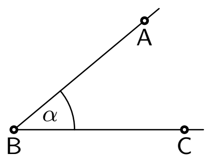
Výfučtení: Goniometrické funkce

Tentokrát se seriál bude zabývat spíše matematickým než fyzikálním tématem. Pokud počítáte nějakou úlohu, ve které vystupují síly, tak je potřebujete dost často rozložit na součet a dopočítat v něm ty, které neznáte. Tak nejen k tomu nám slouží goniometrické funkce. Pod tímto odstrašujícím názvem se skrývají tři funkce (sinus, cosinus, tangens), které nám převádějí velikost úhlu na číslo. To nám umožňuje například dopočítat délky stran a velikosti úhlů v trojúhelníku.

Úhly a jak je měřit

Úhel je prostor mezi dvěma polopřímkami, tzv. rameny. Průsečík ramen tvoří vrchol úhlu a pro označení vybereme libovolné dva body, na každém rameni jeden, což dohromady dává trojici písmen. Název vrcholu pak píšeme vždy doprostřed. Úhel na obrázku 1 je tedy úhel ABC (zkráceně značíme $\measuredangle ABC$). Velice často se úhly značí řeckými písmeny ($\alpha, \beta, \gamma, \ldots$).



Obr. 1

Pro popis úhlu také používáme jeho velikost, kterou značíme $|\measuredangle ABC|$. Podle ní je dělíme do těchto skupin:

- plný úhel – ramena splývají a obsahuje zbytek roviny (obrázek 2a)
- přímý úhel – ramena tvoří jednu přímku (obrázek 2b)
- pravý úhel – ramena jsou na sebe kolmá (obrázek 2c)
- ostrý úhel – menší než pravý (obrázek 2d)
- tupý úhel – větší než pravý (obrázek 2e)

Ke správnému určení velikosti potřebujeme ještě jednotku. Na základní škole se k tomu nejčastěji používají stupně. V tom případě má plný úhel 360°, přímý (polovina plného) 180° a pravý (polovina přímého) 90°.

Můžete se setkat i s tzv. obloukovou mírou. Její základní jednotkou je 1 radián (v praxi se však jednotka radián zřídkakdy uvádí, zpravidla se ztotožňuje s jednotkou a velikost úhlu považujeme za bezrozměrnou, tedy $1\,\mathrm{rad} = 1$). Takto velký úhel na kružnici vytíná oblouk dlouhý jako je poloměr kružnice. Kružnice o poloměru r má potom obvod $2\pi r$. Plný úhel by obsahoval celou kružnici, má tedy velikost 2π. Podobně přímý úhel má velikost π, protože jí obsahuje už jen polovinu. Výhoda měření úhlu v radiánech je, že rovnou víme, jak dlouhý je oblouk, který vytíná na kružnici – stačí velikost úhlu přenásobit poloměrem oné kružnice.

Převodní vztah mezi radiány a stupni získáme snadno například vyjádřením velikosti plného úhlu

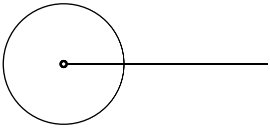
$$360^\circ = 2\pi\,.$$

Jak počítat s úhly a Pythagorova věta

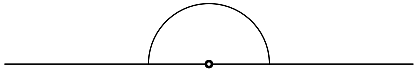
Pokud jsou dva úhly ve vhodné poloze vůči sobě, dokážeme dopočítat jeden z druhého (obrázek 3).

Útvar, v němž se s úhly počítá asi nejlépe a nejčastěji, je trojúhelník. Součet vnitřních úhlů každého trojúhelníku je přímý úhel – 180° (obrázek 4a). Známe-li dva úhly v trojúhelníku, umíme dopočítat zbývající třetí.

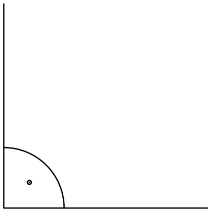
Speciálním případem trojúhelníku je trojúhelník pravoúhlý, který má jeden ze tří vnitřních úhlů pravý (obrázek 4b). Jeho nejdelší strana (ta naproti pravému úhlu) se jmenuje *přepona* a zbylým dvěma říkáme *odvěsny*.



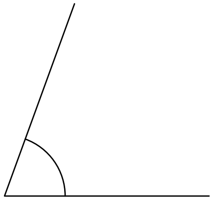
(a) plný úhel



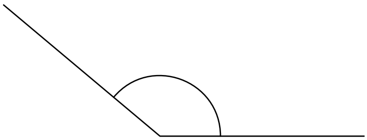
(b) přímý úhel



(c) pravý úhel

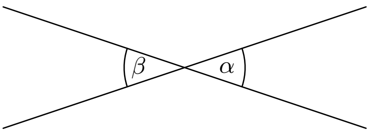


(d) ostrý úhel

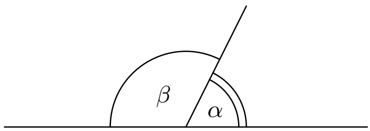


(e) tupý úhel

Obr. 2: Taxonomie úhlů



(a) vrcholové úhly, $\beta = \alpha$



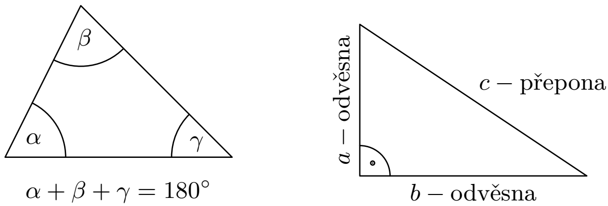
(b) vedlejší úhly, $\beta = 180^\circ - \alpha$

Obr. 3: Vztahy mezi úhly

V pravoúhlém trojúhelníku platí tzv. *Pythagorova věta.* Při označení velikosti přepony písmenem c a odvěsen písmeny a a b, zapíšeme vztah mezi nimi takto

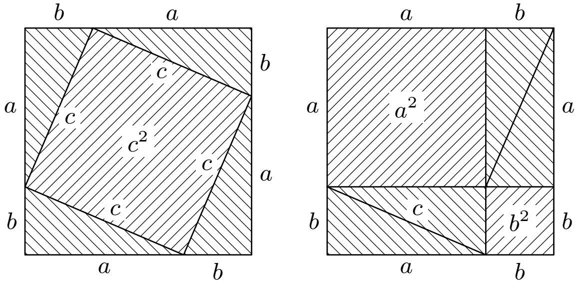
$$c^2 = a^2 + b^2 \,.$$

Uvedeme si tu i jeden obrázkový důkaz této věty. Nakreslíme si dva čtverce o straně $a + b$ a každý rozdělíme na několik dílů podle obrázku 5. V dělení napravo máme dva čtverce. Jeden o obsahu a^2 a druhý o obsahu b^2. V levém obrázku je čtverec pouze jeden, o obsahu c^2. V obou čtvercích jsou čtyři stejné trojúhelníky, které zabírají v obou případech stejný obsah. Tedy platí, že $c^2 = a^2 + b^2$, kde c je přepona trojúhelníků a b, a jsou jejich odvěsny.



(a) Součet úhlů v trojúhelníku (b) Názvosloví pravoúhlého trojúhelníku

Obr. 4: Trojúhelník

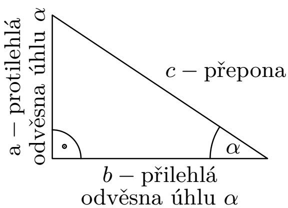


Obr. 5: Důkaz Pythagorovy věty

Goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku

Vezmeme si pravoúhlý trojúhelník, kde si označíme jako c přeponu, α jeden z ostrých úhlů, a odvěsnu naproti α a b zbývající odvěsnu.

Pak goniometrické funkce úhlu α zavedeme:



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Čteme: „Sinus úhlu α je poměr délky protilehlé odvěsny k délce přepony."

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Čteme: „Kosinus úhlu α je poměr délky přilehlé odvěsny k délce přepony."

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

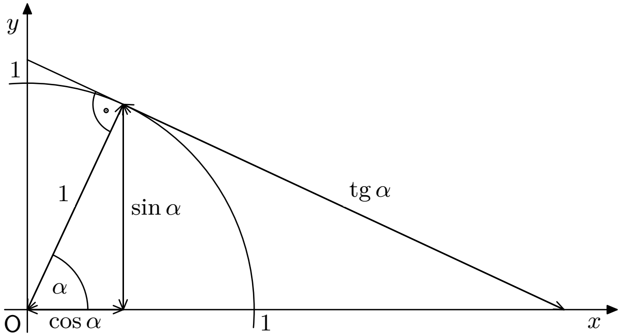
Čteme: „Tangens úhlu α je poměr délek protilehlé a přilehlé odvěsny."

Můžeme si všimnout, že platí $\operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$.

Tahle definice má však tu vadu, že umíme spočítat goniometrické funkce pouze úhlů o velikosti od 0° do 90°. Proto se to pokusíme ještě nějak rozšířit i na další velikosti úhlů.

Goniometrické funkce a jednotková kružnice

Jednotková kružnice je kružnice o poloměru $r = 1$. Její střed pro názornost umístíme do počátku souřadné soustavy. Zvolíme si libovolný úhel α s vrcholem ve středu kružnice. Na obrázku 6 si najdeme, kde jsou hodnoty goniometrických funkcí.

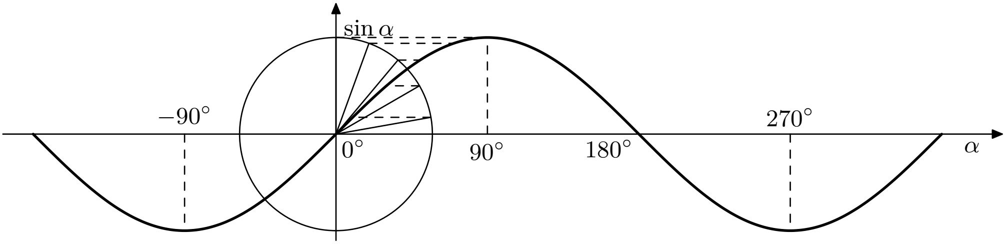


Obr. 6

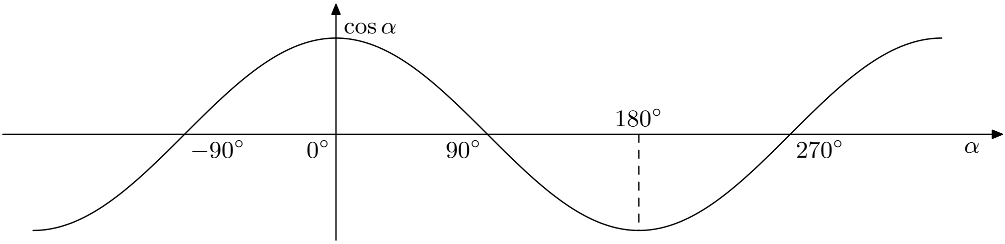
Bylo by vhodné mít pomůcku, podle které určíme hodnotu goniometrické funkce pro jakoukoliv velikost α. Nakresleme si takový obrázek pro $\sin\alpha$. Naneseme si na x-ovou osu stupně. Pro každou hodnotu úhlu α si najdeme na jednotkové kružnici velikost sinu pro tento úhel (je to y-ová souřadnice bodu na kružnici) a zakreslíme ji na správné místo do grafu (obrázek 7). Stejným způsobem bychom mohli sestrojit i graf ostatních (obrázky 8 a 9).

α	α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$0°$	$0\,\mathrm{rad}$	0	1	0
$30°$	$\frac{\pi}{6}\,\mathrm{rad}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}\,\mathrm{rad}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}\,\mathrm{rad}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}$	1	0	neexistuje

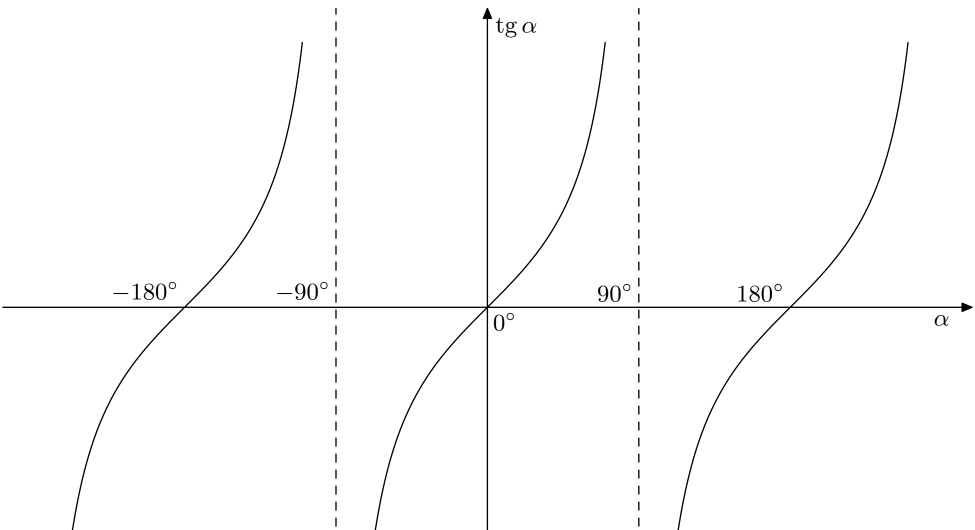
Tabulka 1: Důležité hodnoty goniometrických funkcí



Obr. 7: Graf funkce sinus



Obr. 8: Graf funkce cosinus

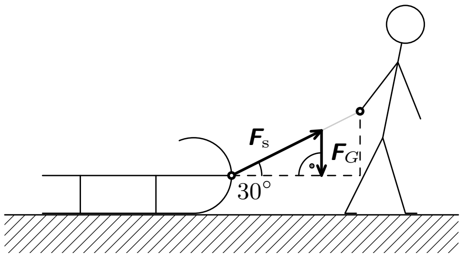


Obr. 9: Graf funkce tangens

Fyzikální úloha k procvičení

Novou teorii si ukážeme na příkladu ze života.

Malý Schlitt za sebou táhne stále stejně rychle na provázku dřevěné sáňky o hmotnosti 5 kg. *Úhel, který svírá provázek s podlahou je* $\alpha = 30^\circ$ *(obrázek 10). Jakou silou* F_s *musí Schlitt sáně táhnout?*



Obr. 10: Schlitt táhne sáně

Následující řešení úlohy je úplně špatně. V brzké době zde naleznete jinou úlohu.

Vycházíme z toho, že při rovnoměrném přímočarém pohybu jsou síly v rovnováze. Spočítáme si gravitační sílu, která působí na sáně $F_G = mg = 50\,\mathrm{N}$. Víme, že platí $\sin\alpha = F_G/F_\mathrm{s}$. Vyjádříme si a dosadíme

$$F_\mathrm{s} = \frac{F_G}{\sin\alpha} = \frac{50\,\mathrm{N}}{\frac{1}{2}} = 100\,\mathrm{N}\,.$$

Schlitt musí sáně táhnout silou 100 N.

Cyklometrické funkce

Cyklometrické funkce jsou opačné funkce k funkcím goniometrickým (např. arcus cosinus doslova znamená úhel cosinu). Tyto funkce slouží k tomu, když známe hodnotu například $\sin\alpha = 1/2$ a chceme z něho znovu vypočítat, jak je velký úhel α. Pak $\arcsin 1/2 = \alpha$.

Přesnou hodnotu si můžete spočítat třeba na kalkulačce. Měla by to umět každá, která umí počítat normální goniometrické funkce. Většinou jsou tam značeny takto: arcus sinus jako $\sin^{-1}$, arcus cosinus jako $\cos^{-1}$ a arcus tangens jako tg^{-1}.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.