdíl teplot, pro který se hustoty vyrovnají. Uvažujeme hodnoty: hustota oleje $\varrho_1 = 900\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, teplotní roztažnost oleje $\alpha_1 = 0{,}75 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{^\circ C^{-1}}$, hustota železa $\varrho_2 = 7870\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ (předpokládáme, že matfyzák bude mít lžičku z nerezu, což se nebude příliš lišit od železa), teplotní roztažnost železa $\alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K^{-1}}$. Jelikož je teplotní roztažnost železa α_2 menší než teplotní roztažnost oleje α_1 při zahřívání lžička nemůže vyplavat. Matfyzák by sklenici musel ochlazovat.

Z těchto hodnot tedy vypočítáme potřebný teplotní rozdíl:

$$\varrho_1(1 - \alpha_1\Delta T) = \varrho_2(1 - \alpha_2\Delta T)$$
$$\Delta T = \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{\varrho_2\alpha_2 - \varrho_1\alpha_1}$$
$$\Delta T = 12000\,^\circ\mathrm{C}$$

Vypočítaný rozdíl teplot ΔT je rozdíl pokojové teploty a teploty, na kterou by matfyzák musel sklenici ochladit. Takže je jasně vidět, že pokus se mu nezdaří, ani zahříváním ani případným ochlazováním sklenice.

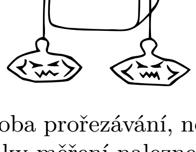
Alžběta Nečadová
bjetka@fykos.cz

Úloha III.E ... Krájení vody

6 bodů; průměr 2,53; řešilo 30 studentů

Vezměte kostku ledu a kus drátu. Pokud začnete drátem prořezávat led (zatížíte závažím konce drátu), zjistíte, že se vám drát prořeže kostkou ledu, aniž by se kostka roztopila.

Na čem všem závisí doba prořezávání drátu? Zkuste proměřit nejrůznější parametry (tloušťka ledu, průměr drátu, závaží, kterým jste zatížili konce drátu)...



Prozkoumat, na čem všem závisí doba prořezávání, není snadné. Proto společnými silami se pokusíme něčeho dobrat. Došlé výsledky měření naleznete v tabulce 1.

Nejdříve se zamyslíme nad tím, jak závisí doba prořezání drátu na tloušťce ledu. Vezmeme několik kostek (kvádrů) s různou tloušťkou a budeme měřit dobu prořezání při zachování všech ostatních parametrů. Z výsledků zapsaných v tabulce je jasné, že se zvyšující se tloušťkou ledu se doba zvyšuje.

Další parametr, který budeme zkoumat je hmotnost závaží. Budeme postupovat obdobně jako v předcházejícím případě. Pokud se podíváme na výsledky v tabulce 1, tak snadno uvidíme, že doba prořezání je nepřímo úměrná hmotnosti závaží.

Velmi často diskutovaný parametr ve vašich řešeních byla tloušťka drátu či lanka. Ta se ukázala trochu zrádná, neboť tenká lanka se mnohdy trhala a tlustá lanka zase vyžadovala těžká závaží, nebo dlouhou dobu měření. Přesto můžeme říci, že čím tlustší lanko, tím déle se led prořezával.

Poměrně problematickým parametrem, nad kterým se mnoho z vás nezamyslelo, byla okolní teplota. Neboť při vyšší teplotě led začne tát a prořeže se rychleji, kdežto při nižší teplotě některým drát během prořezávání zamrzl v ledu. Jak ale asi tušíte, tak měřit dobu průřezu v závislosti na okolní teplotě je náročnější.

Několik experimentátorů si také všimlo, že doba prořezávání ledu závisí na materiálu, ze kterého bylo lanko vyrobeno. *Sourozenci Šmejkalovi* například dostávali různé doby prořezání při použití železného či měděného lanka. *Josefu Koláři* se zase lišily naměřené doby pro měděné lanko a pro rybářský vlasec. Bylo by zajímavé zkoumat, na jakých parametrech materiálu doba prořezávání závisí, ale to bychom se dostali k úplně jiné úloze :-). Do zajímavého experimentu se pustil *Matěj Mezera*, který prořezával kostky, které neměly tvar obyčejného kvádru (či krychle), ale používal kostky, které měly lichoběžníkový průřez. Zkoumal také prořezávání více kostkami (s lichoběžníkovým průřezem) a prořezávání při různém natočení kostek. Dostal zajímavé výsledky, ovšem ke složitosti experimentální aparatury je dost náročné z výsledků něco určit, neboť se nám měnila šířka kostek při prořezávání ledu.

Nyní je vhodný čas si povědět co jsme to vlastně měřili. Proces, který jsme zkoumali se nazývá *regelace ledu*. Při zatížení části ledu se snížila teplota tání a tak jsme mohli sledovat, jak se led natavil a drát prošel, po průchodu drátu už na led nepůsobil tlak a tak se teplota tání „vrátila“ na původní hodnotu a led opět zmrzl. Dobu průchodu drátu ledem můžeme vyjádřit vztahem

$$t = \frac{(adQ)^2 \varrho_{\mathrm{led}}}{\lambda m g T \left(\frac{1}{\varrho_{\mathrm{led}}} - \frac{1}{\varrho_{\mathrm{voda}}} \right)} \,,$$

kde a je tloušťka ledu, d je průměr drátu, Q je skupenské teplo tání, ϱ_{led} je hustota ledu, λ je tepelná vodivost drátu, m je hmotnost závaží, g tíhové zrychlení, T je teplota tání, ϱ_{voda} je hustota vody. Odvození tohoto vztahu naleznete na internetu[1]. Jak vidíte, tak doba prořezávání závisí na námi diskutované hmotnosti závaží, průměru drátu, tloušťce ledu a na materiálu lanka.

Na závěr bych rád poznamenal, že se jednalo o experimentální úlohu. To znamená, že se od vás očekávaly nějaká naměřená data. Ti, kdo pouze napsali na čem doba prořezání závisí, nebo pouze opsali ze zmiňovaných stránek vzorec, aniž se namáhali uvést zdroj, ze kterého čerpali, nemůžou očekávat více jak jeden bod.

Ⓡadim Pechal
`radim@fykos.cz`

[1] `http://www.vscht.cz/fch/pokusy/89.html`

Tabulka 1: Data naměřená řešiteli

tloušťka ledu / cm	tloušťka drátu / mm	hmotnost závaží / g	materiál	čas / s	autor
0,5	–	1000	železo	266	Šmejkalovi
0,5	–	2000	železo	247	
0,5	–	4000	železo	212	
0,5	–	1000	měď	374	
0,5	–	2000	měď	361	
0,5	–	4000	měď	349	
1	–	1000	železo	467	
1	–	2000	železo	451	
1	–	4000	železo	430	
1	–	4000	měď	791	
6	0,5	500	–	9930	Klára
6	1	500	–	4865	Stefanová
6	1,5	1500	–	4810	
5	0,25	400	měď	68400	Matěj
5	0,25	200	měď	97200	Hrabal
5	0,7	200	měď	183600	
5	0,5	1000	vlasec	242	Josef
10	0,5	1000	vlasec	539	Kolář
5	0,2	1000	vlasec	193	
5	0,5	1000	vlasec	216	
5	0,5	1000	vlasec	242	
5	0,5	2000	vlasec	186	
5	0,5	1000	vlasec	232	
5	0,5	1000	měď	256	
2,4	0,25	420	–	690	Jaroslav
2,4	0,25	630	–	645	Janoš
2,4	0,25	880	–	450	
1,3	0,25	420	–	430	
1,3	0,25	630	–	380	
1,3	0,25	880	–	330	
2,4	1,2	420	–	860	
2,4	1,2	630	–	750	
2,4	1,2	880	–	585	
1,3	1,2	420	–	450	
1,3	1,2	630	–	405	
1,3	1,2	880	–	340	
1	0,9	100	–	480	Zuzana
1	0,9	200	–	300	Viceníková
1	0,9	250	–	252	
4	0,53	1000	–	18780	Martin
4	0,2	1000	–	14940	Štyks
4	0,14	1000	–	10800	
39	0,2	1000	–	14940	
26	0,2	1000	–	3960	
16	0,2	1000	–	1380	
26	0,2	500	–	3940	
26	0,2	700	–	3810	
26	0,2	1000	–	3675	

Úloha III.C ... Růžová

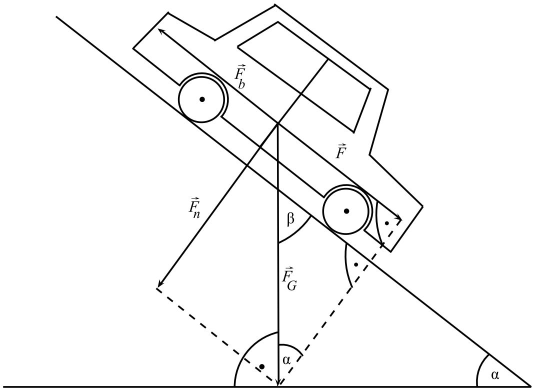
5 bodů; průměr 3,30; řešilo 37 studentů

a) Růžový trabant vážící 1,5 t *jede s kopce stálou rychlostí* 40 km/h. *Auto brzdí. To má za* *následek brzdnou sílu* 800 N. *Určete sklon kopce.*

b) *Na lanku délky* 2 m *je zavěšena růžová kulička. Kyvadlo vychýlíme o* 5°. *O kolik se zvedne střed kuličky ve vychýlené poloze oproti původní?*

c) *Anička koupila bratrovi k Vánocům kouzelnickou hůlku dlouhou* 25 cm *a shání růžovou krabičku, do které hůlku zabalí. Jak vysoká má být krabička, když její podstava má rozměry* 10 *a* 15 cm. *Anička chce, aby hůlka v krabičce ležela v pozici tělesové úhlopříčky.*

a) Na auto působí tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$, kterou lze rozložit do dvou navzájem kolmých směrů: na pohybovou sílu $\boldsymbol{F}$ (rovnoběžná s nakloněnou rovinou) a na normálovou sílu (kolmá na nakloněnou rovinu). Vznikne pravoúhlý rovnoběžník, jehož úhlopříčkou je vektor síly $\boldsymbol{F}_G$, který směřuje kolmo k zemi. Na obrázku vznikne několik pravoúhlých trojúhelníků.



Obr. 7: Trabant jede z kopce

Doplněním úhlů podle pravidla o součtu úhlů v trojúhelníku získáme pravoúhlý trojúhelník s přeponou $\boldsymbol{F}_G$ a odvěsnou $\boldsymbol{F}$, která je protilehlá úhlu α, což je hledaný sklon kopce. Pomocí goniometrických funkcí si nyní můžeme vyjádřit pohybovou složku tíhové síly trabantu.

$$\sin\alpha = \frac{F}{F_G}$$
$$F = F_G \cdot \sin\alpha$$

Auto se pohybuje rovnoměrným pohybem. Jeho zrychlení je tedy nulové, a tím je nulová i výslednice sil.

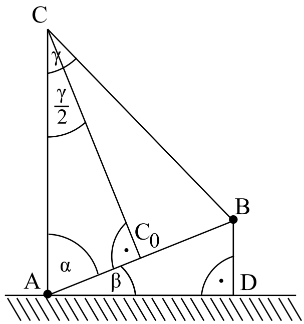
$$F = m \cdot a = m \cdot 0 = 0\,\mathrm{N}$$

Nulová výslednice vznikne vyrušením síly $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{F}_\mathrm{b}$, a proto

$$F = F_\mathrm{b}$$
$$F_\mathrm{b} = F_G \cdot \sin\alpha$$
$$\sin\alpha = \frac{F_\mathrm{b}}{F_G} = \frac{F_\mathrm{b}}{m \cdot g}$$
$$\alpha = \arcsin\frac{800\,\mathrm{N}}{1500\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}} \approx \arcsin 0{,}054 \approx 3{,}11^\circ$$

Sklon kopce, ze kterého sjíždí trabant je přibližně $3^\circ 7\,'$.

b) Lano s kuličkou je ve svislé poloze, poté je vychýleno o pět stupňů. Délka lana je stále stejná, a proto tvoří ramena rovnoramenného trojúhelníku ABC s úhlem $\gamma = 5^\circ$ u místa zavěšení.



Obr. 8: Kulička vychýlená na kyvadle

V rovnoramenném trojúhelníku jsou úhly u základny shodné a součet všech úhlů v trojúhelníku je 180°, tedy$\alpha = (180^\circ - \gamma)/2 = 90^\circ - \gamma/2$. Když je lano s kuličkou ve svislé poloze, můžeme si představit, že se dotýká rovné desky, na kterou je lano kolmé. Po vychýlení zjistíme, o kolik se zvedla kulička, určením vzdálenosti kuličky od této desky. Na obrázku 8 vidíme, že nám vznikl pravoúhlý trojúhelník ADB, jehož strana DB je hledanou výškou kuličky. V trojúhelníku můžeme zjistit $|\measuredangle \mathsf{BAD}|$.

$$|\measuredangle \mathsf{CAD}| = 90^\circ = \alpha + \beta$$
$$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = 90^\circ - 90^\circ + \frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma}{2}$$

Dále můžeme zjistit velikost přepony AB. V rovnoramenném trojúhelníku ABC je výška na základnu totožná s jeho těžnicí (spojnice vrcholu a středu protilehlé strany) a zároveň je tato úsečka i osou úhlu γ. Máme tedy další pravoúhlý trojúhelník $\mathsf{AC_0C}$ s přeponou $|\mathsf{AC}| = 2\,\mathrm{m}$ a $|\measuredangle \mathsf{C_0CA}| = \gamma/2$. Z tohoto trojúhelníku si můžeme vyjádřit $|\mathsf{AB}|$.

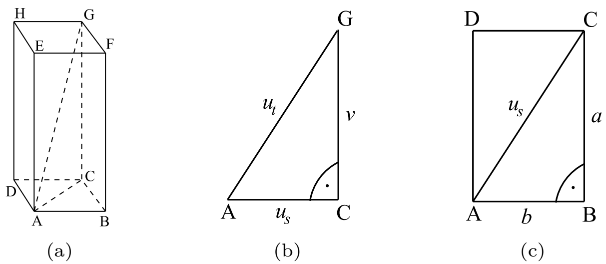
$$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{|\mathsf{AB}|}{2\cdot|\mathsf{AC}|}$$
$$|\mathsf{AB}| = 2\cdot|\mathsf{AC}|\sin\frac{\gamma}{2}$$

Nyní již můžeme dopočítat zvýšení kuličky.

$$\sin\beta = \frac{|\mathsf{BD}|}{|\mathsf{AB}|}$$
$$|\mathsf{BD}| = \sin\beta|\mathsf{AB}| = \sin\frac{\gamma}{2}\cdot 2\cdot|\mathsf{AC}|\sin\frac{\gamma}{2} = 2\cdot|\mathsf{AC}|\sin^2\frac{\gamma}{2}$$
$$|\mathsf{BD}| = 2\cdot 2\cdot\sin^2\frac{5^\circ}{2} \approx 0{,}0076\,\mathrm{m} \approx 0{,}76\,\mathrm{cm}$$

Ve vychýlené poloze bude střed kuličky přibližně o 0,76 cm výš než v původní poloze.

c) Když dá Anička hůlku do krabičky tvaru kvádru tak, aby tvořila tělesovou úhlopříčku, bude hůlka spojovat body A, G (obrázek 9a). Tím vznikne pravoúhlý trojúhelník ACG, kde tělesová úhlopříčka AG je jeho přeponou, strana AC je stěnovou úhlopříčkou podstavy krabičky a CG je hranou krabičky o délce její výšky. Pomocí Pythagorovy věty si vyjádříme u_s a u_t. Úpravou



Obr. 9: Umístění hůlky do kvádrové krabičky

dostaneme vztah pro výpočet výšky krabičky.

$$
\begin{aligned}
{u_\mathrm{s}}^2 &= a^2 + b^2\\
{u_\mathrm{t}}^2 &= {u_\mathrm{s}}^2 + v^2 \qquad\Rightarrow\qquad v^2 = {u_\mathrm{t}}^2 - {u_\mathrm{s}}^2\\
\frac{v}{\mathrm{cm}} &= \sqrt{{u_\mathrm{t}}^2 - (a^2+b^2)} = \sqrt{{u_\mathrm{t}}^2 - a^2 - b^2} = \sqrt{25^2 - 10^2 - 15^2} =\\
&= \sqrt{625 - 100 - 225} = \sqrt{300} = \sqrt{3\cdot 100} = 10\cdot\sqrt{3}\\
v &\approx 17{,}32\,\mathrm{cm}
\end{aligned}
$$

Anička potřebuje 17,32 cm vysokou krabičku, aby hůlka byla v pozici tělesové úhlopříčky.

Eliška Pilátová
`eliska@fykos.cz`

Výfučtení: Sliby chyby

Chyby, kde se berou?

Slovem chyba nebo odchylka nemáme ve fyzice na mysli chybu ve významu omyl, ale (ne)přesnost, s jakou se nám podařilo nějakou veličinu změřit. Nejjednodušší fyzikální měření, jaké si člověk může představit, je měření délky. Slovem chyba tedy nemyslíme například to, že si „experimentátor“ nevšiml, že stupnice je místo v centimetrech v palcích, ale jak daleko od naměřené délky se skutečná délka předmětu může nacházet. Pokud někdo řekne, že změřil délku například tužky jako $(21{,}20 \pm 0{,}05)\,\mathrm{cm}$. Znamená to, že délka tužky bude někde mezi 21,15 a 21,25 cm. Závorky naznačují, že jednotky centimetrů platí pro naměřenou hodnotu i odchylku.

Pravítka, váhy, teploměry, úhloměry

Experimentátor z předchozího odstavce patrně užil pravítka s nejmenším dílkem stupnice velikosti 1 mm. (Je totiž zvykem, že při měření měřidlem se stupnicí se udává jako chyba polovina nejmenšího dílku na stupnici – například pravítka, u rovnoramenných vah by roli nejmenšího dílku stupnice hrálo nejmenší použité závaží).

Rtuťový teploměr má nejmenší dílek zpravidla desetinu stupně. Je-li změřená teplota například 37 °C, zapíšeme výsledek ve tvaru $(37{,}00 \pm 0{,}05)\,{}^\circ\mathrm{C}$. Všimněte si, že hodnotu uvádíme na stejný počet desetinných míst, jako chybu. U složitějších měřících přístrojů (digitální váhy, ampérmetry na měření proudu, ...) bývá na přístrojích uvedena přesnost, s jakou je výsledek naměřen.

Užitečným údajem je též relativní chyba. Máme změřenou tužku $(21{,}20 \pm 0{,}05)\,\mathrm{cm}$ a tloušťku koženého náramku $(0{,}10 \pm 0{,}05)\,\mathrm{cm}$. Obojí bylo měřeno stejným měřidlem, velikost chyby je stejná, ale u tloušťky náramku chyba tvoří polovinu měřené délky, bylo by třeba použít přesnější měřidlo, například šupleru.

Relativní chybu δ určíme podle vzorce

$$\delta = \frac{\text{velikost chyby}}{\text{naměřená hodnota}}\,.$$

Pro tužku a kožený náramek to bude

$$\delta_{\text{náramek}} = \frac{0{,}05\,\mathrm{cm}}{0{,}10\,\mathrm{cm}} = 0{,}5\,,$$

$$\delta_{\text{tužka}} = \frac{0{,}05\,\mathrm{cm}}{21{,}20\,\mathrm{cm}} = 0{,}002\,.$$

Všimněte si, že relativní chyba je bezrozměrná (nemá jednotky, centimetry se ve zlomku vykrátí). Po vynásobení relativní chyby 100 % dostaneme relativní chybu v procentech.[2] Nepřesnost určení délky tužky tvoří 0,2 % její velikosti a u náramku je to 50 %. Relativní chybu tedy můžeme použít jako ukazatel, zda je použitý způsob měření dostatečně dobrý. Relativní chyba v řádu jednotek procent je snesitelná, více by to však být nemělo (na náramek musíme tedy použít jiné měřidlo).

[2] Když vynásobíme něco 100, je to stokrát větší. Zde se však relativní chyba nemění, jelikož platí 100 % = 1.

Měřicí přístroje všeho druhu

U složitějších přístrojů (ručičkové, digitální) bývá někde na přístroji uvedena jeho přesnost. Analogové přístroje (ručičkové, ty jež nejsou digitální) jsou rozděleny do několika tříd přesnosti označených $p = 0{,}1$; $0{,}2$ (pro velmi přesné laboratorní přístroje) $0{,}5$; 1 (laboratorní přístroje) $1{,}5$; $2{,}5$; 5 (přístroje provozní). Údaj p bývá vyznačen na štítku stupnice. Odchylku Δ pak určíme podle vzorce

$$\Delta = \text{rozsah stupnice} \cdot \frac{p}{100}\,.$$

Bývá vždy výhodné měřit raději v první polovině měřícího rozsahu stupnice (tedy zvolit u přístroje s různými rozsahy takový rozsah, aby se měřená hodnota nalézala v první polovině stupnice). U některých přístrojů se totiž parametr p mění i s tím, kde se na stupnici nacházíte a obecně roste u hodnot blíže k maximálnímu rozsahu.

Měření nepřímo

Často se stává, že veličinu, kterou chcete změřit, přímo přiložením nebo zapojením jednoho měřidla určit nelze nebo na to nemáme vhodná měřidla. Příkladem může být třeba odpor R. Chceme-li zjistit odpor drátu, použijeme ampérmetr (na měření proudu I) a voltmetr (na měření napětí U) a podle Ohmova zákona pak dopočítáme odpor

$$R = \frac{U}{I}\,.$$

Jak pak ale určit chybu určení odporu z chyb napětí a proudu? Napoví vám tabulka 2.

Tabulka 2: Výpočet chyby nepřímo měřené veličiny.
c je veličina, kterou chceme spočítat z naměřených veličin $a \pm \Delta a$, $b \pm \Delta b$; Δc je její chyba, δc je její relativní chyba.

Početní operace	Stanovení odchylky
$c = a + b$	$\Delta c = \Delta a + \Delta b$
$c = a - b$	$\Delta c = \Delta a + \Delta b$
$c = ab$	$\delta c = \delta a + \delta b$
$c = a/b$	$\delta c = \delta a + \delta b$
$c = a^n$	$\delta c = n\delta a$
$c = \sqrt[n]{a}$	$\delta c = \delta a/n$

Někdy je výhodné počítat chybu přes relativní odchylky, někdy přes normální chyby. Normální chybu z relativní odchylky dostaneme jednoduše:

$$\delta = \Delta \cdot \text{naměřená hodnota}$$

Pořadí řešitelů po III. sérii

Kategorie šestých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	E	C	III	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	2	4	4	4	6	6	**26**	*68*	
1.	*Olga Krumlová*	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*3*	

Kategorie sedmých ročníků

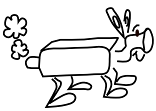
	jméno	škola	1	2	3	4	E	C	III	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	2	4	4	4	6	6	**26**	*68*	
1.	*Jan Preiss*	G Lovosice	2	2	–	–	–	6	**10**	*23*	
2.	*Pham The Huynh Duc*	G Šumperk	0	1	1	0	–	0	**2**	*13*	
3.	*Mikuláš Plešák*	G Jablonec nad Nisou	–	–	–	–	–	–	**0**	*10*	
4.	*Jan Macháček*	G Holešov	1	–	–	–	1	1	**3**	*8*	
4.	*Martin Orság*	G Vyškov	–	–	–	–	–	–	**0**	*8*	
6.	*Adéla Hanková*	G Lovosice	–	–	–	–	–	–	**0**	*2*	

Kategorie osmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	E	C	III	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	2	4	4	4	6	6	**26**	*68*	
1.	*Martin Štyks*	G Lovosice	2	3	4	4	6	6	**25**	*64*	
2.	*Matěj Mezera*	ZŠ Havlíčkův Brod, Nuselská	1	4	4	3	6	5	**23**	*59*	
3.	*Jaroslav Janoš*	G Zlín, Lesní čtvrť	2	2	4	3	6	6	**23**	*53*	
4.	*Jáchym Bártík*	G Havlíčkův Brod	1	3	3	1	1	6	**15**	*52*	
4.	*Klára Ševčíková*	G Uherské Hradiště	–	4	4	–	3	6	**17**	*52*	
6.	*Jaromír Mielec*	G Ostrava-Zábřeh	–	1	–	4	–	6	**11**	*42*	
6.	*Simona Gabrielová*	G České Budějovice, Jírovcova	1	3	1	0	3	3	**11**	*42*	
8.	*Lucie Hronová*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	1	3	–	1	2	6	**13**	*38*	
9.	*Matěj Štula*	GSOŠPg Liberec	2	–	–	4	–	–	**6**	*32*	
10.	*Tomáš Macek*	Jiráskovo G Náchod	2	–	–	4	–	1	**7**	*29*	
11.	*Roman Chasák*	ZŠ a MŠ J. Schrotha, Lipová-lázně	2	2	4	3	1	6	**18**	*28*	
11.	*Vjačeslav Horbač*	G Liberec, Jeronýmová	–	1	–	0	3	1	**5**	*28*	
13.	*David Žáček*	G Ch. Dopplera Praha	1	0	2	–	–	6	**9**	*27*	
14.	*Jan Holásek*	G Ústí nad Orlicí	–	–	–	–	–	–	**0**	*24*	
15.	*Dinh Huy Nhat Minh*	G Kadaň	–	–	–	–	–	–	**0**	*22*	
16.	*Aleksej Gaj*	G Ch. Dopplera Praha	0	–	2	–	1	5	**8**	*20*	
17.	*Zuzana Matůšová*	CZŠ Veselí nad Moravou	1	–	1	–	1	1	**4**	*17*	
18.	*Sebastian Duarte*	G Ch. Dopplera Praha	1	–	–	–	1	–	**2**	*16*	
18.	*Tomáš Volejník*	G Ch. Dopplera Praha	1	–	–	–	1	3	**5**	*16*	
20.	*Martin Griner*	G Ch. Dopplera Praha	–	–	1	–	1	–	**2**	*15*	
20.	*Miloš Müller*	ZŠ Jesenice	2	2	1	–	–	–	**5**	*15*	
22.	*Jakub Matějka*	G Ch. Dopplera Praha	1	–	–	–	1	3	**5**	*13*	
22.	*Kačka Feslová*	G Ch. Dopplera Praha	–	–	1	–	–	1	**2**	*13*	
22.	*Klára Slováčková*	G Ch. Dopplera Praha	0	–	–	–	1	0	**1**	*13*	
22.	*Tamara Maňáková*	G Šumperk	–	–	–	–	–	–	**0**	*13*	
22.	*Vojtěch Dědek*	G Ch. Dopplera Praha	0	–	1	–	1	–	**2**	*13*	
27.	*Markéta Holubová*	G Ch. Dopplera Praha	0	1	–	–	–	0	**1**	*12*	
27.	*Martina Fusková*	G Uherské Hradiště	–	–	–	–	–	–	**0**	*12*	
27.	*Matěj Coufal*	G Havlíčkův Brod	1	–	1	–	3	1	**6**	*12*	
30.	*Sebastian Janda*	G Ch. Dopplera Praha	–	–	1	–	–	1	**2**	*11*	
30.	*Tereza Čechová*	G Ch. Dopplera Praha	0	–	1	–	–	1	**2**	*11*	
32.	*Jan Ondruš*	Gymnázium Ostrov	–	–	–	–	–	–	**0**	*9*	
33.	*Jan Kašník*	Gymnázium Cheb	–	–	–	–	–	–	**0**	*8*	
33.	*Jonáš Uřičář*	CZŠ Veselí nad Moravou	–	–	–	–	–	1	**1**	*8*	
33.	*Kateřina Zemková*	GOB Telč	–	–	–	–	–	–	**0**	*8*	
36.	*Edvard Lanz*	G Ch. Dopplera Praha	–	–	–	–	–	–	**0**	*6*	
36.	*František Couf*	G Ch. Dopplera Praha	0	0	–	0	–	–	**0**	*6*	
36.	*Miky Hosnedl*	G Ch. Dopplera Praha	0	–	1	0	–	–	**1**	*6*	
36.	*Ondřej Altman*	G Ch. Dopplera Praha	–	–	–	0	1	–	**1**	*6*	
40.	*Jakub Mohaupt*	ZŠ Dr. Miroslava Tyrše 8.C	–	–	–	–	–	–	**0**	*5*	
41.	*Tereza Doležalová*	ZŠ a MŠ Otnice	–	–	–	–	–	–	**0**	*4*	
41.	*Tomáš Hlavatý*	G Kadaň	–	–	–	–	–	–	**0**	*4*	
43.	*Petr Chmel*	Dvořákovo G Kralupy nad Vltavou	–	–	–	–	–	–	**0**	*2*	

Kategorie devátých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	E	C	III	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	2	4	4	4	6	6	**26**	*68*	
1.	*Zdeněk Nekula*	ZŠ Prosiměřice	1	2	3	4	–	6	**16**	*53*	
2.	*Matěj Hrabal*	G Uherské Hradiště	2	3	4	2	6	6	**23**	*52*	
3.	*Klára Stefanová*	G B. Němcové Hradec Králové	2	3	3	1	6	4	**19**	*51*	
4.	*Josef Kolář*	ZŠ Litovel, Vítězná	1	2	4	0	6	6	**19**	*48*	
5.	*Marek Janka*	Slovanské G Olomouc	–	–	–	–	–	–	**0**	*37*	
6.	*Filip Šmejkal*	G Uherské Hradiště	0	1	1	1	3	2	**8**	*27*	
6.	*Gabriela Šmejkalová*	G Uherské Hradiště	0	1	1	1	3	2	**8**	*27*	
8.	*Daniel Pišťák*	G Ch. Dopplera Praha	1	0	–	–	–	5	**6**	*26*	
9.	*Anna Kovářiková*	RG a ZŠ Prostějov	1	–	1	2	1	4	**9**	*21*	
10.	*Jan Hladík*	G Ch. Dopplera Praha	2	–	0	1	1	–	**4**	*20*	
11.	*Martin Rajdl*	G Ch. Dopplera Praha	2	–	–	–	1	–	**3**	*19*	
11.	*Tomáš Vymazal*	RG a ZŠ Prostějov	2	0	–	0	1	3	**6**	*19*	
11.	*Vojtěch Hýbl*	G8 Mladá Boleslav	2	0	–	0	–	1	**3**	*19*	
11.	*Zuzana Viceníková*	G Uherské Hradiště	0	0	–	0	4	–	**4**	*19*	
15.	*Marek Otýpka*	G Židlochovice	2	1	1	–	–	1	**5**	*15*	
15.	*William Tatarko*	G Ch. Dopplera Praha	2	–	–	–	–	–	**2**	*15*	
17.	*Kryštof Rühr*	G Ch. Dopplera Praha	–	–	–	–	–	–	**0**	*13*	
18.	*Tomáš Pauček*	G Ch. Dopplera Praha	–	–	–	–	–	–	**0**	*9*	
19.	*Čeněk Krejčí*	ZŠ a MŠ Nebušice	–	–	–	–	–	–	**0**	*8*	
19.	*Dušan Klíma*	GFMP Rychnov nad Kněžnou	–	–	–	–	–	–	**0**	*8*	
19.	*Ester Sgallová*	G Ch. Dopplera Praha	–	–	–	–	–	–	**0**	*8*	
19.	*Michal Drašnar*	G Ch. Dopplera Praha	–	–	–	–	–	–	**0**	*8*	
23.	*Aneta Doležalová*	ZŠ Nížkov	–	–	–	–	–	–	**0**	*5*	
23.	*Lukáš Skořepa*	G Ch. Dopplera Praha	–	–	–	–	–	–	**0**	*5*	
25.	*Michal Kunc*	G Ch. Dopplera Praha	–	–	–	–	–	–	**0**	*4*	



FYKOS – Výfuk
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://vyfuk.fykos.cz`
e-mail pro řešení: `vyfuk-reseni@fykos.cz`
e-mail: `vyfuk@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.