VÝFUK

VÝpočty Fyzikálních ÚKolů – kores. sem. MFF UK pro ZŠ ročník 1±1 číslo 3/7

Úvodem

Milé řešitelky a milí řešitelé,

týdny určené k řešení druhé série uplynuly a vám se takřka ke štědrovečernímu stolu dostává její vzorové řešení a zadání série třetí.

Téma první úlohy je více než prozaické; potenciálně nabité znalosti z minulého seriálu zužitkujete při pomoci polárníkovi v dalším problému. Zanalyzovat Wattův regulátor, v němž není ani zrnko křemíku, je předmětem úkolu třetího. V následujícím máte šanci potvrdit nebo vyvrátit šílenost myšlenky kovů plavajících v oleji. V rámci praktické úlohy se pokusíte přesně popsat známý jev hodící se k zimě.

Aktuální číslo seriálu přináší seznámení s pro vás (zatím) zřejmě neobvyklým způsobem měření úhlů, který je však ve fyzice velmi praktický. I tak se mnohdy ukazuje, že nepotřebujeme znát přímo úhel, ale jen jeho určité zobrazení. Těchto tzv. *goniometrických funkcí* se týká druhá část seriálu.

MFnáboj

MFnáboj je soutěž maximálně čtyřčlenných týmů základoškoláků z 8. a 9. tříd a odpovídajících tříd gymnázií, kteří se zajímají o matematiku a fyziku. Všichni členové by měli být z jedné školy. Jejich úlohou bude v daném časovém limitu vyřešit co nejvíc nápaditých úloh. Porovnat síly budete moci jak mezi sebou v ČR, tak s týmy z celého Slovenska, protože na Slovensku bude soutěž probíhat ve více městech současně.

Láká vás účast na MFnáboji? Pak vězte, že se koná 13. ledna 2012 v Praze na Gymnáziu Christiana Dopplera a veškeré potřebné informace jsou k nalezení na internetu[1].

Nyní už jen zbývá popřát křesťanům veselé Vánoce, pohanům příjemnou oslavu zimního slunovratu a uctívačům gregoriánského kalendáře šťastný Nový rok.

Organizátoři

[1] `http://vyfuk.fykos.cz/naboj/mf-naboj`

Zadání III. série

Termín doručení: 18. ledna 2012 18.00

Úloha III.1 ... Průjem — 2 body

Všichni víme, jak vypadá rulička toaletního papíru. Vnitřní průměr ruličky je $r = 48\,\mathrm{mm}$ a vnější $R = 100\,\mathrm{mm}$, délka útržku $d = 10\,\mathrm{cm}$ a počet útržků $n = 200$. Jak je toaletní papír tlustý?

Úloha III.2 ... Topení na Sibiři — 4 body

Polárníci na daleké sibiřské stanici se rozhodli, že si přitopí. Ve skladu objevili dva elektrické přímotopy, z nichž jeden má elektrický odpor $R_1 = 1000\,\Omega$ a druhý má elektrický odpor $R_2 = 100\,\Omega$. Dieselový agregát, který bude dodávat energii pro topení, je umístěn vně stanice. Přívodní kabely od agregátu ke stanici mají odpor $R_\mathrm{v} = 10\,\Omega$. Jak mají polárnicí postupovat, aby se ve stanici co nejvíce zahřáli?

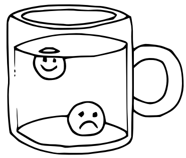
Úloha III.3 ... Wattův regulátor — 4 body

Mějme dvě těžké kuličky. Každá z nich je připojena tyčkou do kloubu (z opačných stran). Obě koule se mohou vychylovat pouze v jedné svislé rovině. Celou soustavou začneme otáčet okolo svislé osy procházející kloubkem. Jak závisí odchylka tyček na úhlové rychlosti?

Úloha III.4 ... Lžička v oleji — 4 body

Při vaření večeře spadla do sklenice s olejem lžička. Zvídavý matfyzák se rozhodl, že lžičku nebude lovit, ale nechá ji vyplavat. Jak to udělá? Začne sklenici zahřívat a čeká, než se dosáhne takové teploty, až se hustoty vyrovnají a lžíce následně vyplave. Může se mu to podařit?

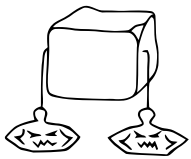
Olej má hustotu ϱ_1 a tepelnou roztažnost α_1. Lžička je vyrobena z kovu, který má hustotu ϱ_2 a tepelnou roztažnost α_2. Za jakých podmínek se tento pokus nezdaří?



Úloha III.E ... Krájení vody 6 bodů

Vezměte kostku ledu a kus drátu. Pokud začnete drátem prořezávat led (zatížíte závažím konce drátu), zjistíte, že se vám drát prořeže kostkou ledu, aniž by se kostka roztopila.

Na čem všem závisí doba prořezávání drátu? Zkuste proměřit nejrůznější parametry (tloušťka ledu, průměr drátu, závaží, kterým jste zatížili konce drátu)...



Úloha III.C ... Růžová 5 bodů

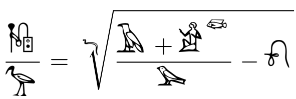
a) Růžový trabant vážící 1,5 t jede s kopce stálou rychlostí 40 km/h. Auto brzdí. To má za následek brzdnou sílu 800 N. Určete sklon kopce.

b) Na lanku délky 2 m je zavěšena růžová kulička. Kyvadlo vychýlíme o 5°. O kolik se zvedne střed kuličky ve vychýlené poloze oproti původní?

c) Anička koupila bratrovi k Vánocům kouzelnickou hůlku dlouhou 25 cm a shání růžovou krabičku, do které hůlku zabalí. Jak vysoká má být krabička, když její podstava má rozměry 10 a 15 cm. Anička chce, aby hůlka v krabičce ležela v pozici tělesové úhlopříčky.

Řešení II. série

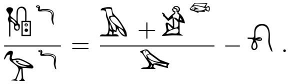
Úloha II.1 ... Rozcvička 1 bod; průměr 0,72; řešilo 53 studentů



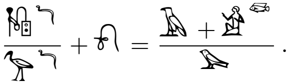
Čemu je rovno ?

Zadanou rovnici potřebujeme upravit tak, aby na jedné její straně zůstalo požadované . Na její druhé straně potom bude všechno ostatní, tedy nějaký výraz, kterému je rovno. K tomu využijeme standardní operace pro úpravy rovnic jako vynásobení nebo vydělení rovnice nějakým znakem, přičtení nebo odečtení nějakého znaku, případně odmocnění nebo umocnění. Nesmíme zapomenout, že prováděnou operaci je třeba vždy udělat s oběma stranami rovnice.

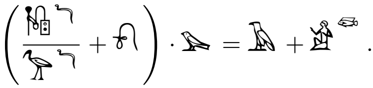
Nejprve se tedy zbavíme odmocniny na pravé straně a to tak, že celou rovnici umocníme na . Naše rovnice je teď ve tvaru



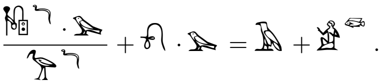
Nyní přičteme , podoba rovnice je tedy



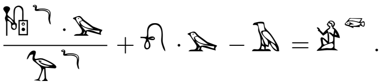
Teď se potřebujeme zbavit zlomku na pravé straně, toho docílíme vynásobením rovnice znakem 



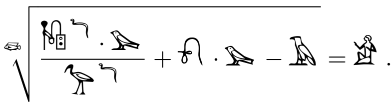
A po roznásobení závorky na levé straně máme



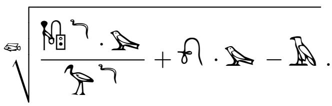
Nyní odečteme od rovnice  a získáme



Teď už zbývá jenom celou rovnici odmocnit znakem 



Naše  je tedy rovno výrazu



Tereza Mašková
tereza@fykos.cz

Úloha II.2 ... Žárovka

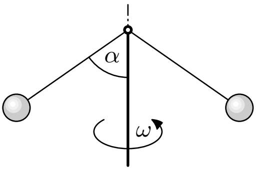
3 body; průměr 3,21; řešilo 33 studentů

Žárovka je, co se týče svícení, poměrně neúčinná věc. Většinu svého příkonu přemění na teplo a jen asi 5 % na světlo. Představte si, že pod jednu takovou (například 60W) dáte kus ledu o hmotnosti $m = 100\,\mathrm{g}$. Předpokládejte, že led pohltí všechno záření z žárovky. Za jak dlouho se led rozpustí?

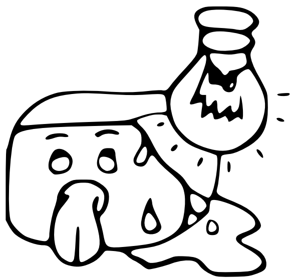
Bonus *Jak by se změnil výsledek, kdyby led nepohlcoval veškeré záření z žárovky, ale pouze to, které na něj z žárovky přímo dopadá, když má led tvar kry o ploše S, tato kra se nachází v dostatečně velké vzdálenosti d od vlákna žárovky a žárovka na ni svítí kolmo?*

Nejdříve se zamysleme nad tím, kolik tepla potřebujeme, abychom roztopili kus ledu. Náhledem do tabulek nalezneme veličinu zvanou *měrné skupenské teplo tání* l_t. Jedná se o konstantu, která říká, kolik tepla musíme dodat, aby se rozpustila jednotka hmotnosti (kilogram) látky. Množství tepla Q, které musíme dodat látce o hmotnosti m aby se rozpustila, zjistíme jednoduchým vztahem

$$Q = ml_\mathrm{t}\,.$$



Obr. 1: Wattův regulátor



Víme, že na led svítí žárovka, která má příkon P. Tento příkon se přemění jednak na teplo, ale také na světlo. Led pohltí všechno záření ze žárovky, tedy jak světelné, tak i tepelné. Pokud led necháme pod žárovkou po dobu t, dopadne na led energie, která odpovídá teplu

$$Q = Pt\,.$$

Tyto vztahy dáme dohromady a vypočítáme

$$t = \frac{ml_\mathrm{t}}{P}\,.$$

Z tabulek zjistíme, že pro led je $l_\mathrm{t} = 334000\,\mathrm{J/kg}$. Za m dosadíme $m = 100\,\mathrm{g} = 0{,}1\,\mathrm{kg}$ a za P dosadíme $P = 60\,\mathrm{W}$. Zjistíme tak, že kostka ledu se nám rozpustí za $t = 557\,\mathrm{s} = 9{,}3\,\mathrm{min}$.

Druhá část úlohy je o krapet složitější. Představíme si, že žárovka vyzáří energii E. Ta se šíří všemi směry od žárovky stejně rychle. Ve vzdálenosti d leží pomyslná kulová sféra, na které je rovnoměrně rozprostřena energie E. Můžeme si tak zavést veličinu, kterou nazveme *plošná hustota energie* q. Tato veličina bude vyjadřovat množství energie na jednotku plochy

$$q = \frac{E}{S} = \frac{E}{4\pi d^2}\,.$$

Veličina q říká, že pokud žárovka vyzáří 100 J, tak ve vzdálenosti $d = 2\,\mathrm{m}$ nám na plochu $1\,\mathrm{m}^2$ dopadne energie $q = 1{,}989\,\mathrm{J}$. Jednotka veličiny q je $\mathrm{J/m}^2$. Energii Q, která dopadne na plochu S, zjistíme snadno pomocí vztahu

$$Q = qS\,.$$

Na kru ve vzdálenosti d od žárovky tak nedopadá energie $Q = Pt$, ale pouze část energie

$$Q = Pt\frac{S}{4\pi d^2}\,.$$

Pokud takto upravený vztah dosadíme do vzorečků odvozených výše, dostaneme dobu, za kterou se nám naše ledová kra roztopí:

$$t = \frac{4\pi d^2 m l_\mathrm{t}}{SP}\,.$$

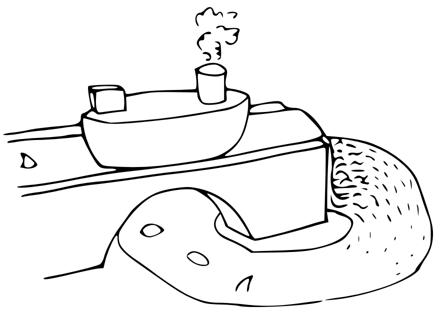
Při tomto výpočtu samozřejmě předpokládáme, že kra je dostatečně malá a dostatečně daleko, či že je zaoblená tak, abychom nemuseli počítat s tím, že některé části kry jsou dál než jiné, což by nám výpočet značně zkomplikovalo.

®***adim Pechal***
radim@fykos.cz

Úloha II.3 ... Řeka přes most

4 body; průměr 2,41; řešilo 46 studentů

Údolím teče řeka, přes řeku vede most. A přes ten most též teče řeka (jedná se tedy o akvadukt). A přes ten most chce přejet loď. Jak se zvýší zatížení mostu ve chvíli, kdy loď vjede na most? Co by se změnilo, kdyby přes most netekla řeka, ale byl na něm bazén a loď by do něj byla položena?



Voda tekoucí přes most na něj působí tíhovou silou. Z Archimédova zákona víme, že těleso ponořené do kapaliny je nadlehčováno silou rovnající se tíze kapaliny stejného objemu jako ponořená část tělesa. A ze zákona akce a reakce víme, že síla, jíž působí těleso na vodu pod sebou (jejím prostřednictvím i na most), je stejná jako ta vztlaková síla. Pokud nám tedy na most vjede loď, tak část vody vytlačí ven z mostu a sama bude působit na most stejnou silou, jako to množství vody, které vytlačila, takže se výsledná tíhová síla vůbec nezmění.

(Nutno podotknouti, že zanedbáváme jevy plynoucí z toho, že plovoucí loď vytváří tekoucí vodě překážku. Je možné, že při řádově srovnatelné ploše průřezu řeky a ponořené časti lodi bude loď vytvářet tekoucí vodě nezanedbatelnou překážku, jež by způsobila rozdílnost hladin před lodí a za ní. V takovém případě by se zatížení mostu měnilo postupně celou dobu plavby přes most s tím, jak by se hranice mezi rozdílnými hladinami, tedy loď, postupně posouvala. Při plavbě proti proudu by se zatížení snižovalo a při plavbě po proudu zvyšovalo.)

Pokud máme místo řeky bazén, voda v něm působí na most tíhovou silou F_voda. Položíme-li do bazénu loď, voda, kterou vytlačí, nemůže odtéci jako v předchozím případě, nýbrž nám pouze stoupne hladina. Loď působí na most tíhovou silou $F_{\text{loď}}$. Archimédův zákon sice stále platí, ale tím, že část vody nemohla odtéct, se části vody se stejnou tíhou, jako má loď, „nezbavíme“. Musíme je tedy sečíst. Výsledná tíha na most v tomto případě je tedy o $F_{\text{loď}}$ větší.

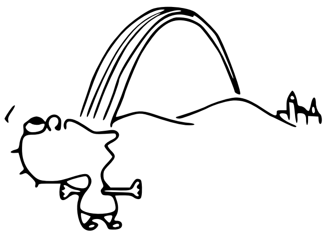
Anna Chejnovská
anca@fykos.cz

Úloha II.4 ... Duhová

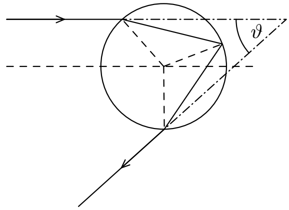
2 body; průměr 1,60; řešilo 57 studentů

Co uvidí člověk, když si stoupne na konec duhy?

Dominika se zadívala do duhy. (FYKOS)



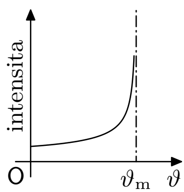
Nejdříve krátce popišme, jak duha vzniká. Většinou ji vídáme v dešti, na který svítí slunce. Za duhu je zodpovědná ta část světla, která se uvnitř kapky jednou odrazí zevnitř o stěnu a poté kapku opustí (vizte obrázek 2).



Obr. 2: Odraz a lom paprsku v kulové kapce

Budeme-li zkoumat úhel ϑ, který svírá paprsek vcházející do kapky a paprsek z ní vycházející, zjistíme, že nemůže překročit určitou hodnotu (ϑ_{m}) závislou na indexu lomu. Z každé kapky tedy vychází kužel takovýchto paprsků, který má vrcholový úhel ϑ_{m}. K pozorovateli pak tyto paprsky přicházejí pouze od kapek, které se nacházejí uvnitř kužele o vrcholovém úhlu ϑ_{m} odvráceného od slunce. Intensita přicházejících paprsků závisí na úhlu, ze kterého přicházejí. Jak se úhel blíží k ϑ_{m}, roste intensita k nekonečnu. Graf na obrázku 3 schematicky znázorňuje tuto závislost. Hranice tohoto kužele je tedy velice jasná. Jelikož je voda (jako v podstatě každý materiál) prostředí opticky dispersní, závisí index lomu na vlnové délce. Čím je vlnová délka větší, tím je menší index lomu. Duha vzniká proto, že kužel, ze kterého přichází odražené modré světlo, je menší než kužel, ze kterého přichází červené světlo. Výrazná hranice je jinde pro každou barvu, a proto vidíme duhu.

Protože vnější barva duhy je červená (s nejmenším indexem lomu), můžeme usoudit, že čím menší je index lomu, tím větší je kužel. Pokud by pršel materiál o jiném indexu lomu, byl by daný kužel a tedy úhlový poloměr duhy jiný. Pro vyšší index lomu by byla duha menší.



Obr. 3: Závislost intensity na úhlu pozorování

Vzorec pro ϑ_{m} není příliš složitý a nadšenci si jej mohou odvodit.[2]

$$\vartheta_{\mathrm{m}} = 4 \arcsin \sqrt{\frac{4-n^2}{3n^2}} - 2 \arccos \sqrt{\frac{n^2-1}{3}}\,,$$

kde n je index lomu.

[2] Význam funkcí arcsin, arccos je objasněn v seriálu dále.

Indexu lomu vody $n = 1{,}33$ odpovídá úhel $\vartheta_{\mathrm{m}} = 42^\circ$. Pokud se v daném směru všude nacházejí kapky vody, na nichž se může světlo odrážet, duha tvoří „kružnici“ se stále stejným úhlovým poloměrem 42°. Zpravidla však vidíme pouze tu část duhy, která je nad obzorem (poněvadž pouze tam je dostatek dešťových kapek na to, abychom něco zpozorovali; nicméně vytvoříme-li dostatek malých kapiček rozprašovačem, můžeme duhu vidět celou).

Pro řešení úlohy je podstatná především skutečnost, že úhlový poloměr duhy je stále stejný, bez ohledu na naše umístění. Ať se k duze tedy budeme „přibližovat“ jakkoliv, její „vzdálenost“ od nás bude stále stejná.

Na konec duhy tedy nelze dojít. Nedá se k ní přiblížit a navíc je, potvora, kruhová.

Poznámky k došlým řešením

Někteří řešitelé argumentovali skutečností, že zjevení duhy je podmíněno přítomností kapek vody. Za konec duhy lze tedy považovat místo, kde končí déšť, na němž se světlo odráží a rozkládá.

Všichni řešitelé dle očekávání odpověděli víceméně správně v tom smyslu, že na konec duhy nelze dojít nebo že konec duhy je na konci deště. Při hodnocení jsme tedy přihlíželi téměř výhradně k precisnosti a srozumitelnosti zdůvodnění uvedeného závěru.

Jáchym Sýkora `jachym@fykos.cz`
Marek Nečada `marekn@fykos.cz`

Úloha II.E ... Nasycený a vypuštěný

5 bodů; průměr 2.35; řešilo 31 studentů

Nasypete-li do sklenice s vodou špetku soli, sůl se zpravidla bez obtíží rozpustí. Budete-li však sůl do vody dále přidávat, dojde při určitém množství k nasycení roztoku *a další sůl se již rozpouštět nebude.*

Změřte co nejpřesněji rozpustnost kuchyňské soli (nebo jiné rozumně rozpustné látky) ve vodě z vodovodu. Naměřenou hodnotu porovnejte s hodnotou v tabulkách a případnou odlišnost vysvětlete. (Rozpustností rozumíme poměr hmotností rozpouštěné látky ke hmotnosti rozpouštědla při nasycení roztoku.)

Teorie

Než začneme se samotným měřením, je dobré rozmyslet si, co přesně budeme měřit, jakým způsobem bude daný experiment probíhat a jaký výsledek očekáváme. Podle zadání máme co nejpřesněji změřit rozpustnost kuchyňské soli ve vodě z vodovodu.

Abychom co nejvíce snížili chybu, kterou je každé fyzikální měření zatíženo, snažíme se pracovat důkladně s co nejpřesnějšími pomůckami. Pro náš experiment použijeme nejlépe rovnoramenné váhy (či jiné váhy měřící s velkou přesností) a libovolnou nádobu na vodu vhodných proporcí (např. obyčejnou skleničku).

Samotné měření bude probíhat tak, že do skleničky vždy napustíme jisté množství vody z vodovodu, do které postupně přidáme po malých dávkách kuchyňskou sůl a za pomoci míchání necháme rozpustit. Sůl budeme přidávat do doby, než se přestane v roztoku rozpouštět.

Rozpustnost každé látky závisí na vlastnostech látky samotné, vlastnostech rozpouštědla, teplotě a tlaku okolí. Předpokládáme, že teplota a tlak okolí se během experimentu nezměnili. Množství rozpuštěné látky (kuchyňské soli) se v závislosti na množství rozpouštědla (vody z vodovodu) lineárně stoupá – jedná se o přímou úměru (čím více vody máme, tím víc soli je třeba k nasycení roztoku).

Měření

Při vážení nesmíme zapomenout váhy z počátku vyvážit na hmotnost skleničky, proto nejprve určíme hmotnost skleničky. V našem případě $m_{\text{sklenička}} = 200\,\text{g}$.

Rozpustnost soli ve vodě měříme pro pět různých hodnot hmotností vody (50 g, 100 g, 150 g, 200 g a 250 g), přičemž měření pro každou hodnotu hmotnosti vody provedeme třikrát.

Odchylku při vážení vody (a vody se solí) určíme jako polovinu nejmenšího dílku stupnice váhy, v našem případě tedy ±0,5 g.

Naměřené hodnoty můžeme vidět v tabulce 1[3].

$\frac{m_{\text{voda}}}{\text{g}}$	$\frac{m_{\text{sůl}}}{\text{g}}$				rozpustnost
	1. pokus	2. pokus	3. pokus	*průměr*	
50	18,0	17,5	18,5	$(18{,}00 \pm 0{,}29)$	$(0{,}360 \pm 0{,}029)$
100	34,5	34,0	35,0	$(34{,}50 \pm 0{,}29)$	$(0{,}345 \pm 0{,}015)$
150	54,0	55,0	53,5	$(54{,}17 \pm 0{,}44)$	$(0{,}361 \pm 0{,}010)$
200	73,5	74,0	72,5	$(73{,}33 \pm 0{,}44)$	$(0{,}367 \pm 0{,}007)$
250	86,0	85,5	87,0	$(86{,}17 \pm 0{,}44)$	$(0{,}345 \pm 0{,}006)$

Tabulka 1: Výsledky měření rozpustnosti soli

Diskuse

Podle tabulky rozpustnosti uvedené na stránkách Fakulty chemické VUT[4] je při teplotě 20 °C (což je z uvedených hodnot teplota nejbližší teplotě vody z vodovodu) rozpustnost soli 0,360 (rozpuštění 36,0 g soli ve 100 g vody při nasycení roztoku).

Při váženém[5] zprůměrování naměřených hodnot rozpustnosti jsme experimentálně rozpustnost soli určili jako $0{,}355 \pm 0{,}002$ (rozpuštění 35,5 g soli ve 100 g vody při nasycení roztoku, o zpracování chyby měření někdy příště). Mezi naměřenou a teoretickou hodnotou rozpustnosti soli je jak vidno rozdíl v přesnosti. To je způsobena chybovostí při provádění experimentu – roli zde hraje lidský faktor (určit přesně kdy je již roztok nasycený a nepřesnost při měření váhami. Dále v tabulkách je uváděná rozpustnost čistého NaCl v destilované vodě, zatímco my pracujeme s částečně znečištěnými látkami (kuchyňská sůl s příměsí jódu, voda z vodovodu). Drobnou roli v odchylce od teoretického výsledku může hrát také okolní teplota a tlak.

Tomáš Havelka
`havis@fykos.cz`

[3] Chyba průměru v tabulce je čistě směrodatná odchylka průměru, u chyb rozpustnosti je již započtena chyba váhy.

[4] `http://www.fch.vutbr.cz/home/richtera/download/rozpustnosti.pdf`

[5] Vahou je zde převrácený kvadrát odchylky rozpustnosti pro danou hmotnost vody

Úloha II.C ... seriálová

5 bodů; průměr 3,94; řešilo 35 studentů

*a) Vypočtěte proudy I_{2a}, I_{3a} a I_{4a} ve stejném elektrickém obvodu jako na obrázku **??**, když budeme postupně odebírat jednotlivé články baterie ($U_2 = 4{,}5\,\mathrm{V}$, $U_3 = 3\,\mathrm{V}$ a $U_4 = 1{,}5\,\mathrm{V}$). Vypočtené proudy zobrazte do grafu (závislost proudu na napětí). Co pozorujeme?*

*b) Vypočtěte proudy I_{2b}, I_{3b} a I_{4b} ve stejném elektrickém obvodu jako na obrázku **??**, když budeme postupně vyměňovat rezistor R_1 za rezistory $R_2 = 200\,\Omega$, $R_3 = 300\,\Omega$ a $R_4 = 400\,\Omega$. Vypočtené proudy zobrazte do grafu (závislost proudu na odporu). Co pozorujeme?*

*c) Na obrázku **??** je elektrotechnické schéma, které zobrazuje zdroj a tři rezistory v serio-paralelním zapojení. Vypočtěte celkový odpor. Dále vypočtěte napětí a proudy na jednotlivých rezistorech.*

a) Vypočteme proudy I_{2a}, I_{3a} a I_{4a}:

$$I_{2a} = \frac{U_2}{R_1} = \frac{4{,}5\,\mathrm{V}}{100\,\Omega} = 0{,}045\,\mathrm{A} = 45\,\mathrm{mA}\,,$$
$$I_{3a} = \frac{U_3}{R_1} = \frac{3\,\mathrm{V}}{100\,\Omega} = 0{,}03\,\mathrm{A} = 30\,\mathrm{mA}\,,$$
$$I_{4a} = \frac{U_4}{R_1} = \frac{1{,}5\,\mathrm{V}}{100\,\Omega} = 0{,}015\,\mathrm{A} = 15\,\mathrm{mA}\,.$$

Do grafu můžeme zakreslit i proud I_1, který jsme vypočítali v textu seriálu. V grafu 4a vidíme důležitou vlastnost – proud I elektrickým odvodem je přímo úměrný napětí U na zdroji.

b) Z Ohmova zákona vypočteme proudy I_{2b}, I_{3b} a I_{4b}:

$$I_{2b} = \frac{U_1}{R_2} = \frac{6\,\mathrm{V}}{200\,\Omega} = 0{,}030\,\mathrm{A} = 30\,\mathrm{mA}\,,$$
$$I_{3b} = \frac{U_1}{R_3} = \frac{6\,\mathrm{V}}{300\,\Omega} = 0{,}020\,\mathrm{A} = 20\,\mathrm{mA}\,,$$
$$I_{4b} = \frac{U_1}{R_4} = \frac{6\,\mathrm{V}}{400\,\Omega} = 0{,}015\,\mathrm{A} = 15\,\mathrm{mA}\,.$$

Při vykreslování grafu můžeme opět použít i proud I_1. Z grafu 4b vidíme druhou důležitou vlastnost – proud I elektrickým obvodem je nepřímo úměrný celkovému odporu R.

c) Nejprve vypočteme celkový odpor R_{56} rezistorů R_5 a R_6

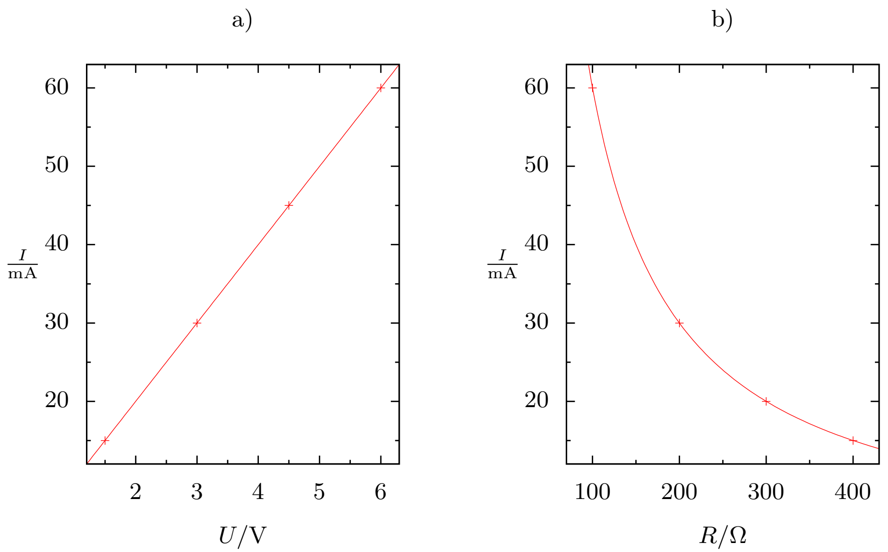
$$R_{56} = \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6} = \frac{300\,\Omega \cdot 400\,\Omega}{300\,\Omega + 400\,\Omega} = \frac{120000}{700}\,\Omega = \frac{1200}{7}\,\Omega \doteq 171{,}4\,\Omega\,.$$

Potom spočteme celkový odpor R rezistorů R_{56} a R_7

$$R = R_{56} + R_7 = \frac{1200}{7}\,\Omega + 500\,\Omega = \frac{4700}{7}\,\Omega \doteq 671{,}4\,\Omega\,.$$

Nyní vypočteme proud protékající celým obvodem pomocí Ohmova zákona.

$$I = \frac{U}{R} = \frac{6\,\mathrm{V}}{\frac{4700}{7}\,\Omega} = \frac{42}{4700}\,\mathrm{A} \doteq 0{,}00894\,\mathrm{A} = 8{,}94\,\mathrm{mA}$$



Obr. 4: Grafické vyjádření Ohmova zákona

Tento proud prochází rezistorem R_7. Rezistorem R_6 prochází proud I_6 a rezistorem R_5 prochází proud I_5, pro které platí

$$I_5 + I_6 = I\,.$$

Na obou rezistorech (R_6 i R_5) je stejné napětí U_{56}. Napětí U_7 na rezistoru R_7 vypočteme jako

$$U_7 = R_7 I = 500\,\Omega \cdot \frac{42}{4700}\,\mathrm{A} = \frac{210}{47}\,\mathrm{V} \doteq 4{,}47\,\mathrm{V}\,.$$

Napětí na rezistorech R_5 a R_6 je „zbytek“ do celkového napětí zdroje.

$$U_{56} = U - U_7 = 6\,\mathrm{V} - \frac{210}{47}\,\mathrm{V} = \frac{72}{47}\,\mathrm{V} \doteq 1{,}53\,\mathrm{V}$$

Nakonec vypočteme proudy I_5 a I_6, které tekou rezistory R_5 a R_6:

$$I_5 = \frac{U_{56}}{R_5} = \frac{\frac{72}{47}\,\mathrm{V}}{300\,\Omega} = \frac{6}{1175}\,\mathrm{A} \doteq 0{,}00511\,\mathrm{A} = 5{,}11\,\mathrm{mA}$$

$$I_6 = \frac{U_{56}}{R_6} = \frac{\frac{72}{47}\,\mathrm{V}}{400\,\Omega} = \frac{9}{2350}\,\mathrm{A} \doteq 0{,}00383\,\mathrm{A} = 3{,}83\,\mathrm{mA}\,.$$

Jako kontrola (že se nám žádný proud neztrácí ani nevytváří) nám poslouží součet proudů I_5 a I_6, který se musí rovnat celkovému proudu I. Toto skutečně platí.
Tím jsme vypočítali všechny proudy a napětí na jednotlivých rezistorech.

Poznámky k došlým řešením

Někteří z vás postupovali jinak, než je zde uvedeno. Většinou jste spočítali napětí $U_{56} = R_{56}I_{56}$ (kde $I_{56} = I_5 + I_6 = I_7 = I$) a součtem $U_{56} + U_7$ zkontrolovali správnost.
Část z vás počítala proudy I_5 a I_6 z opačného poměrů odporů R_6 a R_5, když věděla jejich součet, což je také korektní.

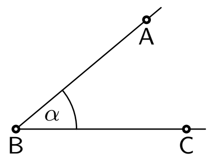
Petr Pecha
xlfd@fykos.cz

Výfučtení: Goniometrické funkce

Tentokrát se seriál bude zabývat spíše matematickým než fyzikálním tématem. Pokud počítáte nějakou úlohu, ve které vystupují síly, tak je potřebujete dost často rozložit na součet a dopočítat v něm ty, které neznáte. Tak nejen k tomu nám slouží goniometrické funkce. Pod tímto odstrašujícím názvem se skrývají tři funkce (sinus, cosinus, tangens), které nám převádějí velikost úhlu na číslo. To nám umožňuje například dopočítat délky stran a velikosti úhlů v trojúhelníku.

Úhly a jak je měřit

Úhel je prostor mezi dvěma polopřímkami, tzv. rameny. Průsečík ramen tvoří vrchol úhlu a pro označení vybereme libovolné dva body, na každém rameni jeden, což dohromady dává trojici písmen. Název vrcholu pak píšeme vždy doprostřed. Úhel na obrázku 5 je tedy úhel ABC (zkráceně značíme $\measuredangle ABC$). Velice často se úhly značí řeckými písmeny ($\alpha, \beta, \gamma, \ldots$).



Obr. 5

Pro popis úhlu také používáme jeho velikost, kterou značíme $|\measuredangle ABC|$. Podle ní je dělíme do těchto skupin:

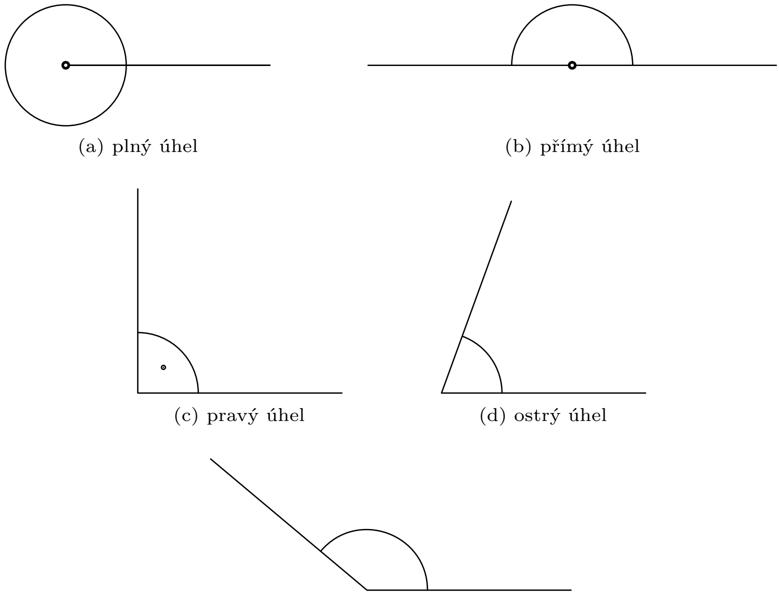
- plný úhel – ramena splývají a obsahuje zbytek roviny (obrázek 6a)
- přímý úhel – ramena tvoří jednu přímku (obrázek 6b)
- pravý úhel – ramena jsou na sebe kolmá (obrázek 6c)
- ostrý úhel – menší než pravý (obrázek 6d)
- tupý úhel – větší než pravý (obrázek 6e)

Ke správnému určení velikosti potřebujeme ještě jednotku. Na základní škole se k tomu nejčastěji používají stupně. V tom případě má plný úhel 360°, přímý (polovina plného) 180° a pravý (polovina přímého) 90°.

Můžete se setkat i s tzv. obloukovou mírou. Její základní jednotkou je 1 radián (v praxi se však jednotka radián zřídkakdy uvádí, zpravidla se ztotožňuje s jednotkou a velikost úhlu považujeme za bezrozměrnou, tedy $1\,\mathrm{rad} = 1$). Takto velký úhel na kružnici vytíná oblouk dlouhý jako je poloměr kružnice. Kružnice o poloměru r má potom obvod $2\pi r$. Plný úhel by obsahoval celou kružnici, má tedy velikost 2π. Podobně přímý úhel má velikost π, protože jí obsahuje už jen polovinu. Výhoda měření úhlu v radiánech je, že rovnou víme, jak dlouhý je oblouk, který vytíná na kružnici – stačí velikost úhlu přenásobit poloměrem oné kružnice.

Převodní vztah mezi radiány a stupni získáme snadno například vyjádřením velikosti plného úhlu

$$360^\circ = 2\pi\,.$$



(a) plný úhel

(b) přímý úhel

(c) pravý úhel

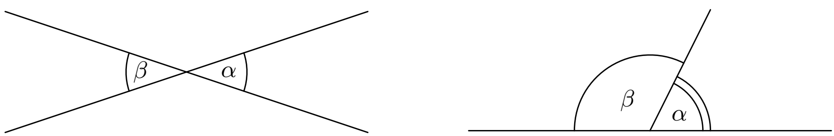
(d) ostrý úhel

(e) tupý úhel

Obr. 6: Taxonomie úhlů

Jak počítat s úhly a Pythagorova věta

Pokud jsou dva úhly ve vhodné poloze vůči sobě, dokážeme dopočítat jeden z druhého (obrázek 7).



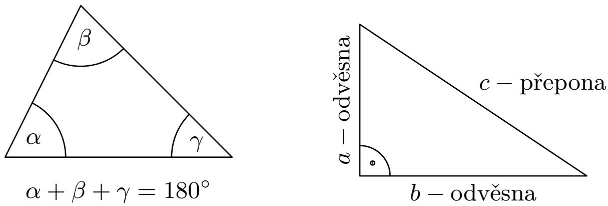
(a) vrcholové úhly, $\beta = \alpha$

(b) vedlejší úhly, $\beta = 180^\circ - \alpha$

Obr. 7: Vztahy mezi úhly

Útvar, v němž se s úhly počítá asi nejlépe a nejčastěji, je trojúhelník. Součet vnitřních úhlů každého trojúhelníku je přímý úhel – 180° (obrázek 8a). Známe-li dva úhly v trojúhelníku, umíme dopočítat zbývající třetí.

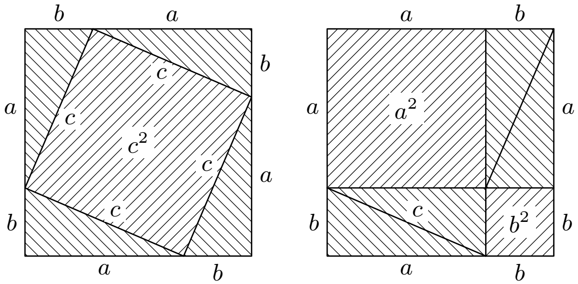
Speciálním případem trojúhelníku je trojúhelník pravoúhlý, který má jeden ze tří vnitřních úhlů pravý (obrázek 8b). Jeho nejdelší strana (ta naproti pravému úhlu) se jmenuje *přepona* a zbylým dvěma říkáme *odvěsny*.



(a) Součet úhlů v trojúhelníku

(b) Názvosloví pravoúhlého trojúhelníku

Obr. 8: Trojúhelník



Obr. 9: Důkaz Pythagorovy věty

V pravoúhlém trojúhelníku platí tzv. *Pythagorova věta*. Při označení velikosti přepony písmenem c a odvěsen písmeny a a b, zapíšeme vztah mezi nimi takto

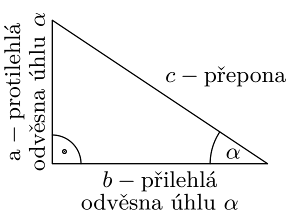
$$c^2 = a^2 + b^2 \,.$$

Uvedeme si tu i jeden obrázkový důkaz této věty. Nakreslíme si dva čtverce o straně $a + b$ a každý rozdělíme na několik dílů podle obrázku 9. V dělení napravo máme dva čtverce. Jeden o obsahu a^2 a druhý o obsahu b^2. V levém obrázku je čtverec pouze jeden, o obsahu c^2. V obou čtvercích jsou čtyři stejné trojúhelníky, které zabírají v obou případech stejný obsah. Tedy platí, že $c^2 = a^2 + b^2$, kde c je přepona trojúhelníků a b, a jsou jejich odvěsny.

Goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku

Vezmeme si pravoúhlý trojúhelník, kde si označíme jako c přeponu, α jeden z ostrých úhlů, a odvěsnu naproti α a b zbývající odvěsnu.

Pak goniometrické funkce úhlu α zavedeme:



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Čteme: „Sinus úhlu α je poměr délky protilehlé odvěsny k délce přepony.“

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Čteme: „Kosinus úhlu α je poměr délky přilehlé odvěsny k délce přepony."

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

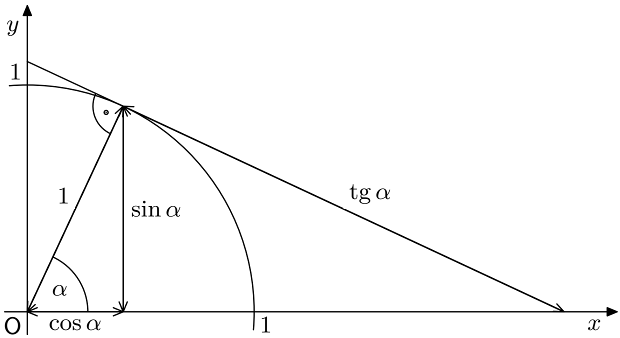
Čteme: „Tangens úhlu α je poměr délek protilehlé a přilehlé odvěsny."

Můžeme si všimnout, že platí $\operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$.

Tahle definice má však tu vadu, že umíme spočítat goniometrické funkce pouze úhlů o velikosti od 0° do 90°. Proto se to pokusíme ještě nějak rozšířit i na další velikosti úhlů.

Goniometrické funkce a jednotková kružnice

Jednotková kružnice je kružnice o poloměru $r = 1$. Její střed pro názornost umístíme do počátku souřadné soustavy. Zvolíme si libovolný úhel α s vrcholem ve středu kružnice. Na obrázku 10 si najdeme, kde jsou hodnoty goniometrických funkcí.



Obr. 10

Bylo by vhodné mít pomůcku, podle které určíme hodnotu goniometrické funkce pro jakoukoliv velikost α. Nakresleme si takový obrázek pro $\sin\alpha$. Naneseme si na x-ovou osu stupně. Pro každou hodnotu úhlu α si najdeme na jednotkové kružnici velikost sinu pro tento úhel (je to y-ová souřadnice bodu na kružnici) a zakreslíme ji na správné místo do grafu (obrázek 11). Stejným způsobem bychom mohli sestrojit i graf ostatních (obrázky 12 a 13).

Fyzikální úloha k procvičení

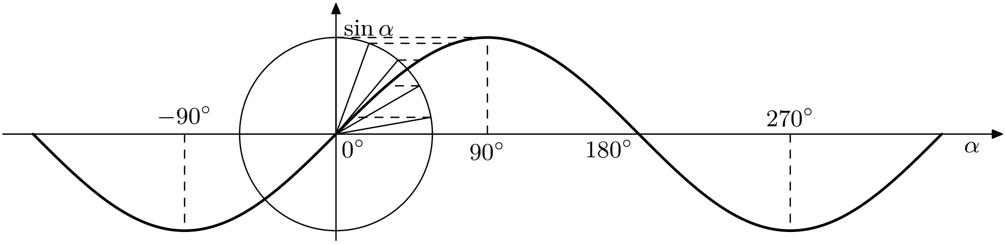
Novou teorii si ukážeme na příkladu ze života.

Malý Schlitt za sebou táhne stále stejně rychle na provázku dřevěné sáňky o hmotnosti 5 kg. *Úhel, který svírá provázek s podlahou je $\alpha = 30°$ (obrázek 14). Jakou silou F_s musí Schlitt sáně táhnout?*

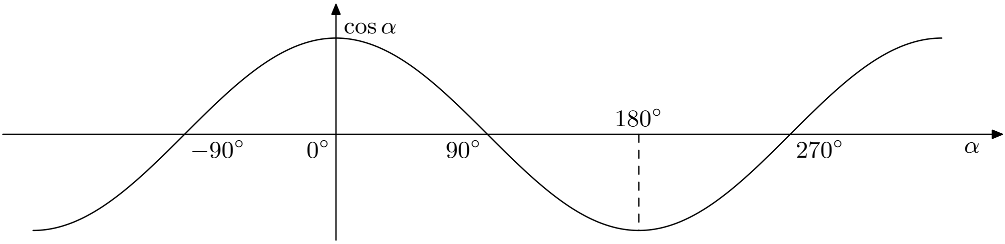
Následující řešení úlohy je úplně špatně. V brzké době zde naleznete jinou úlohu.

Vycházíme z toho, že při rovnoměrném přímočarém pohybu jsou síly v rovnováze. Spočítáme si gravitační sílu, která působí na sáně $F_G = mg = 50\,\mathrm{N}$. Víme, že platí $\sin\alpha = F_G/F_s$. Vyjádříme si a dosadíme

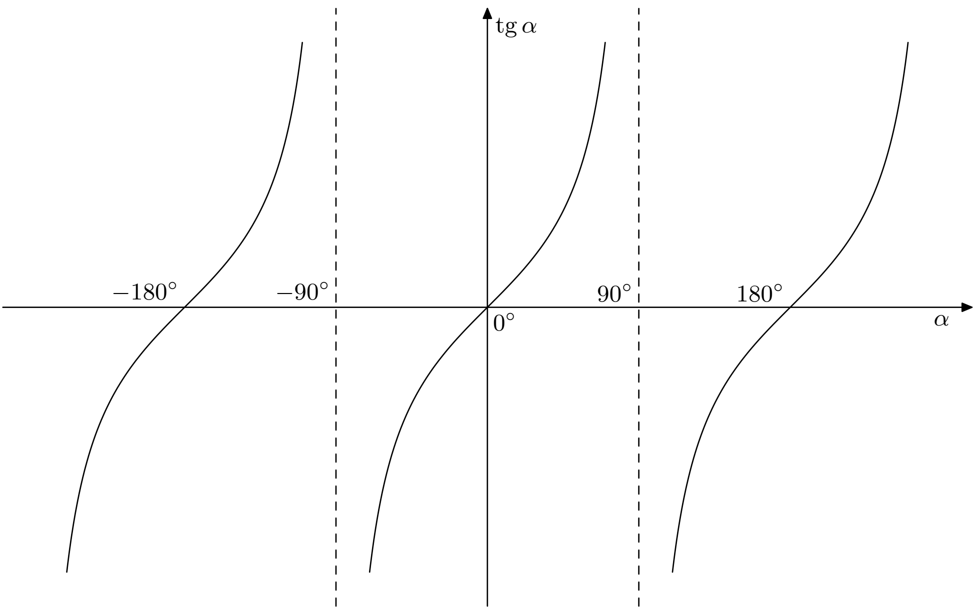
$$F_s = \frac{F_G}{\sin\alpha} = \frac{50\,\mathrm{N}}{\frac{1}{2}} = 100\,\mathrm{N}\,.$$



Obr. 11: Graf funkce sinus



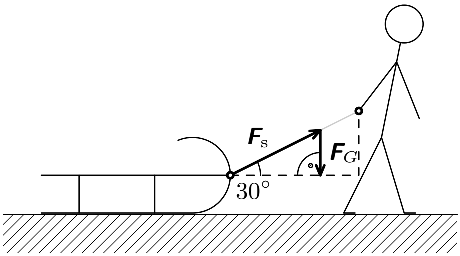
Obr. 12: Graf funkce cosinus



Obr. 13: Graf funkce tangens

α	α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$0°$	$0\,\mathrm{rad}$	0	1	0
$30°$	$\frac{\pi}{6}\,\mathrm{rad}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}\,\mathrm{rad}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}\,\mathrm{rad}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}$	1	0	neexistuje

Tabulka 2: Důležité hodnoty goniometrických funkcí



Obr. 14: Schlitt táhne sáně

Schlitt musí sáně táhnout silou $100\,\mathrm{N}$.

Cyklometrické funkce

Cyklometrické funkce jsou opačné funkce k funkcím goniometrickým (např. arcus cosinus doslova znamená úhel cosinu). Tyto funkce slouží k tomu, když známe hodnotu například $\sin\alpha = 1/2$ a chceme z něho znovu vypočítat, jak je velký úhel α. Pak $\arcsin 1/2 = \alpha$.

Přesnou hodnotu si můžete spočítat třeba na kalkulačce. Měla by to umět každá, která umí počítat normální goniometrické funkce. Většinou jsou tam značeny takto: arcus sinus jako $\sin^{-1}$, arcus cosinus jako $\cos^{-1}$ a arcus tangens jako tg^{-1}.

Úloha III.C ... Růžová

5 bodů

a) Růžový trabant vážící $1{,}5\,\mathrm{t}$ jede s kopce stálou rychlostí $40\,\mathrm{km/h}$. Auto brzdí. To má za následek brzdnou sílu $800\,\mathrm{N}$. Určete sklon kopce.
b) Na lanku délky $2\,\mathrm{m}$ je zavěšena růžová kulička. Kyvadlo vychýlíme o $5°$. O kolik se zvedne střed kuličky ve vychýlené poloze oproti původní?

c) Anička koupila bratrovi k Vánocům kouzelnickou hůlku dlouhou 25 cm a shání růžovou krabičku, do které hůlku zabalí. Jak vysoká má být krabička, když její podstava má rozměry 10 a 15 cm. Anička chce, aby hůlka v krabičce ležela v pozici tělesové úhlopříčky.

Pořadí řešitelů po II. sérii

Kategorie šestých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	E	C	II	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	1	3	4	3	5	5	**21**	*42*	
1.	*Olga Krumlová*	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*3*	

Kategorie sedmých ročníků

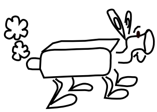
	jméno	škola	1	2	3	4	E	C	II	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	1	3	4	3	5	5	**21**	*42*	
1.	*Jan Preiss*	G Lovosice	1	–	–	2	1	2	**6**	*13*	
2.	*Pham The Huynh Duc*	G Šumperk	0	–	1	1	1	3	**6**	*11*	
3.	*Mikuláš Plešák*	G Jablonec nad Nisou	–	–	–	–	–	–	**0**	*10*	
4.	*Martin Orság*	G Vyškov	–	–	–	3	–	–	**3**	*8*	
5.	*Jan Macháček*	G Holešov	1	–	0	1	–	–	**2**	*5*	
6.	*Adéla Hanková*	G Lovosice	–	–	–	–	–	–	**0**	*2*	

Kategorie osmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	E	C	II	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	1	3	4	3	5	5	**21**	*42*	
1.	*Martin Štyks*	G Lovosice	1	5	3	3	5	5	**22**	*39*	
2.	*Jáchym Bártík*	G Havlíčkův Brod	1	5	4	2	2	5	**19**	*37*	
3.	*Matěj Mezera*	ZŠ Havlíčkův Brod, Nuselská	1	5	4	3	4	5	**22**	*36*	
4.	*Klára Ševčíková*	G Uherské Hradiště	1	5	2	2	5	5	**20**	*35*	
5.	*Jaromír Mielec*	G Ostrava-Zábřeh	1	5	4	2	3	5	**20**	*31*	
5.	*Simona Gabrielová*	G České Budějovice, Jírovcova	1	2	4	2	1	5	**15**	*31*	
7.	*Jaroslav Janoš*	G Zlín, Lesní čtvrť	1	5	4	2	3	5	**20**	*30*	
8.	*Matěj Štula*	GSOŠPg Liberec	0	3	4	3	3	5	**18**	*26*	
9.	*Lucie Hronová*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	1	5	4	1	4	–	**15**	*25*	
10.	*Jan Holásek*	G Ústí nad Orlicí	1	–	4	1	–	5	**11**	*24*	
11.	*Vjačeslav Horbač*	G Liberec, Jeronýmová	1	2	3	2	2	–	**10**	*23*	
12.	*Dinh Huy Nhat Minh*	G Kadaň	1	3	3	2	–	3	**12**	*22*	
12.	*Tomáš Macek*	Jiráskovo G Náchod	1	–	3	1	2	4	**11**	*22*	
14.	*David Žáček*	G Ch. Dopplera Praha	1	2	2	2	–	5	**12**	*18*	
15.	*Sebastian Duarte*	G Ch. Dopplera Praha	–	2	2	1	–	–	**5**	*14*	
16.	*Martin Griner*	G Ch. Dopplera Praha	1	3	2	2	1	–	**9**	*13*	
16.	*Tamara Maňáková*	G Šumperk	0	1	0	1	2	1	**5**	*13*	
16.	*Zuzana Matůšová*	CZŠ Veselí nad Moravou	–	–	–	1	–	2	**3**	*13*	
19.	*Aleksej Gaj*	G Ch. Dopplera Praha	1	1	2	2	–	–	**6**	*12*	
19.	*Klára Slováčková*	G Ch. Dopplera Praha	1	–	4	1	–	–	**6**	*12*	
19.	*Martina Fusková*	G Uherské Hradiště	0	–	–	–	2	–	**2**	*12*	
22.	*Kačka Feslová*	G Ch. Dopplera Praha	0	3	–	2	–	–	**5**	*11*	
22.	*Markéta Holubová*	G Ch. Dopplera Praha	1	–	4	1	–	–	**6**	*11*	
22.	*Tomáš Volejník*	G Ch. Dopplera Praha	1	–	4	2	–	–	**7**	*11*	
22.	*Vojtěch Dědek*	G Ch. Dopplera Praha	1	3	–	1	–	–	**5**	*11*	
26.	*Miloš Müller*	ZŠ Jesenice	0	3	1	1	–	3	**8**	*10*	
26.	*Roman Chasák*	ZŠ a MŠ J. Schrotha, Lipová-lázně	0	3	2	1	1	3	**10**	*10*	
28.	*Jan Ondruš*	Gymnázium Ostrov	–	–	–	–	–	–	**0**	*9*	
28.	*Sebastian Janda*	G Ch. Dopplera Praha	1	–	–	1	1	–	**3**	*9*	
28.	*Tereza Čechová*	G Ch. Dopplera Praha	0	3	–	1	–	–	**4**	*9*	
31.	*Jakub Matějka*	G Ch. Dopplera Praha	1	–	2	1	–	–	**4**	*8*	
31.	*Jan Kašník*	Gymnázium Cheb	–	–	–	–	–	–	**0**	*8*	
31.	*Kateřina Zemková*	GOB Telč	–	–	–	–	–	–	**0**	*8*	
34.	*Jonáš Uřičář*	CZŠ Veselí nad Moravou	–	–	–	–	–	–	**0**	*7*	
35.	*Edvard Lanz*	G Ch. Dopplera Praha	1	–	0	2	–	–	**3**	*6*	
35.	*František Couf*	G Ch. Dopplera Praha	1	–	0	1	–	–	**2**	*6*	
35.	*Matěj Coufal*	G Havlíčkův Brod	–	0	2	0	1	–	**3**	*6*	
38.	*Jakub Mohaupt*	ZŠ Dr. Miroslava Tyrše 8.C	–	–	–	–	–	–	**0**	*5*	
38.	*Miky Hosnedl*	G Ch. Dopplera Praha	0	–	0	1	–	–	**1**	*5*	
38.	*Ondřej Altman*	G Ch. Dopplera Praha	–	–	–	–	–	–	**0**	*5*	
41.	*Tereza Doležalová*	ZŠ a MŠ Otnice	–	–	1	2	1	–	**4**	*4*	
41.	*Tomáš Hlavatý*	G Kadaň	–	–	–	–	–	–	**0**	*4*	
43.	*Petr Chmel*	Dvořákovo G Kralupy nad Vltavou	–	–	–	–	–	–	**0**	*2*	

Kategorie devátých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	E	C	II	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	1	3	4	3	5	5	**21**	*42*	
1.	*Marek Janka*	Slovanské G Olomouc	0	5	4	2	2	5	**18**	*37*	
1.	*Zdeněk Nekula*	ZŠ Prosiměřice	1	4	4	2	2	4	**17**	*37*	
3.	*Klára Stefanová*	G B. Němcové Hradec Králové	1	5	4	2	4	5	**21**	*32*	
4.	*Josef Kolář*	ZŠ Litovel, Vítězná	0	5	3	1	4	5	**18**	*29*	
4.	*Matěj Hrabal*	G Uherské Hradiště	0	4	4	2	4	4	**18**	*29*	
6.	*Daniel Pišťák*	G Ch. Dopplera Praha	1	3	3	3	–	3	**13**	*20*	
7.	*Filip Šmejkal*	G Uherské Hradiště	1	3	1	1	3	4	**13**	*19*	
7.	*Gabriela Šmejkalová*	G Uherské Hradiště	1	3	1	1	3	4	**13**	*19*	
9.	*Jan Hladík*	G Ch. Dopplera Praha	1	–	1	3	2	4	**11**	*16*	
9.	*Martin Rajdl*	G Ch. Dopplera Praha	1	–	3	1	2	4	**11**	*16*	
9.	*Vojtěch Hýbl*	G8 Mladá Boleslav	0	3	1	1	–	4	**9**	*16*	
12.	*Zuzana Viceníková*	G Uherské Hradiště	0	2	1	1	3	–	**7**	*15*	
13.	*Kryštof Rühr*	G Ch. Dopplera Praha	1	–	4	2	2	4	**13**	*13*	
13.	*Tomáš Vymazal*	RG a ZŠ Prostějov	1	3	1	2	1	–	**8**	*13*	
13.	*William Tatarko*	G Ch. Dopplera Praha	1	–	3	1	–	4	**9**	*13*	
16.	*Anna Kovářiková*	RG a ZŠ Prostějov	–	–	–	–	–	–	**0**	*12*	
17.	*Marek Otýpka*	G Židlochovice	–	2	–	2	–	4	**8**	*10*	
18.	*Tomáš Pauček*	G Ch. Dopplera Praha	0	–	–	2	–	4	**6**	*9*	
19.	*Čeněk Krejčí*	ZŠ a MŠ Nebušice	–	–	–	–	–	–	**0**	*8*	
19.	*Dušan Klíma*	GFMP Rychnov nad Kněžnou	–	–	–	–	–	–	**0**	*8*	
19.	*Ester Sgallová*	G Ch. Dopplera Praha	1	–	–	1	–	–	**2**	*8*	
19.	*Michal Drašnar*	G Ch. Dopplera Praha	1	–	2	1	–	3	**7**	*8*	
23.	*Aneta Doležalová*	ZŠ Nížkov	–	–	–	–	–	–	**0**	*5*	
23.	*Lukáš Skořepa*	G Ch. Dopplera Praha	1	–	–	1	–	2	**4**	*5*	
25.	*Michal Kunc*	G Ch. Dopplera Praha	1	–	–	–	–	–	**1**	*4*	



FYKOS – Výfuk
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://vyfuk.fykos.cz`
e-mail pro řešení: `vyfuk-reseni@fykos.cz`
e-mail: `vyfuk@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.