

Předmluva

Fyzikální korespondenční seminář (dále jen FKS), jehož devátý ročník se vám dostává do rukou, patří tradičně k nejznámějším fyzikálním aktivitám pořádaným MFF UK pro studenty středních škol. Řešením FKS získají středoškoláci praxi v řešení fyzikálních problémů a zároveň hlubší náhled na jejich podstatu. Narozdíl od aktivit typu Fyzikální olympiády jsou úlohy zaměřené především na rozvíjení fyzikálního myšlení, bez kterého je nemožné řešit fyzikální problémy tak, aby řešení měla reálný vztah ke světu. Proto úlohy FKS svou obtížností vysoko přesahují rámec základního středoškolského vzdělání, a tedy i požadavky při přijímacím řízení na fyzikální směry vysokých škol, MFF UK z toho nevyjímá. Najdou se i úlohy, se kterými mají samotní studenti či učitelé na MFF UK problémy, což dokazuje to, že není jednoduché bádát nad problémy, které před nás příroda staví. To však neznamená, že to nemá smysl. Naopak!

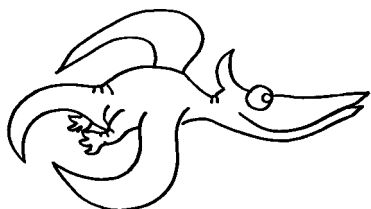
Jak probíhá FKS? *Šestkrát* do roka dostanou řešitelé (a případní další zájemci, např. učitelé fyziky) zadání obsahující *šest* úloh a navíc jednu úlohu *Seriálu na pokračování* (SNP). Úlohy jsou značeny římskou číslicí série a samotným pořadovým číslem v sérii (úloha III.4 značí čtvrtou úlohu třetí série, S.IV je příklad SNP ze čtvrté série). Řešitelé mají asi měsíc na rozmyšlenou a poté zašlou svá řešení problémů, kterými se zabývali. Se zadáním dalších sérií dostanou zpět svá okomentovaná řešení a vzorová řešení opravených úloh. Úlohy jsou obodovány různým počtem bodů (podle obtížnosti) a podle počtu dosažených bodů sestavíme pořadí řešitelů, které posíláme spolu s další sérií.

Pro nejúspěšnější řešitele pořádně dvakrát do roka týdenní soustředění v nějakém krásném zákoutí naší vlasti a na vítěze celého ročníku čeká zajímavá (fyzikální) cena. Rovněž rozesíláme řešitelům informace o možnostech studia fyziky, nejruznější nabídky fyzikálních aktivit (např. Přednáčky z moderní fyziky, Kroužek fyziky), prostě cokoli fyzikálně podnětného dáváme dle svých možností navědomí. Na druhou stranu si uvědomujeme, že středoškolská výuka fyziky je vždy primární, a tak se snažíme spolupracovat i s učiteli fyziky. Tato publikace může sloužit jako zásobárna zajímavých fyzikálních problémů, vzhledem k obtížnosti úloh může napomoci udržovat čtenáře ve "fyzikální kondici". A přitom je vše psáno středoškolsky přístupnou řečí.

Náš korespondenční seminář není ojedinělou aktivitou takového druhu ve střední Evropě, existují korespondenční semináře matematiky a programování při MFF UK, FKS má své příbuzné v Brně, Bratislavě a Košicích. Rozhodně si však nekonkurujeme, právě naopak – každý seminář nabízí trochu něco jiného, řešitelé si mohou vybrat z bohaté nabídky úloh a jsou i tací nadšenci, kteří úspěšně řeší několik seminářů najednou.

Velice rádi odpovíme na jakékoliv dotazy týkající se studia fyziky i samotných fyzikálních problémů, a to nejenom našim řešitelům. Jakýkoliv fyzikální nápad či problém, jakákoliv iniciativita či nabídka ke spolupráci je vítána na adrese:

FKS
KTF MFF UK
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8
e-mail: hradil@mail.kolej.mff.cuni.cz
tel.: (02) 8576 2493 (sektretariát KTF)
(02) 2191 2526 (místnost FKS)



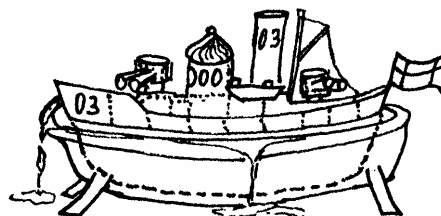
Zadání

Úloha I. 1 ... loď ve vaně

Může bitevní loď plovat ve vaně?

Máme samozřejmě na mysli dostatečně malou loď nebo dostatečně velkou vanu. V každém případě je okolo lodě málo vody v porovnání s jejím objemem (viz obr. 1). Mějme konkrétně loď o hmotnosti 100 tun a vanu, ve které je 1 m³ vody.

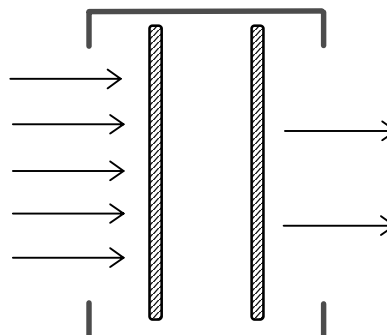
Obr. 1



Úloha I. 2 ... polopropustná zrcadla

Mějme dvě polopropustná zrcadla, z nichž každé propouští přibližně $\frac{1}{5}$ světelného toku a zbytek odráží (což je experimentální poznatek). Jestliže vložíme do cesty rovnoběžnému svazku světelných paprsků obě zrcadla kolmo na směr šíření (viz obr. 2), zdálo by se na první pohled, že tato soustava propustí jen $\frac{1}{25}$ dopadajícího světelného toku, ale ve skutečnosti je to o dost více, $\frac{1}{9}$. Vysvětlete tento "paradox"!

Obr. 2



Úloha I. 3 ... deskový kondenzátor

Kondenzátor ze dvou desek plochy S vzdálených o l_1 nabijeme baterií na napětí U_b . Jakou práci musíme vykonat k oddálení desek na vzdálenost l_2 , když jsme před tím baterii

- odpojili,
- neodpojili.

Jestliže se práce v případě *a)* a *b)* liší, vysvětlete, jaké "tajemné síly" tento rozdíl způsobují. Rozměry desek jsou mnohem větší než vzdálenosti l_1 , l_2 .

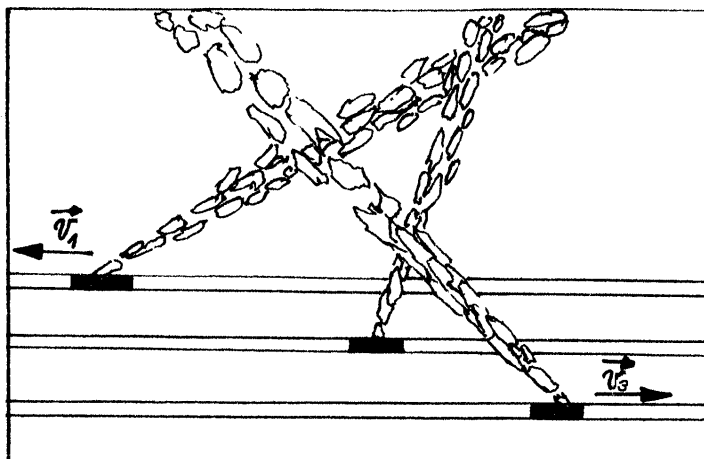
Úloha I. 4 ... tlak plynu

V nádobě, jejíž stěny mají teplotu t_c , se nachází plyn o teplotě t . V kterém případě bude tlak na stěny nádoby větší: $t > t_c$ nebo $t < t_c$?

Obr. 3

Úloha I. 5 ... lokomotivy

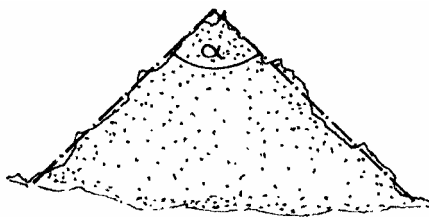
Na obr. 3 je letecký snímek parních lokomotiv s oblaky dýmu, které se pohybují rovnoměrně po přímých rovnoběžných kolejích. Rychlost první parní lokomotivy je $v_1 = 50$ km/h, rychlost třetí $v_3 = 70$ km/h. Směry rychlostí jsou vyznačeny na obrázku. Jaká je rychlost v_2 druhé lokomotivy?



Úloha I . 6 ... mohyla z písku

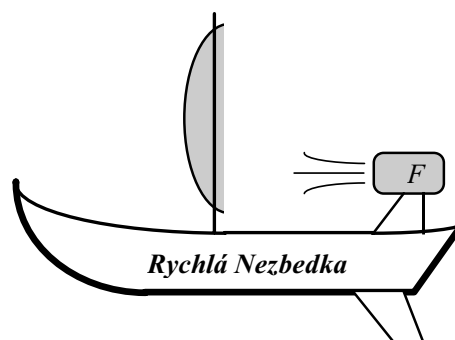
Sypeme-li prášek (suchý písek, mouku či cukr) volně na jedno místo, vznikne kužel s vrcholovým úhlem α (viz obr. 4). Pokuste se změřit tento úhel pro různé látky. Umíte výsledky měření nějak odůvodnit?

Obr. 4

**Úloha II . 1 ... Nezbedova Nezbedka**

Na obr. 5 plove loďka. Její majitel, známý vynálezce a kutil Nezbeda, vyřešil problém bezvětrného počasí následujícím způsobem: na záď lodi připevnil výkonný fén značky *Fukar* a nasměroval jej vpřed přímo na malou lodní plachtu. Na vás teď je, abyste usoudili, za jakých podmínek se loďka rozjede vpřed či vzad. Můžete se také zamyslet nad tím, jaké zlepšovací návrhy byste Nezbedovi poradili, aby jeho pohon pracoval za bezvětrí co nejefektivněji.

Obr. 5

**Úloha II . 3 ... jádro hélia**

Spočítejte střední vzdálenost mezi nukleony v jádře ${}^3_2\text{He}$. Zadány máte hmotnosti částic:

| jádro | neutron | proton | deuterium | tritium | helium ${}^3_2\text{He}$ |
|---------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|--------------------------|
| hmotnost [10^{-27} kg] | 1,674 929 | 1,672 623 | 3,343 590 | 5,008 271 | 5,008 239 |

Poznámka: Silná interakce je invariantní vůči záměně protonů a neutronů v jádře. Také platí, že na vzdálenostech $\sim 10^{-15}$ m jsou jaderné síly daleko intenzivnější než elektromagnetické působení.

Úloha II . 2 ... válcovací stolice

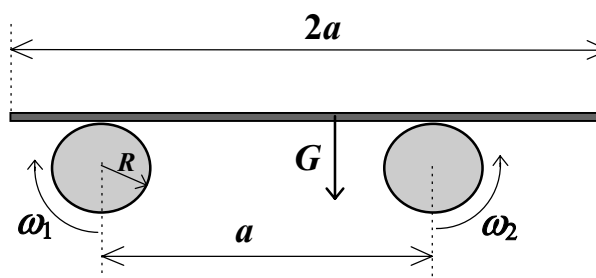
Dva stejné válce o poloměru R , jejichž osy jsou rovnoběžné a leží ve vodorovné rovině ve vzdálenosti a , rotují opačnými směry. Na tyto válce položíme vodorovně desku délky $2a$ o hmotnosti m tak, že přečnívá vpravo více než vlevo (viz obr. 6). Mezi deskou a válcem působí tření s koeficientem μ .

Co se bude dít s deskou,

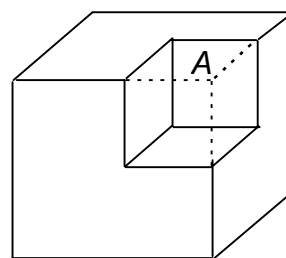
a) pokud jsou obvodové rychlosti stejně veliké,

b) pokud je obvodová rychlost levého válce dvakrát větší než obvodová rychlost pravého?

Obr. 6



Obr. 7

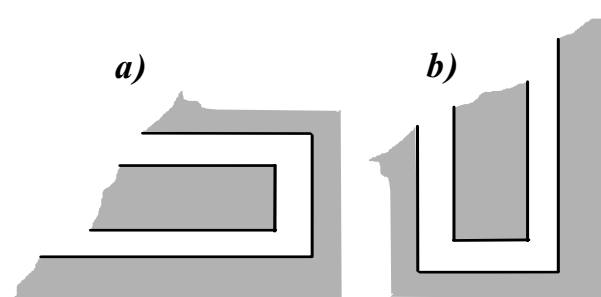
**Úloha II . 4 ... elektrická krychle**

Představme si krychli s rovnoměrně rozloženým nábojem o hustotě ρ v celém jejím objemu. Ve vrcholu A jsme naměřili intenzitu elektrického pole E . Jakou intenzitu naměříme v bodě A , jestliže vyřízneme z krychle krychličku o poloviční délce hrany, jak je znázorněno na obr. 7?

Úloha II . 5 ... Lomonosovův průvan

Velký přírodovědec M. V. Lomonosov studoval ve své světově proslulé práci “O volném pohybu vzduchu v dolech” závislost směru proudění vzduchu na ročním období. Po dlouhém a strastiplném bádání dospěl k závěru, že teplota vzduchu je v dole stále stejná po celý rok (v jeho době byly doly ještě poměrně mělké). Určete, jakými směry bude vzduch proudit v létě a v zimě v dolech umístěných podle obr. 8.

Obr. 8

**Úloha II . 6 ... odpolední čajiček**

Pokuste se změřit odpor spirály elektrického vařiče.

Návod: Ohřívejte vodu vařičem a sledujte závislost její teploty na čase. Z této závislosti zjistíte výkon vařiče, ze kterého už snadno odvodíte odpor spirály.

Tato úloha je takzvaně **experimentální**. Naše zkušenosti ukazují, že jen málo řešitelů má správnou představu o tom, jak má vypadat zpracování fyzikálního měření, proto přikládáme následující návod “Jak zpracovávat experimentální úlohy”.

Nejprve je dobré ujasnit si, jaké fyzikální děje během pokusu probíhají [*v našem případě přeměna elektřiny na teplo, předávání tepla lázni*] a jaké vztahy lze mezi zadanými a měřenými veličinami použít [*vzorce pro energii spotřebovanou v odporu atd.*]. S jejich pomocí se pokusíte odhadnout, jaké jsou očekávané výsledky vašich měření [*vyhledáte si hodnoty konstant v tabulkách a dosadíte do vzorců*]. Tyto úvahy tvoří první část vámi sepsaného protokolu, **teorii**.

Poté se budete věnovat experimentálnímu zařízení: popíšete aparaturu a uvedete i ostatní parametry [*materiál nádoby, teplota okolí*], které by mohly výsledky ovlivnit. Stanovíte **postup měření** a jeho rozsah [*jak často hodnoty odečítat, kolikrát se měření opakuje*], v prvním přiblížení platí: “čím více výsledků, tím lépe”, máte takzvaně lepší statistiku. Nyní dojde na vlastní **provedení**; záznam naměřených hodnot je nutné také přiložit [*tabulka*].

Následuje **zpracování**: spočtete hledané hodnoty a máte-li více měření pro danou veličinu, stanovíte průměr a směrodatnou odchylku, tu možná někteří neznají – je dána průměrem čtverců rozdílů naměřených hodnot a aritmetického

průměru, $\sigma = \sqrt{\left(\sum (x_i - \bar{x})^2\right)/n}$. Spočtené odchylky jsou základem pro určení chyby;

přidáte k nim ještě chyby zadaných veličin (rozměry měřených prvků apod.) a celkovou relativní chybu pak stanovíte většinou jako kvadratický průměr všech možných relativních chyb (relativní chyba δA je dána podílem absolutní chyby ΔA a velikosti veličiny A). Ve skutečnosti je to všechno složitější, zájemce můžeme odkázat např. na knihu Jaromíra Brože, *Základy fyzikálních měření*. Raději připomeneme, že chyba se stanovuje maximálně na dvě platné cifry (ale spíše na jednu, pokud neměříte soubor okolo tisíce hodnot) a výsledek pak zaokrouhlujeme na stejný počet desetinných míst, jako má chyba [např. $R = (120 \pm 10) \Omega$]. Měříte-li nějaké závislosti, jsou nedílnou součástí vyhodnocení především **grafy**, neboť obrazovou informaci je čtenář schopen mnohem lépe strávit než dlouhé sloupce čísel.

Závěrem protokolu je diskuse získaných výsledků, potvrzení souhlasu či zdůvodnění nesouhlasu s teoretickou nebo tabulkovou předpovědí [*ztráty tepla do okolí, nestejné podmínky opakovaných měření*]. Dokladem úspěchu je, když se teorie a experiment liší maximálně o spočtenou chybu, proto nebuďte při jejím určování příliš optimističtí.

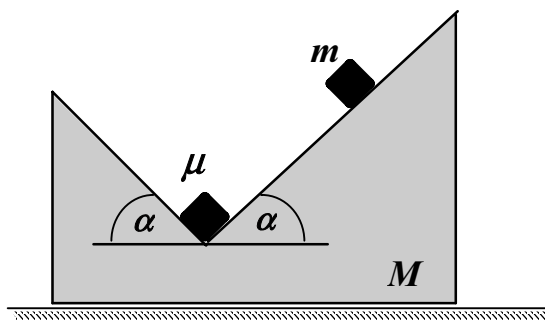
Tento popis byl pro vás asi vyčerpávající; budete-li se ho však alespoň zhruba držet, máte při řešení experimentálních úloh, které jsou značně bodově dotovány, velkou šanci uspět.

Úloha III . 1 ... vyhlodaný hranol

Na vodorovné rovině je položen vyhlodaný hranol o hmotnosti M (viz obr. 9), který se po ní může bez tření pohybovat. V nejnižším místě leží krychlička o hmotnosti μ . Na nakloněné části hranolu leží krychlička o hmotnosti m . I malé krychličky se mohou pohybovat po vyhlodaném hranolu bez tření.

Jaká musí být splněna podmínka mezi hmotnostmi M , m , μ a úhlem α , aby se po uvolnění krychličky m krychlička μ začala vůči hranolu M pohybovat?

Obr. 9

**Úloha III . 2 ... dálkový průzkum**

Zjistit přesné údaje o Merkuru bylo pro astronomy vždy velkým problémem. Není jednoduché změřit pomocí dalekohledu jeho zdánlivý průměr, který nepřesahuje $13''$, a protože na povrchu Merkuru není vidět mnoho podrobností, zůstávala rychlost jeho rotace dlouho neznámá. Od konce minulého století se předpokládalo, že Merkur má tzv. vázanou rotaci, to znamená, že jedna jeho otočka kolem osy je stejně dlouhá jako doba oběhu kolem Slunce, tedy 88 dní. Tento omyl vyvrátilo teprve v 60. letech radarové pozorování.

Dejme tomu, že radioastronomové vyslali v čase $t_0 = 0$ s signál směrem k Merkuru a jeho odraz pozorují od doby $t_1 = 1070,156\ 24$ s do $t_2 = 1070,172\ 52$ s. Při dalším měření se soustředili na rudý posuv přijaté vlny. Původní signál měl frekvenci 100 MHz a frekvence jednotlivých složek ozvěny byla od $f_1 = 99,977\ 398\ 94$ MHz do $f_2 = 99,977\ 402\ 95$ MHz. Vypočítejte z těchto údajů (za předpokladu, že sklon rotační osy této planety vůči ekliptice je malý) vzdálenost a rychlost vzdalování Merkuru od observatoře, jeho poloměr, úhlovou rychlost rotace a dobu jedné otočky kolem osy.

Úloha III . 3 ... Pinocciova čepička

Papa Karlo zhotovil pro Pinoccia čepičku z tenkého plechu ve tvaru kužele o výšce 20 cm a s vrcholovým úhlem 60° . Bude ale takováto ozdoba držet na jeho hlavě, která má tvar koule o poloměru 15 cm a je dokonale hladká?

Úloha III . 4 ... lednička

V místnosti stojí otevřená lednička zapojená do zásuvky a mrazí. Po jedné hodině provozu necháme teplotu v místnosti ustálit. Jak se tato teplota liší od počáteční teploty v místnosti, pokládáme-li místnost za tepelně izolovanou?

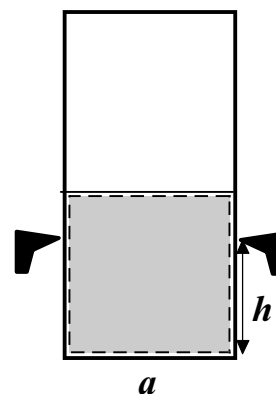
Úloha III . 5 ... vodní kyvadlo

Mějme nádobu tvaru kvádrů zanedbatelné hmotnosti o čtvercové podstavě strany a a výšce $2a$. V této nádobě se nachází krychlové vodní těleso. V jaké maximální výšce h ode dna můžeme naši nádobu zavěsit, aby se po zmrznutí vody právě převrátila? (Viz obr. 10, který znázorňuje řez nádoby vertikální rovinou procházející těžištěm.)

Uvažujte dva případy:

- nádobu je dokonale tuhá a voda zamrzá ode dna,
- voda si během zamrzání uchovává stále svůj krychlový tvar, nádobu je tedy dostatečně pružná. Přitom podél stěn led klouže, tedy výška závěsu nad podstavou zůstává konstantní.

Obr. 10



Úloha III . 6 ... gravitační zrychlení

Pokuste se změřit gravitační zrychlení co největším počtem metod. U každé metody proveďte 10–20 měření, porovnejte výsledky a přesnost různých metod.

Nápověda: Můžete využít matematického nebo fyzikálního kyvadla (těžký předmět na nehmotném závěsu). Při přímém měření, tedy zrychlení volného pádu, nepoužívejte lehké předměty (pírko), neházejte nic na hlavy chodců (špatně měřitelná výška). Ani vrhat své tělo vám nedoporučujeme (opakovatelnost pokusu). Při kutálení čehokoli po nakloněné rovině nezapomeňte uvážit, že těleso má i nějaký moment setrvačnosti. Lze použít i Ad-woodův padostroj, rychlost výtoku kapaliny z nádoby nebo cokoliv jiného, co budete umět změřit.

Úloha IV . 1 ... Pozor, přímý přenos!

Ve velké newyorské koncertní síni Carnegie Hall sedí malý český človíček Honzíček, na programu je Beethovenova sedmá symfonie. Ne každý milovník vážné hudby z naší zemičky má na to, aby slyšel takovýto koncert na vlastní uši, a tak jiný malý český človíček Pepíček (mimochodem blízký přítel našeho hrdiny) sedí hezky doma v Praze na Vinohradech ve svém křesílku s ouškem přitisknutým na rozhlasovém přijímači. Do jaké řady má Honzíček koupený lístek, víte-li, že spolu se svým přítelem Pepíčkem slyší tóny Sedmé ve stejný okamžik?

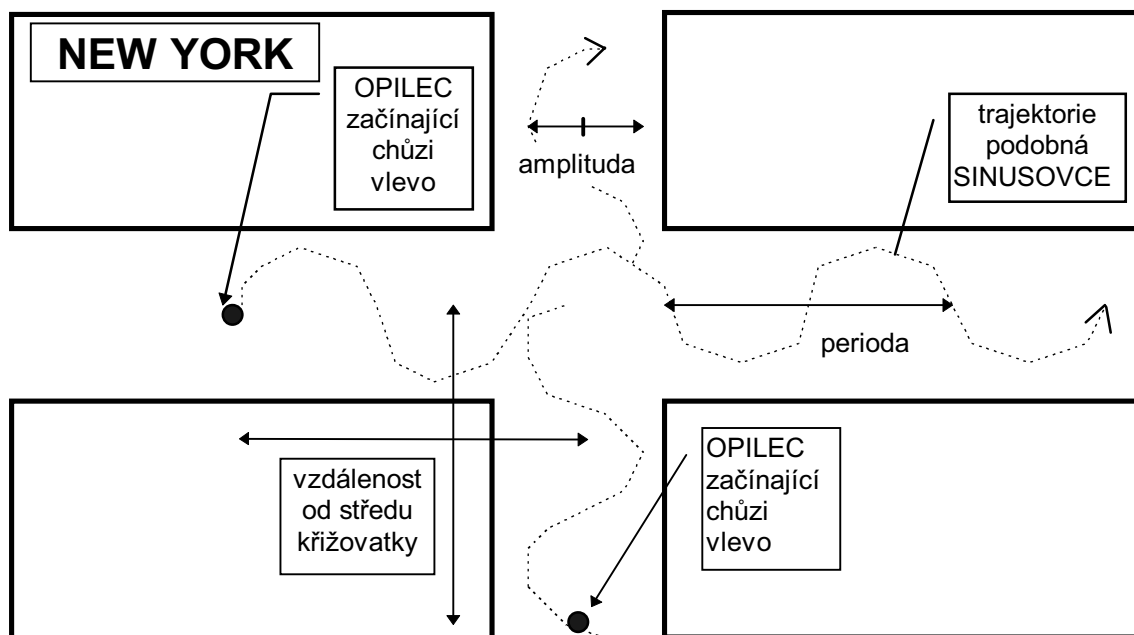
Poznámka: Pokud postrádáte některé údaje, tak si je vyhledejte; jestli něco nemůžete skutečně zjistit, např. vzdálenost řad v C. Hall, tak si to odhadněte, jsme přece fyzici, ne?

Úloha IV . 2 ... opilci v New Yorku

Dva kamarádi se po dlouhém nočním tahu ztratili kdesi ve spleti newyorských *streets* a *avenues*. Jak to odpovídá jejich stavu, procházejí ulice po křivce velmi blízké sinusovce s amplitudou $A = 5$ m a periodou $T = 12,6$ m. Udrží konstantní rychlost potácení $v = 1$ m/s (ve směru osy ulice). Shodou okolností se v jeden okamžik ocitnou oba ve vzdálenosti $l = 27$ m od téže křižovatky, každý však uprostřed jiné ulice (viz obr. 11), přičemž oba směřují doleva od směru k průsečíku obou ulic. Určete, v jaké nejmenší vzájemné vzdálenosti se během průchodu křižovatkou ocitnou, předpokládáte-li, že oba směřují stále týmž směrem a jeden druhého si nevšímají.

Cílem této úlohy je, abyste se naučili pracovat se souřadnicemi, takže řešení nemusí být v obecném tvaru, můžete klidně zaokrouhlovat. Výsledky obdržené numericky budou posuzovány rovnocenně analytickému či grafickému řešení.

Obr. 11



Úloha IV . 3 ... stvoření hvězd

Podle jedné z teorií vznikají hvězdy z oblaků mezihvězdné látky (kosmického prachu) smršťováním pod vlivem gravitačních sil. Určete dobu, za jakou se může zformovat hvězda z obrovského kulového oblaku kosmického prachu o hustotě $\rho = 2 \cdot 10^{-17} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Můžete předpokládat, že se během smršťování částičky hmoty nepředbíhají a na začátku smršťování měly nulové rychlosti (oblak nijak nerotoval, nebyly v něm víry apod.). Zanedbejte také rozměry vzniknuvší hvězdy vůči počáteční velikosti oblaku.

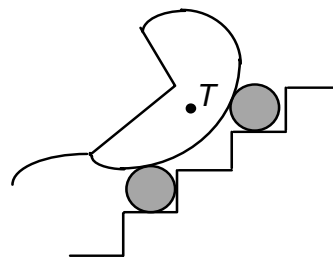
Úloha IV . 4 ... drama na schodech

Starostlivá maminka se chystá se svým malým drobečkem na procházku do parku. Vytlačí kočárek ze dveří, zamkne je a teď už na ni čeká jen malá překážka – schody. Postupně zdolává první patro, druhé patro a stále se ne a ne objevit někdo, kdo by jí pomohl. Najednou si ale vzpomene, že nahore zapoměla láhev se sunářem. Co kdyby se snad její mazlíček na procházce unavil a dostal hlad? Nechá tedy kočárek kočárkem a běží zpět nahoru.

Odemkne dveře, jde do kuchyně, vezme láhev a vtom jí přeběhne mráz po zádech, vyrazí studený pot na čele, znovu jí přeběhne mráz po zádech a teprve potom si uvědomí proč. Vždyť nechala stát kočárek jen tak na schodech! (Řešitelé bez představivosti necht' si prohlédnou přiložený obr. 12, kde T značí těžiště.) Hružou nepřičetná běží zachránit, co se dá.

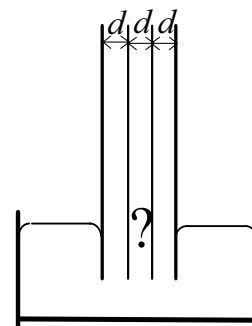
Na vás zbývá dokončit tento příběh, co myslíte, kde nalezne kočárek se svým děťátkem?

Obr. 12

**Úloha IV . 5 ... hrátky se rtutí**

Mějme dvě tenounké trubičky, jednu o průměru d , druhou o průměru $3d$, přičemž menší z nich je souose vsunuta do větší (opačně by to nejspíše nešlo). Tuto soustavu ponoříme jedním koncem do mísky se rtutí, jak je to vidět na obr. 13. V jaké výšce se ustálí hladina rtuti uvnitř tenčí kapilára a v mezeře mezi oběma kapilárami vzhledem k hladině v misce?

Obr. 13

**Úloha IV . 6 ... Ať žije sníh!**

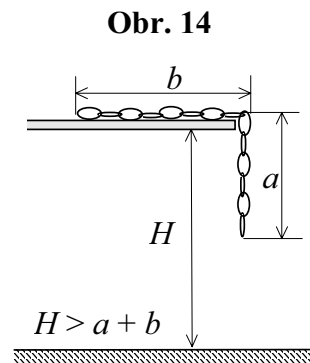
Je zima, blíží se jarní prázdniny, a jistě každý z vás se chystá do hor lyžovat, čehož jsme se rozhodli zneužít, a tak vám zadáváme následující úlohu:

Změřte koeficient tření lyžaře na sněhu. K dispozici máte cokoli, zejména tedy toho lyžaře, lyže (kdo provede měření pro porovnání zvláště na běžkách a zvláště na sjezdovkách, bude mít plus), sjezdovku (fyzikálně řečeno nakloněnou rovinu), měřič času (normálně řečeno stopky) a jiné věci, co vás napadnou a co byste mohli upotřebit. Pokud byste se chtěli vmlouvat, že letos již lyžovat nebudete, není problém tuto úlohu změřit i na rovině. Je pravděpodobné, že i ve vaší vesnici (městě, nebo v čem jiném bydlíte) bude alespoň jeden den sníh.

Poznámka: Nezapomeňte, že navoskované lyže na sněhu je krásný případ systému, kdy koeficient tření závisí na rychlosti a možná i na povrchu styčné plochy, což můžete ověřit jízdou po jedné lyži. Bohužel však vzhledem k odporu vzduchu a dalším rušivým vlivům budou asi tyto efekty špatně měřitelné (ve vyšší rychlosti sice trochu klesne koeficient tření, zato značně vzroste odpor vzduchu).

Úloha V. 1 ... řetízek babičky Julie

Na stole leží stříbrný řetízek po babičce Julii. Část, která je dlouhá a , visí přes hranu stolu, zbytek délky b ještě leží na stole, jak je vidět na obr. 14. Deska stolu je ve výšce H nad podlahou, vše se nachází v klidu. V čase $t = 0$ řetízek uvolníme a ten začne klouzat dolů ze stolu. Za jak dlouho spadne celý řetízek na zem (měřeno od chvíle, kdy se přestane dotýkat stolu)?

**Úloha V. 2 ... sportující elektrony**

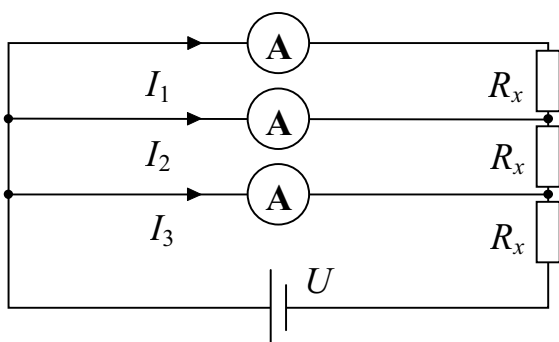
Ampérmetry na obr. 15 jsou všechny shodné. Odporů R_x se také neliší svými hodnotami. Vrchní ampérmetr ukazuje hodnotu proudu $I_1 = 1$ mA, střední proud $I_2 = 4$ mA. Na spodní ampérmetr nevidíme, neboť je umístěn v ideální tmě. Baterie je plochá, tedy má napětí $U = 4,5$ V.

Jaký proud I_3 teče spodním ampérmetrem a jaká je hodnota odporu R_x ?

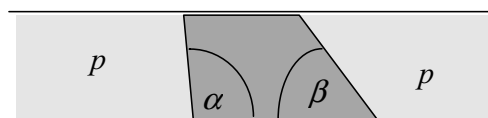
Úloha V. 3 ... ucpaná roura

V trubce čtvercového průřezu S (viz obr. 16) je umístěn hranol se stěnami skloněnými o úhly α , β . Na obou stranách hranolu je plyn o tlaku p . Kterým směrem a s jakým zrychlením se začne hranol pohybovat, jestliže byl původně v klidu?

Obr. 15



Obr. 16

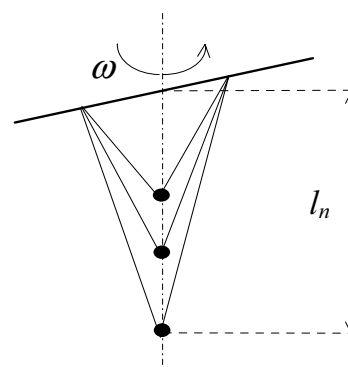
**Úloha V. 4 ... baron Prášil**

Na ledovou plochu rybníka o teplotě 0°C dopadne rozehrátá dělová koule o poloměru R , měrné tepelné kapacitě c_k a teplotě 100°C . Jak hluboko se koule ponoří do ledu, jestliže měrná tepelná kapacita ledu je c_l ? Předpokládáme, že se veškeré teplo spotřebuje na tavení ledu.

Úloha V. 5 ... rotující kyvadýlka

Představte si, že máte na tyčce připevněno pomocí dvou pevných závěsů několik kuliček tak, že se mohou pohybovat pouze po kružnici o poloměru l_n (ve svislé rovině, viz obr. 17), kde n je pořadové číslo kuličky. Potom celou soustavu roztočíme podél svislé osy úhlovou rychlostí ω a nepatrně do kuliček šťouchneme (aby nebyly přímo na ose rotace). Co se děje s jednotlivými kuličkami a jak bude vypadat pohled z boku na rotující soustavu?

Obr. 17





Úloha V. 6 ... experimentální úloha z mechu a kapradí

Křemílek a Vochomůrka mají problém. Uprostřed zimního spánku je probudil kapající vodovod, nenechal je usnout a nutil je přemýšlet na téma “kapající vodovody v současném světě”. Byl tak dotěrný, že pokud neumřeli, přemýšlejí dodnes. Zkuste doma objevit nějaký kapající vodovod, zamyslete se, a poté změřte, jaké povrchové napětí vykazuje voda kapající z kohoutku.

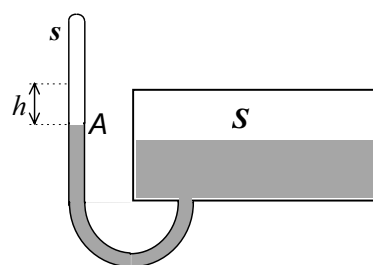
Úloha VI. 1 ... gejzír na betoně

Jednoho krásného dne se studentici na jednom nejmenovaném gymnáziu nudili, a tak si vymysleli zábavu. Do igelitového pytlíku nabrali vodu a vyhodili jej z okna. Na betonovém chodníku to udělalo krásný gejzír. Ale co čert nechtěl – zrovna přišel do třídy profesor fyziky a zeptal se jich: “Z jaké výšky byste museli vyhodit ten pytlík z okna, aby vám ta voda přešla do varu?” No, a my se vás ptáme na totéž. Můžete zanedbat odpor vzduchu, popřípadě zauvažovat, co by se stalo, kdyby tam odpor vzduchu byl.

Úloha VI. 2 ... rtuťová koupel

Máme soustavu kapiláry o průřezu s a nádoby o vodorovném průřezu S , která je naplněná rtuťí jako na obr. 18. Z kapiláry je vyčerpán vzduch. Když uvolníme kolíček A v kapiláře, stoupne hladina rtuti v kapiláře o h a v nádobě klesne o Δh . Jaká se při tom uvolní energie? Předpokládejte, že $S \ll s$ a $h \ll \Delta h$.

Obr. 18



Úloha VI. 3 ... kap, kap

Jistě se vám už někdy stalo, že jste při vaření ukápli na mírně horkou plotýnku či pánev kapku vody. Potom jste si mohli kromě nepříjemného sykotu všimnout, že chvilku kapka poskakuje po plotýnce, a pak velice rychle zmizí. Jak to, že se menší kapka vyparuje rychleji než kapka větší?

Úloha VI. 4 ... žabák Břet'a

Na rybníce plave čtvercová deska o hmotnosti M a straně l a na jejím okraji sedí žabák Břet'a s tělesnou hmotností m . Jakou rychlostí a jakým směrem musí vyskočit, jestliže se chce trefit přesně na druhý konec desky? Předpokládejte, že se deska při odrazu minimálně ponoří, odpor prostředí můžete zanedbat.

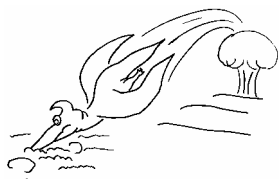
Úloha VI. 5 ... Studentova žárovka

Píše se rok 1963. V nejmenovaném pokoji na Strahovských kolejích se připravuje Student ČVUT na zkoušku z elektřiny a magnetismu. Blíží se vánoce, brzy se stmívá, a tak studenti po celé koleji pomáhají svým unaveným očím svitem žárovek (60W za 4,60 Kč, jak se můžete dočíst na obr. 19). Když tu náš Student v zamyšlení pozvedne zrak k jedinému zdroji světla v pokoji, jeho oči sají proud fotonů, myšlenky však bloudí kdesi kolem Maxwellova tenzoru elmag. pole. A jak to tak bývá, ač duchem nepřítomen, podvědomí spustí poplašný signál: “Tady není něco v pořádku.”

Student vyskočí z postele, jsa fotoamatér rychle doběhne pro svůj fotoaparát a nafotografuje dva snímky své svítící žárovky (viz obr. 19). Poté jako správný fyzik počne experimentovat. Nejprve si všimne, že žárovka, i když má přerušenu spirálku, svítí pro lidské oko nezměněným jasnem. Vypne-li a okamžitě zapne spínač lampy, žárovka svítí vesele dál. Pečlivě si také prohlédne drátky, jež drží wolframovou spirálku v prostoru baňky. Nakonec uzná, že viděl dost, a aby si ověřil, že rozřešil “parafyzikální” jev v souladu s učebnicí pohozenou na posteli, vypne lampu asi na dvě sekundy a opět zapne. Ocitne se však v nefalšované tmě strahovské noci.

Nakonec poznamenejme, že tento příběh se za hluboké totality skutečně odehrál, fotografie, které jsme se pokusili otisknout v co nejkvalitnější podobě, nejsou podvrhem a vše, co vidíte a co jste se dozvěděli, vás dovede k správné odpovědi na otázku:

“Jak může žárovka s přerušenou spirálkou svítit nezměněným jasem!?”

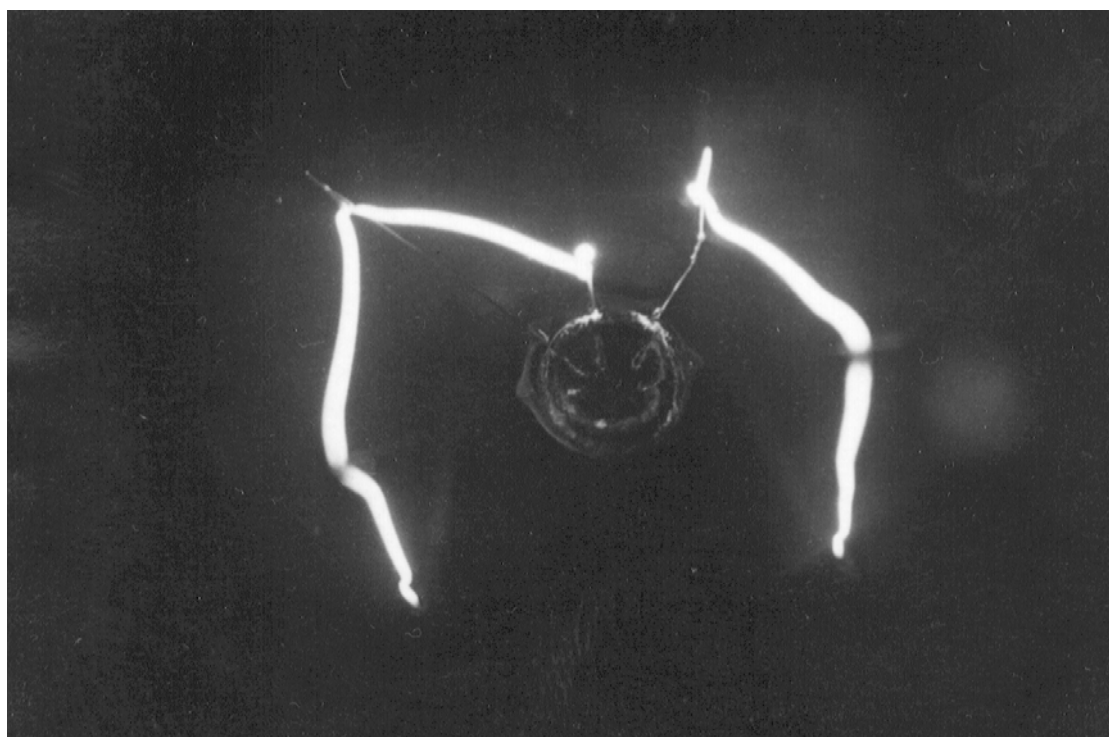


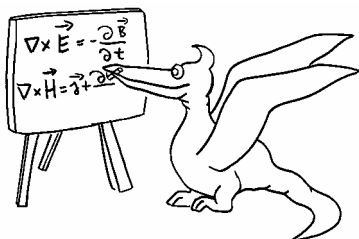
mohutné.

Úloha VI. 6 ... hledání jednoho malého bodu

V této sérii bychom po vás chtěli, abyste se pokusili změřit ohniskovou vzdálenost lupy. Pokud nemáte lupu, poproste třeba svého dědečka, jestli by vám na chvíli nepůjčil brýle na čtení. Nezapomeňte, že brýle mají obvykle každé sklo jinak opticky

Obr. 19





Seriál na pokračování

Úvod

V tomto ročníku SNP bychom se pokusili oproti minulým ročníkům poněkud zpřístupnit probírané téma. Zvolili jsme proto partii fyziky probíranou na střední škole a pokusíme se rozšířit vaše fyzikální obzory takto:

- způsob výkladu látky bude matematicky nenáročný, přičemž případné mezery vyplníme fyzikou,
- příklad na konci každého dílu bude jednodušší, spíše kontrolního rázu, abyste odvykládanou látku snadno strávili,
- nebude toho tolik.

O co tedy půjde? Na střední škole jste se setkali nebo se ještě setkáte s důležitým oborem fyziky, s "Molekulovou fyzikou". Předmětem zájmu molekulové fyziky je zkoumání stavu a vzájemného působení makroskopických objektů a to dvěma přístupy:

- Metoda termodynamická** je založena na tzv. *fenomenologickém* přístupu k fyzikálním objektům. To znamená, že experimentálně bylo objeveno několik základních principů, jimiž se makroskopická tělesa řídí, a pomocí těchto principů jsme schopni předpovídat termodynamický stav těles, tj. jejich tlak, objem, teplotu nebo magnetickou či elektrickou susceptibilitu. Tento přístup si ukážeme v první kapitole.
- Metoda statistická** zpracovává poznatky *kinetické teorie* látek. Termodynamická soustava je chápána jako soubor mikroskopických částic, kterých je tolik, že k nim musíme přistupovat statisticky. A právě statistické charekteristiky tohoto souboru (například střední hodnota, rozptyl,...) jsou pak těmi veličinami, které měříme a které zkoumá výše zmíněná termodynamika, což budete schopni posoudit ve druhé až páté kapitole

Stručný obsah SNP

- Kapitola první* ... povíme si něco o prvním termodynamickém principu, poněkud více do hloubky, než se vám dostane na střední škole.
- Kapitola druhá* ... mezi statistické charakteristiky pohybu molekul patří střední volná dráha a střední kvadratická rychlost. Ukážeme si jejich snadné statistické odvození.
- Kapitola třetí* ... odvodíme známý vzorec pro tlak plynu na stěnu nádoby.
- Kapitola čtvrtá* ... rozšíříme vaše znalosti o vedení tepla v látkách skrze energetické toky v plynech.
- Kapitola pátá* ... poslední model se bude týkat třecích sil v tekutinách.

Úloha S. I ... úvodní otázka

Představte si, že za vámi přijde kamarád a prohlásí, že vyrobil či vymyslel perpetuum mobile. Nesmějte se, toto je situace na matfyzu celkem běžná a my pak musíme jako fyzici nějak odpovědět. Které z odpovědí byste zvolili vy (je jich více správných) a proč?

- Termodynamika dokáže na základě svých principů, že to nejde.
- Normálka, vždyť už Golem byl jedno velký perpetuum mobile.
- Odmalička nám vtloukají do hlavy, že to nejde, jak tě mohla napadnout taková blbost?
- Nevím, neboť se zabývám kinetickou teorií látek.
- To je skvělé, protože pak je celá termodynamika špatně.
- Mám sám jedno doma.

Kapitola 1

Než přejdeme k prvnímu termodynamickému principu (též první věta termodynamická), řekneme si něco více o práci plynu. Všichni znáte označení malé změny veličiny Δ (např. $v = \Delta x / \Delta t$). Pokud místo této značky napíšeme δ či d , rozumíme tím fyzikálně taktéž malou změnu veličiny; rozdíl mezi označením δ a d má hlubší fyzikální důvody, kterými se nyní zabývat nebudeme.* Když spleťete δ a d , zatím se tak moc neděje.

Bude-li tedy plyn konat práci, bude práce na malé dráze dx rovna

$$\delta W = F dx = p S dx = p dV. \quad (1.1)$$

Celkovou práci pak dostaneme součtem (učeně integrací) všech elementárních prací δW ,

$$W = \int_{\text{zač.}}^{\text{kon.}} \delta W. \quad (1.2)$$

První větu termodynamickou, která vlastně vyjadřuje zákon zachování energie termodynamické soustavy, můžeme zapsat takto:

$$dU = \delta Q - \delta W,$$

a tedy

$$\delta Q = dU + p dV. \quad (1.3)$$

kde U značí vnitřní energii soustavy, Q je dodané teplo.

Dále definujeme molární tepelnou kapacitu c , což je veličina popisující, kolik tepla je třeba k ohřátí jednoho molu látky o 1 K,

$$c = \frac{1}{n} \frac{\delta Q}{dT}, \quad (1.4)$$

kde n je látkové množství. Tato veličina je závislá na ději, který právě probíhá (při konstantním tlaku ji značíme c_p , při konstantním objemu c_V).

1. Děj při konstantním tlaku p nazýváme **izobarickým**. Konstantní tlak znamená $dp = 0$.

Dosadíme-li do (1.3) vztah odvozený ze stavové rovnice

$$p dV = n R_m dT, \quad (1.5)$$

dostaneme

$$c_p = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT} + R_m. \quad (1.6)$$

Význam prvního výrazu na pravé straně vztahu (1.6) naleznete při řešení dnešní úlohy.

2. Děj při konstantní teplotě T nazýváme **izotermickým**. Zase můžeme napsat $\delta T = 0$. Jelikož vnitřní energie plynu U je úměrná pouze teplotě T , platí i $\delta U = 0$. První věta termodynamická se změní na

$$\delta Q = p dV. \quad (1.7)$$

3. Pro ty, kteří znají pojem derivace a umí zderivovat alespoň funkci $y = x^n$, jsou další řádky. **Adiabatický** je děj, při kterém soustava ani nepřijímá ani nedodává teplo, $\delta Q = 0$. První věta termodynamická přejde na

$$n c_V dT + p dV = 0. \quad (1.8)$$

Ze stavové rovnice ideálního plynu dostaneme diferencováním

$$dT = \frac{p dV + V dp}{n R_m}, \quad (1.9)$$

což dosadíme do první termodynamické věty. Další úpravou získáme

$$(c_V + R_m) p dV = -c_V V dp. \quad (1.10)$$

Jelikož $c_V + R = c_p$, můžeme psát

$$\frac{dp}{dV} = -\kappa \frac{p}{V}, \quad (1.11)$$

kde jsme označili $\kappa \Leftarrow c_p / c_V$, což je to samé jako

* Pro zájemce: δ značí takovou změnu, která závisí na jejím průběhu, naopak d značí změnu, která závisí pouze na počátečním a koncovém stavu.

$$\frac{dy}{dx} = -\kappa \frac{y}{x}. \quad (1.12)$$

Derivací funkce $y = cx^{-\kappa}$ zjistíme, že vyhovuje této rovnici, tedy můžeme uzavřít, že pro adiabatický děj platí

$$pV^\kappa = \text{const}. \quad (1.13)$$

Pro ty, co si rovnici (1.11) chtějí vyřešit a umí integrovat, upravíme rovnici na tvar

$$\frac{dp}{p} = -\kappa \frac{dV}{V} \quad (1.14)$$

a zintegrujeme na $\ln p = -\kappa \ln V + \ln c$, kde $\ln c$ je integrační konstanta; odtud pak odlogaritmováním dostaneme výše uvedený vztah.

Úloha S . II

Jde o úlohu jednoduchou, ale pokud ji budete chtít řešit, radši si ještě jednou přečtete první kapitolu, a pokud příklad zdárně vyřešíte, určitě pochopíte, o co v tomto díle seriálu šlo. Odvoďte, jak vypadá první věta termodynamická pro izochorický děj ($V = \text{const.}$) a určete tím, co znamená výraz

$$c_V = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT}. \quad (1.15)$$

Výsledek po dosazení do jedné z výše uvedených rovnic (snadno naleznete které), nazýváme **Mayerovým vztahem**.

Kapitola 2

Následující kapitoly budou již z kinetické teorie látek. Mějme N molekul plynu v objemu V . Jejich objemovou hustotu definujeme

$$N_V = N/V. \quad (2.1)$$

Předpokládejme, že molekuly mají kulový tvar o stejném poloměru r a jsou v klidu, až na jednu. Podívejme se na obr. 20.

Zavedeme účinný srážkový průřez molekuly

$$\sigma_c = \pi(2r)^2 \quad (2.2)$$

Nachází-li se ve válci o podstavě σ_c a výšce (spíše délce) Δl nějaká jiná částice než ta, která se pohybuje, narazí na sebe.

Srážkovou frekvenci definujeme jako počet srážek molekul, které se vyskytují ve válci o objemu $\sigma_c \Delta l$ za čas Δt . Označíme ji \bar{z} :

$$\bar{z} = N_V \sigma_c \frac{\Delta l}{\Delta t} = N_V \sigma_c \bar{v}, \quad (2.3)$$

kde \bar{v} je nějaká střední rychlost letící molekuly (střední kvadratická rychlost). Vynásobíme-li dráhu mezi dvěma srážkami srážkovou frekvencí, dostaneme rychlost \bar{l} . Tedy

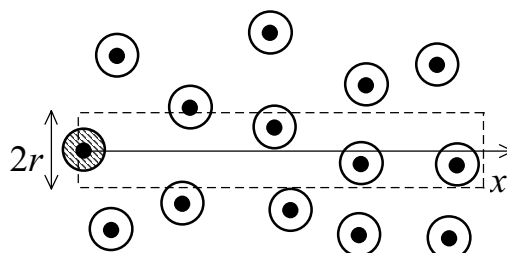
$$\bar{l} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}} = \frac{1}{\sigma_c N_V}. \quad (2.4)$$

Veličinu \bar{l} nazýváme *střední volnou dráhou* molekuly a značíme ji většinou λ .

Další odstavce budou pro ty, kteří umějí alespoň trošičku derivovat a integrovat, nebo alespoň mají ponětí o tom, o co jde.

Hustota pravděpodobnosti $\rho'(\mathbf{v})$ necht' je pravděpodobnost dělená objemkem ΔV v určitém elementárním místě prostoru, který má místo souřadnicových os vyneseny rychlosti v_x, v_y, v_z . Předpokládejme, že tuto funkci vektoru rychlosti lze vyjádřit jako součin funkcí jednotlivých jeho složek

Obr. 20



$$\rho'(\vec{v}) = \rho_x(v_x)\rho_y(v_y)\rho_z(v_z) \quad (2.5)$$

Zlogaritmujeme na

$$\ln \rho'(\vec{v}) = \ln \rho_x(v_x) + \ln \rho_y(v_y) + \ln \rho_z(v_z) \quad (2.6)$$

Budeme-li počítat derivaci funkce $\ln \rho'(\vec{v})$ postupně podle složky rychlosti v_x , máme

$$\frac{\partial \ln \rho'(\vec{v})}{\partial v_x} = \frac{d \ln \rho'(\vec{v})}{dv} \frac{\partial v}{\partial v_x} = \frac{d \ln \rho'(\vec{v})}{dv} \frac{v_x}{v}, \quad (2.7)$$

jelikož

$$\frac{\partial v}{\partial v_x} = \frac{\partial \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}{\partial v_x} = \frac{v_x}{v}. \quad (2.8)$$

Odtud dostaneme vztah

$$\frac{1}{v} \frac{d \ln \rho'(\vec{v})}{dv} = \frac{1}{v_x} \frac{d \ln \rho_x(v_x)}{dv_x}. \quad (2.9)$$

Jelikož tento výpočet můžeme provést pro každou složku a vztah (2.9) nám vyjde s nezměněnou levou stranou i pro složky v_y a v_z , lze napsat např.

$$\frac{1}{v_y} \frac{d \ln \rho_y(v_y)}{dv_y} = \frac{1}{v_x} \frac{d \ln \rho_x(v_x)}{dv_x}. \quad (2.10)$$

Protože obě strany rovnice jsou funkce dvou nezávislých proměnných, musí se rovnat konstantě, aby se vůbec mohly rovnat pro libovolná v_y a v_x . To znamená

$$\frac{1}{v_x} \frac{d \ln \rho_x(v_x)}{dv_x} = -\frac{1}{\sigma^2}. \quad (2.11)$$

Vyřešíme-li tuto diferenciální rovnici, zjistíme, že rozložení hustoty pravděpodobnosti pro složku rychlosti v_x je

$$\rho_x(v_x) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{1/2} e^{-v_x^2/2\sigma^2}, \quad (2.12)$$

kde člen v v závorce je jakási integrační konstanta, kterou obdržíme z podmínky, že pravděpodobnost nalezení libovolné rychlosti částice je jistotou, tedy jedničkou.

Pro celkovou hustotu pravděpodobnosti tedy platí

$$\rho'(\vec{v}) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{3/2} e^{-(v_x^2+v_y^2+v_z^2)/2\sigma^2}. \quad (2.13)$$

Chceme-li dostat závislost na velikosti vektoru rychlosti, musíme si uvědomit, že v prostoru souřadných os v_x, v_y, v_z je rychlost velikosti v zastopena povrchem koule. Pak

$$\rho(v) = 4\pi \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{3/2} v^2 e^{-v^2/2\sigma^2}, \quad (2.14)$$

což je Maxwellovo-Boltzmanovo rozdělení rychlosti molekul, které už někteří znáte z hodin fyziky. V poslední řadě lze říci, že

$$\sigma^2 = \frac{kT}{m_0}, \quad (2.15)$$

kde k je Boltzmanova konstanta, T termodynamická teplota plynu a m_0 hmotnost jedné molekuly v plynu. Na obr. 21 je zakresleno rozdělení rychlostí pro molekulu dusíku při různých teplotách plynu. Všimněte si, že exponent ve vzorci (2.14) je bezrozměrný a má tvar

$$\frac{\frac{1}{2} m_0 v^2}{kT}, \quad (2.15)$$

tedy podíl kinetické energie částice plynu a jakéhosi energetického faktoru.

Součin kT ze vzorce (2.15) má důležitý význam ve statistické i kvantové fyzice a souvisí s mnoha energetickými ději.

Úloha S . III

Vypočtete střední volnou dráhu molekuly dusíku při normálním tlaku a pokojové teplotě $t' = 20^\circ C$. Poloměr molekuly dusíku $r = 1,5 \cdot 10^{-10} m$.

Kapitola 3

K odvození tlaku na stěnu nádoby uvažujme kvádr o objemu V , přičemž budeme počítat tlak na jeho boční stěnu obsahu S rovnoběžnou s rovinou yz , jak je to vidět na obr. 22. Všimějme si molekul, které se pohybují ve směru osy x rychlostmi v_x .

Za okamžik dt narazí na stěnu tolik molekul, kolik je jich obsaženo v objemu

$$V_S = Sv_x dt. \quad (3.1)$$

Závislost objemové hustoty částic na rychlosti lze vyjádřit jako součin funkce pravděpodobnostního rozdělení rychlosti (viz minule Maxwellovo-Boltzmannovo rozdělení) $\rho(v_x)$ a celkového počtu molekul N v kvádru:

$$N_V(v_x) = \frac{N}{V} \rho(v_x). \quad (3.2)$$

Na stěnu o obsahu S tedy narazí

$$dn(v_x) = N_V(v_x) V_S dv_x = \frac{N}{V} \rho(v_x) Sv_x dt dv_x \quad (3.3)$$

molekul, které mají rychlost v intervalu $(v_x, v_x + dv_x)$.

Předpokládáme-li, že náraz na stěnu je dokonale pružný, změní se rychlost při nárazu z v_x na $-v_x$ a síla působící na stěnu bude rovna změně hybnosti za čas dt , tedy

$$dF(v_x) = \frac{2m_0 v_x dn(v_x)}{dt} = 2 \frac{N}{V} S m_0 v_x^2 \rho(v_x) dv_x \quad (3.4)$$

Střední kvadratická rychlost je statisticky definovaná jako

$$\overline{v_x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 \rho(v_x) dv_x, \quad (3.5)$$

$$\text{což je rovno } 2 \int_0^{\infty} v_x^2 \rho(v_x) dv_x, \quad (3.6)$$

neboť

$$v_x^2 \rho(v_x) = (-v_x)^2 \rho(-v_x). \quad (3.7)$$

Rovnost $\rho(v_x) = \rho(-v_x)$ je vlastně matematickou reprezentací faktu, že rozložení pravděpodobností v kladném směru osy x je stejné jako v záporném směru.

Pro tlak platí

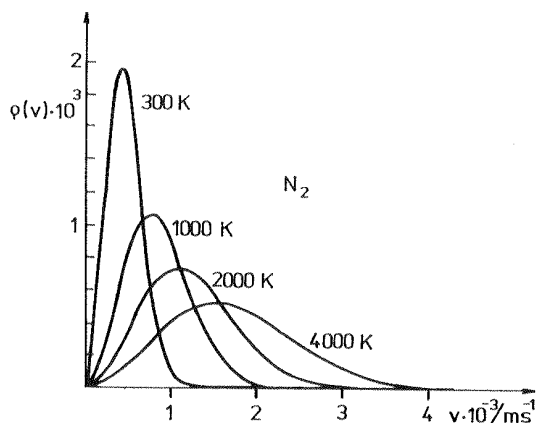
$$p = \frac{F}{S} = N_V m_0 \overline{v_x^2}. \quad (3.8)$$

Závěrečná úvaha se týká převedení problému do prostoru: představujeme-li si pohyb jako chaotický, můžeme napsat

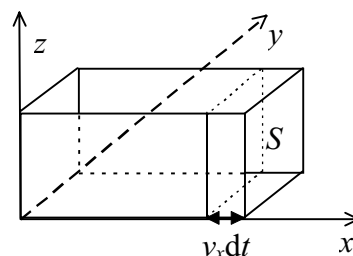
$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}, \quad (3.9)$$

tj. střední kvadratická rychlost je ve všech směrech shodná.

Obr. 21



Obr. 22



Jelikož pro velikost rychlosti platí

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \quad (3.10)$$

(což platí i pro střední hodnoty), je

$$\overline{v_x^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}. \quad (3.11)$$

Konečně se pak dostáváme ke vztahu

$$p = \frac{1}{3} \frac{Nm_0}{V} \overline{v^2}. \quad (3.12)$$

Úloha S . IV

Při odvození rovnice plynu jsme neuvažovali nárazy molekul na sebe navzájem. Pokuste se říci, ve kterém bodě našich úvah je třeba tento problém diskutovat a diskutujte ho.

Nápověda: při diskusi použijte pojem střední volné dráhy molekuly.

Kapitola 4

V další kapitole seriálu se budeme zabývat transporty částic v plynech – difúzí. Předpokládejme trubici o průřezu S umístěnou podélně ve směru osy x . Necht' hustota částic N_V v závislosti na souřadnici x není konstantní. Toho dosáhneme např. tím, že umístíme do trubice přepážku a oddělíme tak dva stejné plyny o různých hodnotách stavových veličin ($N_V = p/kT$; $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ je Boltzmannova konstanta, T termodynamická teplota, p tlak plynu). Na obě strany od x_0 , kde zjišťujeme podmínky, určíme ve vzdálenosti \bar{l} hodnoty funkce $N_V(x)$, N_V^+ a N_V^- (viz obr. 23).

Počet molekul, které projdou za čas dt plochou S zleva doprava je roven

$$n_+(x_0, t) = N_V^- V = N_V^- S (\bar{v}_x dt) = \frac{2}{\pi} N_V(x_0 - \bar{l}, t) S (\bar{v} dt), \quad (4.1)$$

protože $\bar{v}_x = 2\bar{v}/\pi$, což lze odůvodnit tak, že průmět v_x takových rychlostí v do osy x , kde \vec{v}_x má směr zleva doprava, je $v_x = v \cos \gamma = v \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{vx}$. Střední hodnota $\cos \gamma$ na intervalu $(-\pi/2; \pi/2)$ je $2/\pi$, což lze zjistit integrováním.

Obdobně počet molekul, které projdou zprava doleva:

$$n_-(x_0, t) = \frac{2}{\pi} N_V(x_0 + \bar{l}, t) S (\bar{v} dt). \quad (4.2)$$

Hustota difúzního toku i je rovna počtu částic, které projdou plochou S zleva doprava za jednotkový čas:

$$i = \frac{n_+ - n_-}{S dt} = -\frac{2\bar{v}}{\pi} (N_V(x_0 + \bar{l}, t) - N_V(x_0 - \bar{l}, t)). \quad (4.3)$$

Rozdíl hustot částic N_V^+ a N_V^- lze vyjádřit spádem (gradientem) této hustoty v bodě x_0 pro $\Delta x = 2\bar{l}$

$$N_V(x_0 + \bar{l}, t) - N_V(x_0 - \bar{l}, t) = \frac{\Delta N_V(x_0, t)}{\Delta x} 2\bar{l} = \frac{dN_V(x_0, t)}{dx} 2\bar{l}. \quad (4.4)$$

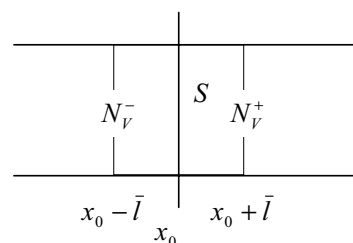
Celkově tedy:

$$i = -D \frac{dN_V}{dx}, \quad (4.5)$$

kde $D = 4\bar{l}\bar{v}/\pi$.

Přesnější výpočty, kde je započteno i např. silové působení mezi molekulami, vedly k výsledku $d = 0,599\bar{l}\bar{v}$.

Obr. 23



Úloha S . V

Ve vztahu pro tepelnou vodivost válcové nádoby plynu o spádu teploty dT/dx a průřezu S

$$q = \frac{Q}{Sdt} = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad (4.6)$$

se pokuste najít vyjádření pro konstantu λ , pokud tyčí projde za čas dt teplo Q .

Nápověda: střední energii jedné molekuly lze vyjádřit jako $u = m_0 c_V T$.

Kapitola 5

Obr. 24

Pro jednoduchou analýzu viskozity plynů budeme uvažovat podobný model jako u odvození toku částic v plynech. Tření v pohybujícím se plynu nebo kapalině (obecně tedy tekutině) vzniká tehdy, pohybují-li se jednotlivé vrstvičky tekutiny různými rychlostmi. Tření potom můžeme pomocí kinetické teorie modelovat přechody molekul mezi jednotlivými vrstvičkami, a tedy předáváním hybnosti.

Představíme si dvě vrstvy vzdáleny od sebe o vzdálenost d (ze stejného důvodu jako v příkladu S.III) podle obr. 24.

Jedna se pohybuje rychlostí v , druhá rychlostí $v + dv$, což lze také psát:

$$v + \bar{l} \frac{dv}{dx}. \quad (5.1)$$

Podobně jako u modelu poslední úlohy je každá molekula nositelem hybnosti $m_0 v$, resp. $m_0(v + dv)$. Přeletí-li jedna z částic jedné vrstvy do vrstvy druhé, bude změna hybnosti rovna

$$m_0 dv = m_0 \bar{l} \frac{dv}{dx}. \quad (5.2)$$

Počet částic, které se podílí na tomto ději lze napsat pomocí n_+ a n_- v minulé kapitole jako

$$n_+ + n_-. \quad (5.3)$$

Předaná hybnost je potom

$$dp = -(n_+ + n_-) m_0 \bar{l} \frac{dv}{dx}, \quad (5.4)$$

(záporné znaménko je zde z důvodu předávání hybnosti ve směru osy x , opačném, než je směr stoupající rychlosti).

Počty částic n_+ a n_- bereme jako počet částic v objemu mezi plochami, tj. $N_V S \bar{v}_x dt$, kde N_V je hustota částic. Tedy

$$(n_+ + n_-) = 2 N_V S \bar{v}_x dt = \frac{4}{\pi} N_V S \bar{v} dt. \quad (5.5)$$

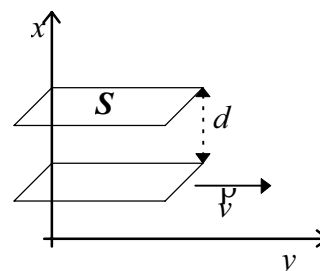
Budeme-li uvažovat třecí sílu mezi plochami závislou přímo úměrně na změně rychlosti a ploše vrstviček, dostaneme

$$F = -\eta \frac{dv}{dx} S. \quad (5.6)$$

A nakonec z definice síly jako změny hybnosti v čase ($F = \frac{dp}{dt}$) zjistíme dosazením za dp a porovnáním posledních dvou rovnic

$$\eta = \frac{4}{\pi} \rho \bar{v} \bar{l}, \quad (5.7)$$

uvědomíme-li si, že $\rho = N_V m_0$.



Úloha S . VI

Využijte vztahu pro velikost třecí síly k určení funkce závislosti rychlosti proudění kapaliny v trubici kruhového průřezu na vzdálenosti r od středu trubice.

Třecí síla působící na pomyslný válec okolo středu trubice o poloměru dr musí být opačná k síle způsobující pohyb (rozdíl tlaků), jinak by došlo ke změně rychlosti v čase.

Pomoc pro neintegrující: je-li $dv/dr = kr$, kde k je konstanta, potom $v = kr^2/2 + c$, kde c je konstanta, kterou určíme z okrajových podmínek úlohy – rychlost někde musí být nějaká.

A to je konec IX. ročníku Seriálu na pokračování. Snad se vám alespoň trochu líbil.

Řešení úloh SNP**Úloha S . I (3 body)**

Tato úloha vás měla přimět k tomu, abyste se více zamysleli nad tím, jaký vztah má fyzikální teorie k okolnímu světu a především lidem v něm, co si můžeme na základě našich vědeckých poznatků dovolit tvrdit a co ne. Odtud také plyne, že odpovědi nebyly úplně jednoznačné ve smyslu *ano/ne*, záleželo především na tom, jak své “správné” odpovědi obhájíte. Mnohdy stačí podívat se na daný problém z více stran a hned pocítíme, jak je “pravda” relativním pojmem. Vezmu postupně všechny nabídnuté odpovědi našemu příteli vynálezci, první diskutuji vždy tu možnost podle mého názoru správnější.

1. Termodynamika dokáže na základě svých principů, že perpetuum mobile neexistuje.

Ano: Úmyslně jsem v zadání úlohy neuváděl, o jaké perpetuum mobile vlastně jde, jestli prvního či druhého druhu. Na tom totiž až tak nezáleželo. Jako každá teorie i termodynamika stojí na jistých základech, postulátech, o jejichž pravdivosti se nepochybuje, prostě se z nich vychází. Tvrzení o neexistenci perpetua mobile druhého druhu pak dokážeme například za použití postulátu, že nemůže samovolně přecházet teplo ze studenějšího tělesa na teplejší hraním si s nejrůznějšími Carnoutovými cykly.

Ne: Pokud ale vezmeme za jeden z principů právě tvrzení o neexistenci periodicky pracujícího stroje, který by všechno získané teplo měnil plně na práci, aniž by nějaké teplo odevzdával chladiči, stává se toto tvrzení v rámci teorie nedokazatelným. Je to prostě postulát, o jehož platnosti se nemůžeme přít. Je tu však ještě jeden důležitý pohled na naši první odpověď. Cokoliv dokážeme uvnitř nějaké teorie, je skutečně stoprocentně pravdivé, ale jenom v té konkrétní teorii. Vůbec to neznamená, že to tak ve světě kolem nás platí, vědecká teorie nikdy nedokáže, že se svět podle ní řídí, tomu můžeme jen věřit. Termodynamické principy platí prostě proto, že jsme zatím nepozorovali jev, kdy by byly narušeny. Můžeme mít nějaké tvrzení ověřené milióny pokusy a vůbec to neznamená, že je toto tvrzení pravdivé, ale naopak stačí jeden jediný pokus a *celá* teorie je špatně.

2. Normálka, vždyť už Golem byl jedno velký perpetuum mobile.

Ne: Tak tohle by seriózní vědec neměl vypustit z úst. Proč? Protože k existenci Golema se prostě nemůžeme vědecky vyjadřovat, v Golema buď věříme, anebo ne.

Ano: Pokud vás chudák přítel moc otravuje, můžete jej takto odbít, ale to je psychologie a ne fyzika. Chcete mu snad pomoci nebo ne?

3. Odmalička nám vtloukají, že to nejde...

Ne: Tady budu rozhodně a kategoricky proti. Přesně tento přístup nejlépe symbolizuje tmářství, které do vědy nepatří. Za správné se budu vždycky snažit uznat to, o čem jsem se sám přesvědčil, a ne něco, co mě někdo někdy učil recitovat nazpaměť. Pokrok spočíval a pořád spočívá v bourání předsudků, které svazují naše myšlení. A pokud vědec něco vytvořil a dokázal, musí stát za svým, i kdyby měl být jediný na světě, jako třeba Albert Einstein na počátku 20. století.

Ano: S takovýmto přístupem je život o dost jednodušší (ale co z něj pak máme?).

4. Nevím, neboť se zabývám kinetickou teorií látek.

Tato otázka se mi jeví být velice spornou, nejsem úplně rozhodnut pro či proti.

Ano: Pravdou je, že jedna teorie se nemůže vyjadřovat k pojmům, které v ní nejsou smysluplně nadefinovány. Jak by se nám asi líbilo, kdyby sociolog kafral do fyziky a naopak? Ve fyzice to tak jednoznačné není, tam souvisí všechno se vším, zkuste však dokázat neexistenci perpetua pomocí elektrických obvodů.

Ne: Na druhou stranu pokud se někdo nazývá fyzikem (ať už se zabývá čímkoli) a neví, co to je perpetuum mobile, je to dost divný, že?

5. *To je skvělé, protože pak je celá termodynamika špatně.*

Ano: Pokud prasknou základy, zřítí se celá budova.

Ne: Ovšem pokud ty základy praskají třeba za takových podmínek, které na Zemi nejsou dosažitelné, je pevnost naší budovy dobrou aproximací. Co tím mám na mysli? Ve fyzice děláme vždycky model a myslím si, že podchytit naprosto přesně okolní svět se nám nikdy nepodaří. Newtonovská fyzika platí v našich podmínkách, protože korekce Obecné relativity jsou prostě neměřitelné. S termodynamikou a zákonem zachování energie je to trochu složitější, protože těm se snažíme věřit. Kdyby se věci nezachovávaly a z ničeho vznikalo něco, mohli bychom svoji fyzikální zástěru pověsit na hřebík.

6. *Mám sám jedno doma.*

Ne: To je lež (jinak ho přines ukázat, rád se podívám).

Ano: Dobrý tah, jak se kamaráda zbavit, hmm; ale co když náhodou přišel na něco kardinálního a po takové odpovědi, místo aby si šel pro nobelovku, skončí všelijak. Když už dáváme takové odpovědi (každý z nás alespoň jednou “kecal”), měli bychom si být také vědomi důsledků a případných následků, které z toho plynou. Kamarád mohl strávit půl života výrobou zázračného stroje a teď aby ho hodil do koše?

Tolik asi k první úloze, která byla (a přiznám to bez mučení) více filozoficko-vědeckého rázu, než čistě fyzikálního. Nebojte se o světě kolem sebe přemýšlet, ale potom zase s mírou. Jak tvrdí profesor Formánek, filozofovat o fyzice můžeme až tehdy, pokud jsme daný obor skutečně a dostatečně technicky zvládli, jinak je to jen mlácení prázdné slámy a k ničemu rozumnému to nevede. Pojďme tedy dělat tu fyziku a za deset dvacet let se o výše zmíněných otázkách pobavíme více.

Úloha S . II (2 body)

Úloha byla pro řadu řešitelů zřejmě jednoduchá. Pro izochorický děj platí $V = \text{const.}$, což znamená, že $\delta V = 0$, tedy $\delta W = p\delta V = 0$. První větu termodynamickou napíšeme ve tvaru $dU = \delta Q$.

Výraz $\frac{1}{n} \frac{dU}{dT}$ je definicí molární tepelné kapacity pro izochorický děj, $c_V = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT}$.

Stačí jen nalézt správný vztah, do kterého dosadíme, a máme $c_p = c_V + R_m$.

Úloha S . III (3 body)

Vztah pro střední volnou dráhu molekuly naleznete v druhé kapitole (2.4):

$$\bar{l} = \frac{1}{\sigma_c N_V},$$

kde σ_c je účinný průřez molekuly, v našem případě dusíku N_2 : $\sigma_c = \pi(2r)^2$, a N_V je objemová hustota částic. Tu vypočteme pro dané podmínky ze stavové rovnice

$$pV = NkT \rightarrow N_V = \frac{N}{V} = \frac{p}{kT}.$$

Pro střední volnou dráhu molekuly N_2 tak odvodíme

$$\bar{l} = \frac{kT}{\pi(2r)^2 p}.$$

Zadanou teplotu převedeme na teplotu termodynamickou a po dosazení dostaneme

$$\bar{l} = 1,43 \cdot 10^{-7} \text{ m}.$$

Úloha S . IV (3 body)

Možná je tato úloha příliš úvahová, ovšem myšlenkové postupy tohoto druhu jsou ve fyzice časté a mnohdy pro vyřešení problému klíčové. Při odvození tlaku na stěnu nádoby jsme uvažovali objem V , který byl určen plochou S (ve stěně nádoby) a hranou $v_x dt$. Chceme-li počítat nárazy molekul na stěnu nádoby, musíme ve svých úvahách zabránit molekulám, aby se srážely mezi sebou. Z definice střední volné dráhy molekuly víme, že molekula narazí na jinou průměrně po uběhnutí dráhy l . Hrana $v_x dt$ objemu V tedy musí být menší než \bar{l} . Časový okamžik dt , ve kterém děj uvažujeme, musíme tedy volit podle relace

$$dt < \frac{\bar{l}}{v_x}.$$

Ještě si dovoluji napsat dodatek k definici střední volné dráhy molekuly \bar{l} . Střední volnou dráhu molekul plynu λ lze pomocí ní definovat takto: \bar{z} jsme odvodili ze vztahu

$$\bar{z} = \sigma N_V \bar{v}, \quad (*)$$

kde \bar{v} je střední rychlost molekuly vůči ostatním, které uvažujeme v klidu. Budeme-li uvažovat i pohyb ostatních molekul, které budou mít v průměru také rychlosti \bar{v} , potom se budou dvě molekuly vůči sobě pohybovat rychlostí v' . Situace je načrtnuta na obr. 25.

Vyjádríme to kosinovou větou

$$v'^2 = 2\bar{v}^2 - 2\bar{v}^2 \cos \alpha,$$

pro střední hodnotu $\overline{v'}$ potom $\overline{v'^2} = 2\bar{v}^2 - 2\bar{v}^2 \overline{\cos \alpha}$, přičemž $\overline{\cos \alpha} = 0$ (kosinus dává hodnoty -1 až 1 v obou směrech shodným způsobem).

Můžeme psát: $\overline{v'} = \sqrt{2}\bar{v}$ a dosadit místo \bar{v} $\overline{v'}$ do (*): $\bar{z}' = \sigma N_V \overline{v'}$.

$$\text{Místo } \bar{l} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}} \text{ pak píšeme } \lambda = \frac{\bar{v}}{\bar{z}'} = \frac{\bar{l}}{\sqrt{2}}.$$

Koeficienty tohoto druhu v úvahách ovšem v kinetické teorii nemají takovou důležitost.

Úloha S . V (4 body)

Jednoduchý model tepelné vodivosti si představíme jako na obr. 26.

Molekuly v místě s teplotou T_2 mají energii

$$u_2 = m_0 c_V T_2,$$

podobně v místě s teplotou T_1 je

$$u_1 = m_0 c_V T_1.$$

Pokud je $T_1 > T_2$, bude tok tepla probíhat tak, že molekuly s energií u_1 putují do oblasti s energií u_2 a naopak, takže pohybem molekul dojde k předávání energie

$$Q = -N(u_2 - u_1),$$

záporné znaménko je zde proto, že energie je předávána proti směru spádu teploty.

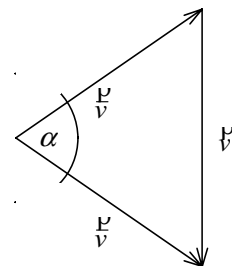
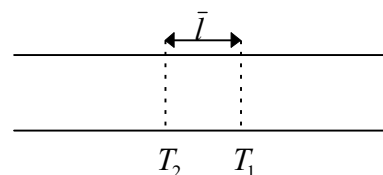
Lze psát N jako

$$N = N_V S \bar{v}_x dt,$$

kde $\bar{v}_x = \frac{2}{\pi} \bar{v}$. Jde o částice v objemu, který právě odpovídá výměně tepla za čas dt (částice uletí dráhu $\bar{v}_x dt$).

Celkově po dosazení

$$Q = -N_V S \frac{2}{\pi} \bar{v} m_0 c_V (T_2 - T_1) dt,$$

Obr. 25**Obr. 26**

kde $T_2 - T_1$ je vlastně dT , což lze napsat ($dx = \bar{l}$) jako $T_2 - T_1 = \frac{dT}{dx} \bar{l}$.

Dosadíme-li vztah pro Q do vzorce (4.6), tj.

$$\frac{Q}{Sdt} = -\lambda \frac{dT}{dx},$$

dostaneme porovnáním

$$\lambda = \frac{2}{\pi} N_V m_0 c_V \bar{v} \bar{l},$$

přičemž počet částic v objemu krát hmotnost jedné z nich je právě hustota.

Tedy $\lambda \approx \rho c_V \bar{v} \bar{l}$.

Úloha S. VI (4 body)

Mějme trubici o poloměru R a malé délce l , na jejích koncích rozdílné tlaky p_1 a p_2 . Rozdílem tlaků vzniká v trubici proudění. To je ovšem (u newtonovské viskózní kapaliny) omežováno třením v kapalině s koeficientem η ; tento proces lze popsat vztahem

$$F = -\eta \frac{dv}{dr} S,$$

uvedeným v kapitole 5. Zde S je obsah ploch, které se o sebe třou, dv/dr je spád rychlosti na vzdálenosti od středu trubice směrem ke krajům, F je třecí síla.

Ve vzdálenosti r od středu trubice je tedy třecí síla

$$F = -\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r l,$$

ta vyrovnává při ustáleném proudění sílu působící na sloupec kapaliny způsobenou rozdílem tlaků

$$F' = (p_2 - p_1) \pi r^2 \text{ a samozřejmě } F = F'.$$

Po dosazení do posledního vztahu lze vyjádřit

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{p_2 - p_1}{2\eta l} r,$$

což integrujeme na $v = -\frac{p_2 - p_1}{4\eta l} r^2 + c$,

kde ona konstanta k v nápovědě k integrování je $k = -\frac{p_2 - p_1}{4\eta l}$.

Mluvilo se též o okrajových podmínkách úlohy. V tomto případě je rozumné požadovat, aby rychlost $v = v(r)$ (v je funkcí r) byla na stěnách trubice nulová, tj.

$$v(R) = 0.$$

Dosadíme do vyjádření pro rychlost

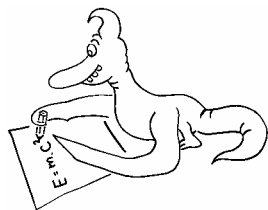
$$0 = -\frac{p_2 - p_1}{4\eta l} R^2 + c, \text{ z toho } c = \frac{p_2 - p_1}{4\eta l} R^2.$$

Celkově tedy (po dosazení za c)

$$v = \frac{p_2 - p_1}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$

nebo také

$$v = \frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dl} (R^2 - r^2).$$



Řešení

Úloha I. 1 ... loď ve vaně (3 body)

Loď těžká 100 tun musí podle Archimedova zákona vytlačit 100 m^3 vody ($mg = \rho Vg$), aby plavala. Ve vaně je jenom 1 m^3 vody, a proto nemůže vytlačit 100 m^3 vody ($1 < 100$) a tudíž nemůže ani plavat. Tak to tedy **NE!!!**, i když toto řešení zaslala značná část řešitelů.

Nejdříve se domluvíme na tom, co znamená plavat. To je takový stav lodi, kdy loď je v klidu a může tak zůstat libovolnou dobu ve styku pouze s vodou a se vzduchem, to znamená, že se nedotýká břehu, dna ani ji nad hladinou nedrží žádný jeřáb či vrtulník. Celková výslednice sil působících na loď musí být nulová, aby se loď nezačala někam pohybovat a nenarazila nám na stěnu vany. Na loď působí jen dvě síly: tíhová a vztlaková. Obě působí ve vertikálním (svislém) směru, první nahoru, druhá dolů. V horizontálním (vodorovném) směru žádná síla nepůsobí. Velikost vztlakové síly se tedy rovná velikosti tíhové síly.

A teď nastupuje onen Archimedův zákon. Ten povídá něco o **objemu ponořené části tělesa** a nějaké síle. Vtip spočívá v tom, že ta síla je právě úměrná ponořené části tělesa. Nezáleží už na ničem jiném, tedy ani na tom, kolik kapaliny (vody) je kolem, jak je tu hluboko atd. Pokud si povrch lodi rozdělíte na malé plošky, žádná z nich nepozná, jestli je kolem ní 1 mm (jako ve vaně) nebo 11 km vody (jako v Mariánském příkopě). Stále do ní tlačí ta stejná hydrostatická síla. Ta má na svědomí vznik vztlakové síly, která vystupuje v Archimedově zákoně. Hydrostatická síla závisí na hloubce. Její vodorovné složky se vykompenzují a zbyde jen svislá složka, úměrná výšce kvádrů krát ploše podstav, což je objem kvádrů. Celé těleso můžeme složit z úzkých svislých kvádříků o malých podstavách, pro které platí úměrnost síly a objemu.

Archimedův zákon netvrdí, že by ve vaně muselo být tolik vody, aby byla stejně těžká jako loď. Je jen potřeba, aby celá část lodi, která byla ponořena ve vodě při plavbě na moři, byla ponořena i ve vaně. Objem ponořené části na moři je 100 m^3 ($mg = V\rho g \Rightarrow V = m/\rho = 100 \cdot 10^3 / 10^3 = 100 \text{ m}^3$). Množství vody klade na vanu jisté nároky – musí mít velice podobný tvar jako kýl lodi. To proto, aby mezera mezi lodí a vanou neměla objem větší než 1 m^3 . Také musí být vana dostatečně veliká (tzn. asi 101 m^3), aby se do ní vešla loď s trochou vody. Potom loď plave.

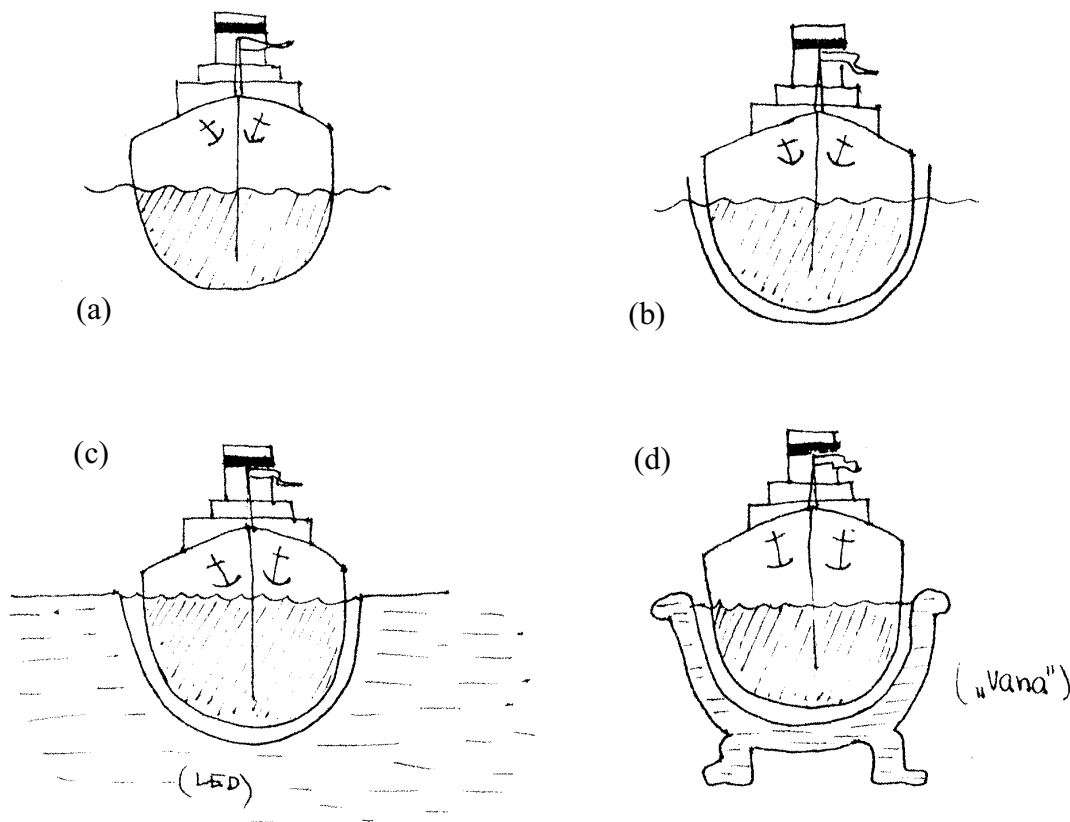
Někteří z vás uvažovali o tom, že pokud by byla mezera mezi lodí a vanou dostatečně malá, mohly by se uplatnit i kapilární jevy, které by celý výsledek mohly změnit. Pokud si aproximujete loď krychlí o objemu 100 m^3 , vyjde vám vrstvička tlustá asi 9 mm a tady se ještě kapilární jevy neprojeví příliš silně.

Jestli stále nevěříte tomu, že loď může plavat, tak se vás pokusím ještě dvakrát přesvědčit, že to opravdu lze (viz obr. 27).

Představte si bitevní loď plovoucí na moři (a). Kolem ní natáhneme pomyslnou plochu, která ji obepíná, odděluje ji od okolní vody a objem vody který tato plocha uzavírá kolem lodi je 1 m^3 (b). Pak necháme veškerou vodu kolem této plochy zamrznout (c). Z vytvořeného ledu vyřízneme něco tvarem připomínající vanu (d). Zcela evidentně cítíme, že v žádném kroku 1→2→3→4 jsme nenarušili “silové poměry”. Plovoucí loď ve vaně (4) je tedy stejně dobře možná jako loď vznášející se v moři.

Koho ani tento myšlenkový pokus nepřesvědčil, může si udělat malý pokus. Potřebuje na to dva kelímky od jogurtu. Jeden bude sloužit jako “vana” a druhý jako “bitevní loď”. Ten druhý se může vyzbrojit děly a vyzbrojí do celkové hmotnosti asi 150 g (u 200 ml kelímku). Pak se do “vany” nalije trocha vody a ponoří se “loď”. Regulováním zátěže křížníku se dá dosáhnout toho, že ve “vaně” bude jen velmi málo vody. Její hmotnost bude určitě menší než hmotnost “lodi”.

Obr. 27



Úloha I. 2 ... polopropustná zrcadla (4 body)

Označíme-li koeficient propustnosti zrcadla K , odráží se vždy $(1 - K)$ -násobek intenzity dopadajícího světla a K -násobek prochází. Světlo má více možností, jak se dostat na druhou stranu soustavy zrcadel. Buď projde rovnou a bude mít intenzitu $K^2 I_0$, nebo se mezi zrcadly dvakrát odrazí a přispěje intenzitou $(1 - K)^2 K^2 I_0$, anebo může dojít i k více odrazům (musí jich být ale sudý počet) a příslušný příspěvek bude $(1 - K)^{2n} K^2 I_0$, kde n je počet odrazů od jednoho zrcadla. Výsledná intenzita je tedy součtem nekonečné geometrické řady

$$I = K^2 I_0 + (1 - K)^2 K^2 I_0 + (1 - K)^4 K^2 I_0 + \dots + (1 - K)^{2n} K^2 I_0 + \dots$$

Geometrická řada s prvním členem a_1 a kvocientem q ($|q| < 1$) má součet

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^n + \dots = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Takže výsledek můžeme zapsat ve tvaru: $I = \frac{K^2 I_0}{1 - (1 - K)^2} = \frac{K I_0}{2 - K}.$

Pro zadanou hodnotu $K = 1/5$ je $I = 1/9$. Méně přesné výsledky (např. numerické sčítání řady uvedené výše) byly pochopitelně ohodnoceny menším počtem bodů.

Úloha I. 3 ... deskový kondenzátor (5 bodů)

Příklad lze nejelegantněji vyřešit pomocí zákona zachování energie. Práce vykonaná na kondenzátoru je rovna rozdílu konečné a počáteční energie kondenzátoru. (Veličiny na počátku děje mají index 1, veličiny na konci index 2.)

a) Vykonaná práce je $W_a = E_2 - E_1$, přičemž energii kondenzátoru spočítáme jako

$$E_i = \frac{1}{2} C_i U_i^2 = \frac{Q_i^2}{2C_i}.$$

Uvážení, že $Q_1 = Q_2$ a $Q = C_1 U_b$, kde

$$C_i = \varepsilon \frac{S}{l_i},$$

dostáváme

$$W_a = \frac{Q^2}{2C_2} - \frac{Q^2}{2C_1} = \frac{1}{2} U_b^2 C_1 \left(\frac{C_1}{C_2} - 1 \right) = \frac{1}{2} U_b^2 C_1 \left(\frac{l_2}{l_1} - 1 \right).$$

b) Do zákona zachování energie musíme započítat i energii, kterou dodáváme baterii (v případě $l_1 > l_2$ se kapacita kondenzátoru snižuje, a tedy i náboj na něm – ten vlastní práci “přenášíme” do baterie):

$$W_{\text{bat}} = -U_b^2 (C_2 - C_1), \text{ tedy } W_b = W_{\text{bat}} + E_2 - E_1.$$

Uvědomíme-li si, že $U_1 = U_2 = U_b$, dostaneme

$$W_b = U_b^2 (C_1 - C_2) + \frac{1}{2} U_b^2 C_2 - \frac{1}{2} U_b^2 C_1 = \frac{1}{2} U_b^2 C_1 \left(1 - \frac{C_2}{C_1} \right) = \frac{1}{2} U_b^2 C_1 \left(1 - \frac{l_1}{l_2} \right).$$

Práce se tedy liší. Je to způsobeno tím, že v případě b) ubývá na deskách kondenzátoru náboj, čímž klesá síla vzájemného přitahování desek, kterou musíme překonávat.

Mnoho studentů řešilo problém právě přes síly. Je třeba si uvědomit, že mechanická síla má opačné znaménko než síla elektrická, která má velikost

$$F_e = \frac{E}{2} Q,$$

(deska nepůsobí sama na sebe; jedna deska vytváří pole pouze $E/2$, součtem polí z obou desek vzniká pole E). Potom je ovšem složitější popsat vliv baterie. Další chybou bylo zapominání právě vlivu baterie na výměnu energií.

Překvapilo mě, že někteří řešitelé neznají správně vztah pro energii kondenzátoru

$$E = \frac{1}{2} CU^2$$

a píše ho bez $1/2$. Podívejte se proto do příslušné učebnice fyziky, kde je tento faktor patřičně oddůvodňován.

Úloha I . 4 ... tlak plynu (4 body)

Problém této úlohy spočíval již v nejasně formulovaném zadání – nebylo zřejmé, zda

a) držím konstantní teplotu plynu T a prudce ohřívám či ochlazuji nádobu nebo

b) do nádoby o teplotě T_C vkládám stejné množství plynu o různých teplotách.

V druhém případě se totiž řešení redukuje na prostý problém souvislosti tlaku plynu a teploty, kterou stanovuje rovnice ideálního plynu $pV = nRT$, pro vyšší teplotu je vyšší tlak!

V případě a) se musíme zabírat interakcí mezi plynem a stěnou nádoby. Jelikož jsou teploty T a T_C různé, dochází k výměně tepla (jde tedy o nerovnovážný děj). Je zřejmé, že aby k tomu došlo, částice plynu musí odlétnat s jinou rychlostí, než dopadla. Zajímáme-li se však o tlak plynu v daný moment, nelze argumentovat tím, že se plyn u stěny ohřeje a tím se zvýší jeho tlak (jak psali mnozí z vás), je potřeba jistý čas, aby se změněný impuls odražených částic předal ostatním uvnitř plynu, které se pohybují opačnými směry. Změnu tlaku lze zdůvodnit pouze tím, že v průměru je změna hybnosti dopadající částice větší nebo menší než v rovnováze. Protože dochází k přenosu energie, je zřejmé, že střední energie částic (a tedy střední kvadratická rychlost) odražených částic je větší resp. menší než dopadajících. Přesto z toho neplyne, že by se musela změnit střední “ne kvadratická” rychlost – spektrum částic po odrazu může být jiné než před ním. Toto **zdůvodnění** řešení úlohy bereme jako **dostatečné**, pokud jste se nepokusili o detailnější výpočty. Následující kvantitativní zdůvodnění by mělo přesvědčit i ty největší zatvrzelce.

Zkusme popsat tuto úlohu prostým modelem. Pro naše potřeby se omezíme na jednu komponentu rychlostí kolmou na uvažovanou stěnu – o dalších dvou lze předpokládat, že se příliš nezmění. Pak lze celou situaci (prozatím) zjednodušit na pružný ráz dvou koulí, částice plynu s hmotností m a rychlostí v a částice stěny, která má hmotnost M a rychlost V .

Ta podle představ o tuhé látce kmitá kolem rovnovážné polohy s amplitudou X_0 , tedy $V = V_0 \cos \omega t$, kde $V_0 = X_0 \omega$. Zavedeme-li parametr $\xi \ll m/M$, dostáváme pro rychlost v' plynu po srážce (ze zákona zachování hybnosti a energie)

$$v' = -\frac{1-\xi}{1+\xi}v + \frac{2}{1+\xi}V. \quad (1)$$

Když by částice stěny nekmitaly, byla by velikost rychlosti částice plynu po odrazu menší než před ním. Chceme-li stanovit tlak plynu, tedy sílu, jakou molekuly působí v daném okamžiku na část stěny o jednotkovém obsahu, je třeba stanovit střední změnu hybnosti částic při nárazu na stěnu, tedy

$$F = -\frac{\langle \Delta p \rangle}{\Delta t} = \frac{N(\langle v \rangle - \langle v' \rangle)}{\Delta t}, \quad (2)$$

kde N je počet částic, který za dobu Δt (jdoucí v limitě k 0) narazí na danou plochu, N závisí na teplotě plynu a nikoli na vlastnostech stěny, tedy je konstantní. Středování $\langle v' \rangle$ musíme provést nejen přes všechny počáteční rychlosti, ale i přes všechny fáze oscilujících částic stěny. Počet částic N je zřejmě dostatečný, abychom při středování místo sum mohli uvažovat integrály. Na první pohled by se zdálo, že vlivem středování přes symetrický interval se druhý člen na pravé straně vztahu (1) anuluje a dostaneme případ stejný jako při nekmitající stěně. Pravdu ale měli ti řešitelé, kteří usoudili, že situace není zcela symetrická: Bude-li se částice stěny pohybovat “ven” z nádoby, pomalejší částice plynu ji vůbec nedoženou. Jak lze ukázat (v zájmu stručnosti to zde dělat nebudeme), při rovnoměrném dopadu částic plynu je pravděpodobnost srážky úměrná vzájemné rychlosti $v - V_0 \cos \omega t$. V jistém zanedbání oblastí, kde tato pravděpodobnost vychází záporná (částice se zde nemůže srazit), lze středováním vzorce (1) dospět k tomuto výsledku:

$$\langle v' \rangle = -\frac{1-\xi}{1+\xi}v - \frac{1}{1+\xi} \frac{V_0^2}{v} \quad (3)$$

Aniž bychom se pokoušeli definovat teplotu stěny, je zřejmé, že čím bude vyšší, tím větší bude V_0^2 (částice stěny kmitající s větší energií). Tím pádem i rozdíl středních rychlostí ve vzorci (2) a následkem toho i tlak na stěnu bude zřejmě větší v případě $T_C > T$ než $T_C < T$.

Zůstává otázka, jakou hodnotu má faktor ξ . Protože je částice ve stěně držena vazbami, nelze tvrdit, že se při rázu (který není okamžitý) chová jako volná – hmotnost M bude tedy spíše než hmotnosti molekuly či jádra atomu v krystalové mříži odpovídat efektivní hmotnosti více sousedních center. Nicméně se zase zřejmě nejedná o hmotnost celé stěny, pro běžné látky tedy může mít tento poměr hodnotu desetin až setin.

Existuje jedno experimentální potvrzení odvozeného jevu. Mnozí z vás znají světelný mlýnek: kolečko s plochými lopatkami rovnoběžnými s osou otáčení, jejichž jedna strana je postříbřená a druhá černá. Je-li tento předmět vystaven světlu ve vakuované trubici, začne se otáčet ve směru černých plošek – světlo, které se od lesklých stran odrazí, předá mlýnku větší impuls než to, které se pohltí na protilehlé černé plošce. Nachází-li se ovšem v nádobě zbytkový plyn, začne se mlýnek točit překvapivě opačným směrem. Vysvětlení spočívá v tom, že se černé stěny zahřejí a převládne pohyb způsobený kinetikou plynu. Protože je plyn dost řídký a lopatky se pohybují, nelze předpokládat, že by se u teplejších černých stěn vytvořila vrstvička teplého plynu s větším tlakem – ten je neustále nahrazován plynem novým. Vysvětlení tedy dává až diskutovaný jev, že střední rychlost odražených molekul bude u teplejší plošky větší než u chladnější.

Bylo by vhodné uvést pár slov k argumentům, které studenti ve svých řešeních uváděli. Slovní argumenty typu “plyn se rozpíná, proto víc tlačí”, jsem zavrhl, i když v jádru byly správné – k fyzikálnímu popisu je třeba používat přesné výrazy podepřené platnými rovnicemi. Úloha se zabývala nerovnovážným stavem v daném okamžiku, nikoli izochorickým dějem – řešení uvádějící tento proces byly zákonitě odměněny 0 body. Argumenty, které se opíraly o tepelné stahování a rozpínání nádoby, jsem také zavrhl, kromě toho, že pro všechny známé látky je tento efekt podstatně menší než výše popsáné

jevy, závisí i samotný směr změny objemu nádoby na materiálu: pro gumu, která se teplem stahuje, je jiný než pro kovy.

Úloha I. 5 ... lokomotivy (5 bodů)

Nejprve bych vás chtěl upozornit na jednu maličkost, co se týče obr. 3. Jedná se o letecký snímek, tedy pohled shora a nikoliv ze strany, což pochopilo jen málo řešitelů. Je pravda, že obrázek není příliš šťastný, ale i tak se dalo přijít na to, že odklon kouře od kolejí způsobuje boční vítr. Přestože kouř je teplejší než okolní vzduch, nestoupal by totiž rovnoměrně, ale spíš by se zpomaloval, poněvadž se postupně ochlazuje. Nepředpokládáme samozřejmě vzestupný vítr (tornádo u nás těžko potkáte). Navíc pokud úlohu opravdu vyřešíme, zjistíme složku rychlosti kolmou na koleje asi 44 km/h, což je na stoupání trochu moc.

Samotná úloha pak skrývá jen dvě nebezpečná místa. Jednak si musíte uvědomit, že fouká vítr, a to směrem nahoru doprava (při pohledu na obr. 28), a dále pak zvolit vhodně souřadnou soustavu, aby nevznikla chyba ve znaménku. Je zde také několik předpokladů, které musí být splněny, aby úloha byla řešitelná. Vítr musí vát ve všech místech stejným směrem a stejnou rychlostí. To je sice idealizace, ale bez ní bychom úlohu těžko řešili. Lehké částičky kouře jsou navíc po vypuštění z komína téměř okamžitě zastaveny a dále jsou unášeny pouze větrem. Přijmeme-li tyto předpoklady, můžeme přejít k řešení.

Úvahou zjistíme směr větru. Směr kolmé složky ke kolejím je jasný. A že fouká proti směru jízdy první lokomotivy, nahlédneme např. porovnáním úhlů mezi kouřem a kolejemi u první a třetí lokomotivy. První lokomotiva má ostřejší úhel, přestože je její rychlost menší, odtud směr větru. Zvolme si nyní kladné směry rychlostí: nejpřirozenější jsou směry zleva doprava a odspodu nahoru. Úhel budeme měřit proti směru hodinových ručiček (viz obr. 29). V takto zvolené soustavě můžeme psát:

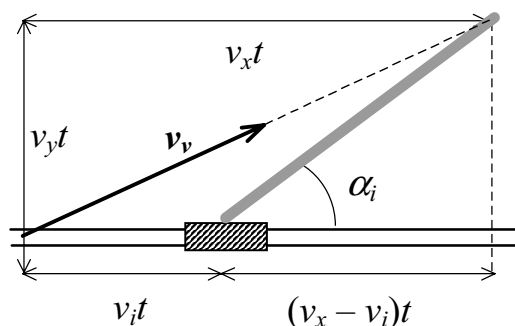
$$\begin{aligned} v_1 &= -50 \text{ km/h,} \\ v_3 &= 70 \text{ km/h,} \\ v_2 &= ?, \\ v_x &= ?, v_y = ?, \\ \alpha_1 &= 30^\circ, \\ \alpha_3 &= 135^\circ, \\ \alpha_2 &= 70^\circ, \end{aligned}$$

kde v_x a v_y jsou složky rychlosti větru. Za čas t urazí obláček kouře dráhu $v_y t$ ve směru kolmém ke kolejím a dráhu $v_x t$ ve směru rovnoběžném. Vlak za stajný čas urazí v témž směru dráhu $v_i t$, jak je vidět z obr. 28. Můžeme tak psát

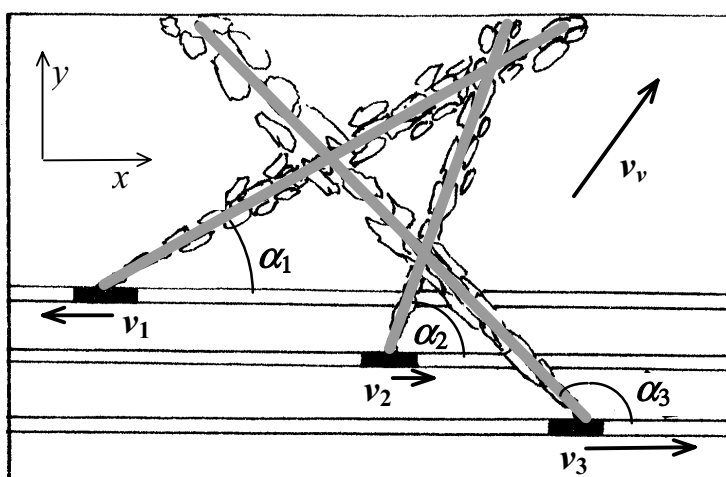
$$\operatorname{tg} \alpha_i = \frac{v_y t}{(v_x - v_i) t} = \frac{v_y}{v_x - v_i}.$$

Tento vztah platí díky vhodně zvolené soustavě souřadnic pro všechny vlaky. Platí tedy

Obr. 28



Obr. 29



$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{v_y}{v_x - v_1}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{v_y}{v_x - v_2}, \quad \operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{v_y}{v_x - v_3}.$$

Z těchto rovnic můžeme určit neznámé složky větru

$$v_x = \frac{v_1 \operatorname{tg} \alpha_1 - v_3 \operatorname{tg} \alpha_3}{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_3}, \quad v_y = \frac{v_3 - v_1}{\cotg \alpha_1 - \cotg \alpha_3}$$

a rychlost druhého vlaku

$$v_2 = v_x - v_y \cotg \alpha_2 = \frac{v_1 \operatorname{tg} \alpha_1 (\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_3) - v_3 \operatorname{tg} \alpha_3 (\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1)}{\operatorname{tg} \alpha_2 (\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_3)}.$$

Číselně pak dostaneme $v_2 = 10 \text{ km/h}$, $v_x = 26 \text{ km/h}$, $v_y = 44 \text{ km/h}$.

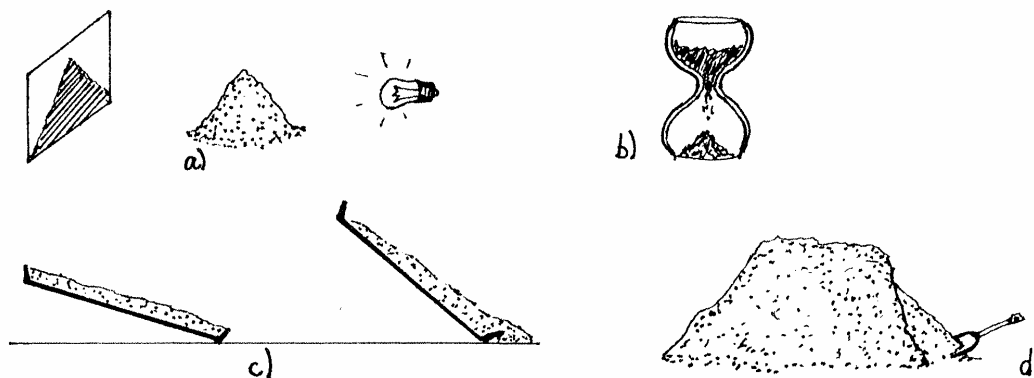
Odpověď tedy zní: druhá lokomotiva se pohybuje rychlostí 10 km/h doprava, tedy ve směru jízdy třetí lokomotivy. Kouř přitom lokomotivu předbíhá, neboť vane silný vítr.

Úloha I. 6 ... mohyla z písku (8 bodů)

Šlo o experimentální úlohu!!! – tedy o měření a zpracování výsledků. Tvoření nějaké teorie bylo pouze druhořadou záležitostí, spousta řešitelů se však zaměřila spíše na teorii a samotné měření a zpracování dat velice podcenila.

Základem každého experimentu je navrhnutí vhodné metody měření a sestavení aparatury potřebné pro měření. Předpokládám, že každý, kdo něco měřil, se pokusil nějakou vhodnou metodu nalézt a také nějakou našel, ale většina řešitelů se s popisem metody příliš neobtěžovala, bohužel. Uvedeme zde metody měření, které jste vynalezli s cílem co nejlépe naměřit vrcholový úhel kužele sypané látky.

Obr. 30



Některé z metod měření jsou naznačeny na obr. 30. Většina řešitelů měřila parametry sypaného kužele, někteří však tento problém obešli tím, že měřili úhel, při kterém se začne sesouvat sypká látka z nakloněného tácku (viz bod c) na obrázku). Vyskytlo se i řešení, kdy experimentátor umístil sypkou látku do krabice, a uvolnil otvor uprostřed dna, čímž se v krabici vytvořila kuželová prohlubeň, jejíž parametry pak měřil.

Zásady metody sypání

- sypat na vodorovnou podložku (jinak by byl kužel dole šikmo seříznutý)
- sypat z malé výšky
- sypat do jednoho bodu (např. pomocí úzkého trychtýře, ustřiženého kornoutku, které jsou upevněné)

Metody měření

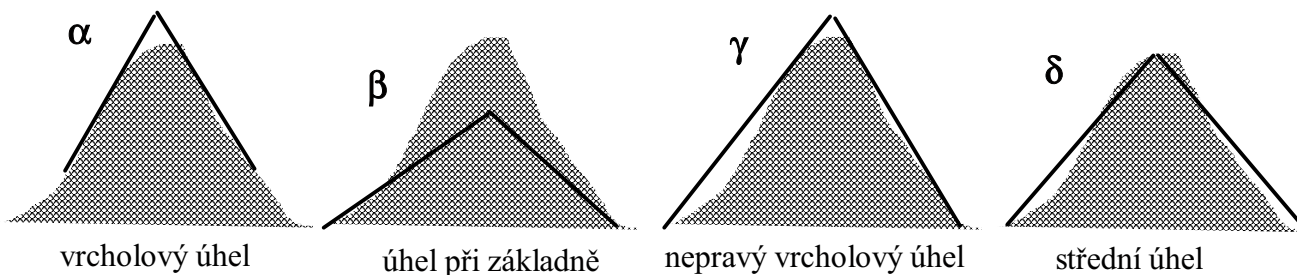
1. Přímé měření úhlů:

a) přiložíme špejli nebo papírové pruhy zajištěné v místě křížení (lze použít i kružítko). Tento úhel přeneseme a změříme úhломěrem. Musíme však přiložit proužky kolmo k podložce (kolmost jste asi odhadovali, málokdo kontroloval svůj odhad olovnicí).

Výhody: Touto metodou můžeme měřit jak vrcholový úhel α , i úhel γ (viz obr. 31)

Nevýhody: Úhel se může při přenášení zkreslit nebo může snadno dojít k poškození kužele a tím k větší nepřesnosti měření.

Obr. 31



b) zavěšíme olovničku nad vrchol a přiložíme úhloměr podle obr. 32.

Nevýhody: Přikládání úhloměru je poměrně nesnadné, metoda bude zatížená velkou chybou, neboť úhloměr nemůžeme přikládat přímo k olovničce.

c) přisypáváme ke kolmé desce, na kterou tento kužel obkreslíme a poté změříme úhloměrem jeho vrcholový úhel.

Výhody: Měření je nenáročné a snadno realizovatelné.

Nevýhody: Deska může zkreslit výsledky měření. Vrchol kužele se nám při nejlepší vůli nepodaří udělat přímo u desky.

d) měříme vrcholový úhel stínu kužele nebo jeho obrazu v zrcadle, popřípadě se na kužel díváme přes sklo a obkreslíme jeho obrys. Zdroj světla je třeba umístit dostatečně daleko, aby nedocházelo k co nejmenšímu zkreslení, jak je to vidět na obr. 33. Při osvětlení bodovým zdrojem nepromítáme naši hromádku přes kolmý průřez, ale s rostoucí vzdáleností zdroje stává se tato chyba zanedbatelnou.

e) přiložíme alobal k okraji základny kužele a ohneme jej podle tvaru kužele. Takto přeneseme úhel při základně nebo nepravý vrcholový úhel, což závisí na délce proužku alobalu.

Nevýhody: Úhel se může při přenášení zkreslit nebo může snadno dojít k poškození kužele jako v bodu a)

2. Nepřímé měření úhlů:

Změříme dva rozměry kužele (např. výšku + průměr základny nebo výšku + obvod).

Výhody: Je to jednoduché a nic nepoškodujeme.

Nevýhody: Měříme tak pouze střední vrcholový úhel δ . Promítnou se nám do měření také nejrůznější nepravidelnosti hromádky, především to, že u podložky se kužel rozplývá.

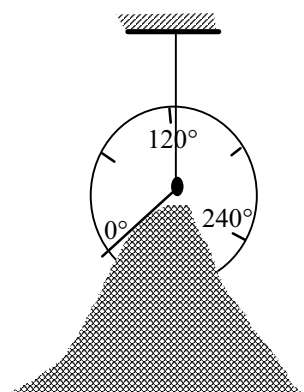
3. Netradiční měření:

Jakékoliv netradiční nápady při řešení úloh vítáme a jsou samozřejmě příslušně bodově oceňovány, proto se nebojte vymýšlet co nejefektivnější metody.

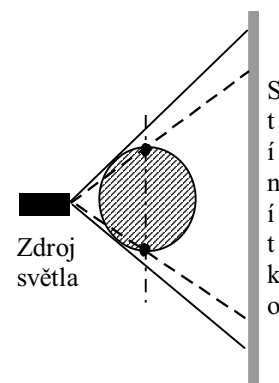
a) tácková metoda.

Je třeba zajistit, aby tření mezi táckem a látkou bylo větší než tření mezi částicemi látky, neboť pokud bude toto tření příliš malé, bude nám látka po tácku sjíždět pod mnohem menším úhlem než je úhel sypný.

Obr. 32



Obr. 33



b) krabicová metoda.

U této metody zůstává problémem měření úhlu, který jsme diskutovali v bodu 1.

Měření pro cukr krystal různými metodami

Každou metodou jsme změřili pět zvlášť nasypných kuželů, přičemž pro každý kužel jsme provedli tři měření námi zjišťovaného úhlu a u metody d) délkových parametrů kužele. Výsledky měření jsou psány vedle tabulky, kde uváděné absolutní a relativní chyby jsou směrodatnou odchylkou aritmetického průměru, do které je započítána i chyba metody (v průměru jsme ji odhadli asi na 2°)

a) přiložení proužků

| č. m. | α_1 | α_2 | α_3 | α_4 | α_5 |
|-------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | 105° | 110° | 118° | 107° | 112° |
| 2 | 107° | 109,5° | 119° | 107° | 108° |
| 3 | 108,5° | 110,5° | 118,5° | 109° | 113° |

$$\alpha = 111^\circ \pm 6^\circ$$

$$\delta\alpha = 5,4\%$$

b) přiložení dvakrát přeloženého tuhého papíru

| č. m. | α_1 | α_2 | α_3 | α_4 | α_5 |
|-------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | 112° | 104° | 111° | 104° | 114° |
| 2 | 111° | 104° | 109° | 104° | 114° |
| 3 | 106° | 109° | 108° | 104° | 108° |

$$\alpha = 108^\circ \pm 6^\circ$$

$$\delta\alpha = 5,6\%$$

c) překreslení na sklo

| č. m. | α_1 | α_2 | α_3 | α_4 | α_5 |
|-------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | 106,5° | 108° | 118° | 114° | 117° |
| 2 | 110° | 111,5° | 115° | 118,5° | 118° |
| 3 | 105° | 109,5° | 112° | 112° | 120° |

$$\alpha = 113^\circ \pm 5^\circ$$

$$\delta\alpha = 4,4\%$$

d) měření délkových parametrů kužele

| č. kužele | č. měření | o [cm] | v [cm] | d [cm] |
|-----------|-----------|----------|----------|----------|
| 1 | 1 | 48,0 | 4,6 | 14,7 |
| | 2 | 47,2 | 4,6 | 14,9 |
| | 3 | 48,4 | 4,5 | 15,2 |
| 2 | 1 | 59,8 | 6,2 | 19,1 |
| | 2 | 59,4 | 6,1 | 19,5 |
| | 3 | 60,8 | 6,25 | 19,3 |
| 3 | 1 | 49,5 | 4,9 | 15,6 |
| | 2 | 49,2 | 4,8 | 15,9 |
| | 3 | 49,5 | 5,0 | 16,0 |
| 4 | 1 | 61,7 | 5,8 | 19,6 |
| | 2 | 63,0 | 5,7 | 19,8 |
| | 3 | 62,0 | 5,8 | 20,0 |
| 5 | 1 | 49,4 | 4,8 | 16,1 |
| | 2 | 50,0 | 4,7 | 15,7 |
| | 3 | 50,2 | 4,75 | 16,0 |

Výpočet vrcholového úhlu z průměru a výšky i z obvodu a výšky vyšel po zaokrouhlení stejně:

$$\alpha = 117^\circ \pm 4^\circ$$

$$\delta\alpha = 3,4\%$$

Měření pro různé látky metodou překreslení na sklo

Metodou překreslení na sklo jsme změřili čtyři zvlášť nasypané kužely, přičemž pro každý kužel jsme provedli tři měření námi zjišťovaného úhlu.

a) mletá káva (malá zrna, velmi nepravidelný tvar)

| č. m. | α_1 | α_2 | α_3 | α_4 |
|-------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | 80° | 88° | 87° | 83,5° |
| 2 | 80,5° | 89° | 87° | 86° |
| 3 | 86° | 86,5° | 84° | 78,5° |

$$\alpha = 85^\circ \pm 5^\circ$$

$$\delta\alpha = 5,9\%$$

b) strouhanka (střední zrna, zcela nepravidelný tvar)

| č. m. | α_1 | α_2 | α_3 | α_4 |
|-------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | 85° | 86° | 85,5° | 91° |
| 2 | 86° | 83,5° | 86° | 90,5° |
| 3 | 85° | 86,5° | 85,5° | 90° |

$$\alpha = 87^\circ \pm 4^\circ$$

$$\delta\alpha = 4,6\%$$

c) rýže loupaná značky EMARKO (velká zrna, doutníkový tvar)

| č. m. | α_1 | α_2 | α_3 | α_4 |
|-------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | 100° | 97° | 95° | 104° |
| 2 | 101° | 98° | 99° | 95° |
| 3 | 105° | 95° | 96° | 102° |

$$\alpha = 99^\circ \pm 5^\circ$$

$$\delta\alpha = 5,1\%$$

d) sůl mořská s jódem SEL (střední zrna, krystalky)

| č. m. | α_1 | α_2 | α_3 | α_4 |
|-------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | 114° | 110° | 114° | 117° |
| 2 | 110° | 110° | 122° | 109° |
| 3 | 107° | 111° | 113,5° | 108° |

$$\alpha = 112^\circ \pm 6^\circ$$

$$\delta\alpha = 5,4\%$$

e) hladká mouka AHEMA (velmi malá zrna, nepravidelný tvar)

| č. m. | α_1 | α_2 | α_3 | α_4 |
|-------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | 72° | 70° | 73,5° | 73° |
| 2 | 77° | 79° | 74° | 80° |
| 3 | 74° | 71° | 70,5° | 79° |

$$\alpha = 74^\circ \pm 5^\circ$$

$$\delta\alpha = 6,8\%$$

f) polohrubá mouka AHEMA (dostí malá zrna, nepravidelný tvar)

| č. m. | α_1 | α_2 | α_3 | α_4 |
|-------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | 93,5° | 93° | 98° | 98° |
| 2 | 94,5° | 94° | 95° | 96° |
| 3 | 91° | 94° | 94° | 89° |

$$\alpha = 94^\circ \pm 4^\circ$$

$$\delta\alpha = 4,3\%$$

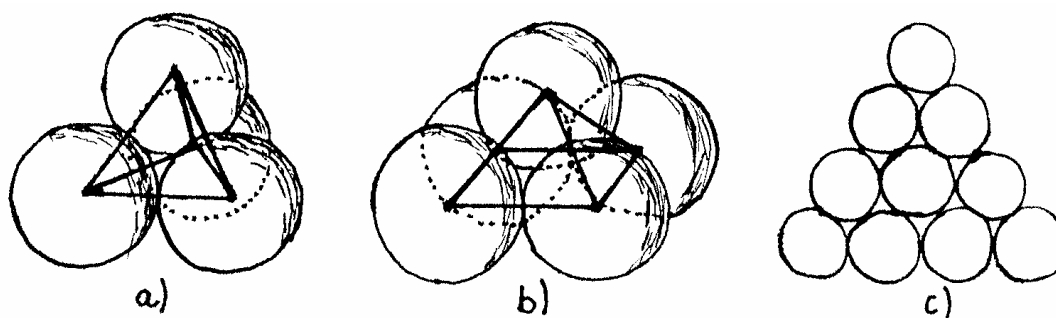
g) hrubá mouka AHEMA (malá zrna, nepravidelný tvar)

| č. m. | α_1 | α_2 | α_3 | α_4 |
|-------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | 104° | 93,5° | 102,5° | 101° |
| 2 | 109° | 95° | 99° | 100° |
| 3 | 106,5° | 98° | 94,5° | 98,5° |

$$\alpha = 100^\circ \pm 7^\circ$$

$$\delta\alpha = 7,0\%$$

Obr. 34



Teorie a diskuse výsledků

Hned v úvodu musím poznamenat, že teorie je společným dílem nás všech, tedy i vašim.

- Někteří z vás se pokoušeli vysvětlit pozorovaný jev pomocí pravidelnosti zrn a pravidelnosti uspořádání (viz obr. 34). Tento model sice vysvětluje, že úhel v dobrém přiblížení nezávisí na velikosti kužele, **nevysvětluje** však, **proč vzniká právě kužel** (jehlan by přece odpovídal pravidelnému uspořádání částic mnohem lépe!). Dále **není**

- jasné, jak** takto uspořádaná zrna **drží pohromadě** a zda jsou třecí síly dostatečně velké. Uspořádání *a*), *c*) dávají velký nesouhlas s experimenty.
- Někteří se snažili dokázat, že vrcholový úhel je pro všechny materiály stejný. Tato teorie je však **v rozporu s experimenty!**
 - Našla se i řešení přirovnávající sypké materiály k silně viskozním kapalinám. **Viskozni kapalina** se však narozdíl od sypané látky **po dostatečně dlouhé době rozteče**. Krom toho tento model objasňuje pouze rovnocennost směrů sesypávání.
 - Nejvýhodnějším modelem se ukázalo být přirovnání pohybu přisypávaných zrn (pohybovala se převážně po povrchu) k pohybu zrn **po nakloněné rovině**, tento model vysvětluje velikost sypného úhlu **třením**. Předpokládáme náhodné rozložení zrn do směrů (což je reálný předpoklad). Potom jsou směry rovnocenné a vzniká osově symetrická kupka. Tento model také dobře zdůvodňuje, proč úhel s velkou přesností nezávisí na velikosti kupky, při pohybu po nakloněné rovině totiž nezáleží na množství na sypaných zrn.

Vrcholový úhel tedy závisí na tření. Projevují se zde oba druhy tření: smykové tření o velikosti $F_{\text{smyk}} = F_n f$, kde f je koeficient smykového tření, a valivé tření o velikosti $F_{\text{val}} = F_n \mu/R$, kde μ je koeficient valivého tření a R je poloměr zrna. Které tření se více projeví, závisí na tvaru a velikosti (čím větší a pravidelnější zrna, tím je menší valivé tření a částčky se spíše valí než sesouvají, krásným příkladem je hrách). Valivého tření si povšimli pouze dva (!) řešitelé. Pro menší zrna je μ/R větší. To by vysvětlovalo závislost vrcholového úhlu α na velikosti částček pro zrna, která mají valivé tření menší nebo srovnatelné se smykovým.

Dále můžeme z naměřených hodnot a dle vlastního úsudku odhadovat, na čem závisí vrcholový úhel. Drsnější povrch zrn způsobuje větší tření částic, proto bude α menší. Částčky mající členitější tvar do sebe lépe zapadají, α bude tedy menší. Menší zrna budou znamenat menší α , neboť jednak je pro menší zrna menší valivé tření, jednak mají menší zrna větší přilnavost (zde velmi záleží na tom, jak je materiál vlhký).

V našem měření se však projeví i výška, ze které sypeme (snažili jsme se o co nejmenší). Během letu se mění polohová energie na kinetickou, která se po dopadu musí spotřebovat třením (zachycení zrnka odpovídá zastavení). Sypeme-li z větší výšky, bude vrcholový úhel větší. Vrcholový úhel závisí i na pružnosti – zrnka sypeme z určité výšky a dochází k nárazům – zrnka mohou odskakovat (bortí hromadu a nezachycují se). Dále se projevují nepříjemnosti vzniklé třením s podložkou – při nedostatečném tření s podložkou by se hromada mohla rozjíždět; vnější vlivy, otřesy, vítr narušují měření a v neposlední řadě elektromagnetické a chemické charakteristiky zrn mohou podstatně zkreslit výsledky měření.

Závěr

Z naměřených výsledků za použití našich fyzikálních znalostí můžeme říci: Drsnější povrch zrn (větší povrchové tření), členitější tvar zrn (lépe do sebe zapadají), menší zrna (větší valivé tření), přilnavost či vlhkost (drží víc pohromadě), to vše způsobuje ostřejší tvar kužele neboli menší vrcholový úhel α .

Úloha II . 1 ... *Nezbedova Nezbedka* (4 body)

Jakkoli se to zdá nepravděpodobné, loďka může plout vpřed i vzad, takže kdokoli z řešitelů vyslovil alespoň nějaký názor, který dokázal zdůvodnit, měl šanci na pár bodů.

Téměř nikdo se nezamyslel nad tím, kde se vzduch vlastně bere. Předpokládejme tedy, že je nasáván zeshora, nebo rovnoměrně z obou boků, zkrátka, že nasávání pohyb neovlivní. Fukar vyše vzduch s hybností p a sám získá hybnost $-p$ (kladný směr k přídi). No a co se děje dál. Vzduch narazí do plachty a *odrazí se* od ní (jinak by se tam hromadil, což vzduch nedělá). Tím se jeho hybnost změní v ideálním případě, kdy se odrazí přesně dozadu z p na $-p$, tedy o $-2p$. Loďka tedy od plachty získá $2p$ a jede **vpřed**. Pokud ale plachta nebude 100%-ně účinná (lze toho dosáhnout její menší plochou, větší vzdáleností od Fukaru,

náklonem, prodyšností apod.), bude předaná hybnost menší, a to až do extrémního případu, kdy plachtu odstraníme úplně. Pak bude výsledná hybnost loďky $-p$ a Nezbedka **couvá**.

Mezi těmito dvěma extrémy leží i nulová hodnota, kdy se 50% vzduchu odrazí a 50% vzduchu kolem plachty jen projde (nebo se všechn vzduch na plachtě rozptýlí do boku). Pak Nezbedka **stojí**. Odmyslíme-li si různost odporové síly při pohybu vpřed a vzad, může jet Nezbedka v principu stejně rychle dopředu jako dozadu, ačkoli jistě cítíme, že účinnost plachty jako odrážače vzduchu není vysoká.

Několik poznámek se vyskytlo ohledně momentů sil, které by měly Nezbedkou otáčet, případně dvojic sil, které by ji deformovaly, eventuelně roztrhly. Předpokládejme tedy, že všechny momenty vyrovná vztlak lodi a deformace není velká.

Shrnutí a podrženo: **Nezbedka za bezvětří může plout vpřed i vzad.**

A nyní k zlepšovacím návrhům:

Většinu studentů napadlo Fukar otočit a sundat plachtu. To je skutečně asi nepřírozanější. Ale našly se i exotičtější nápady. Jedna řešitelka, tuším že to byla dívka, rozdělila loď na dvě, na jedné byla plachta, na druhé fén. Jedna z lodí se vždy zakotvila, čímž se její hybnost “odvedla” do dna, zatímco druhá část mohla plout. A jako zjednodušení dotyčná navrhla zřídit podle pravidelné trasy řadu bójí s Fukary.

Několik řešitelů se pokusilo dále zvýšit výkon tím, že by se vzduch foukal do vody. Nejsem si zcela jist, jestli to funguje.

Vírou v sílu Fukaru vynikl návrh založený na vhánění vzduchu pod kýl (vznášedlo).

Řada lidí obcházela bezvětří (pokud vůbec) tím, že řekli, že vzduch je v klidu a voda teče. Mnozí radili ať se Nezbedka přitahuje za elektrickou přípojku (ač proud se dá získat např. ze solárních baterií nebo diesel agregátu) nebo ať vesluje či ať si koupí motor. To je sice hezké, ale jde o to, jak problém vyřešit, ne jak ho obejít.

A ještě jedna poznámka nakonec: udělal jsem **pokus**. Udělal jsem ho ve chvíli, kdy mi to mohlo jen uškodit, ale dopadlo to dobře. Prkno zavěšené na metr dlouhé dvojici provázků, s ručním fénem (40 W, vzduch nasáván z boků) na “zádi” a plachtou z překližky na “přídí” se skutečně po zapnutí fénu do zásuvky vychýlilo asi o milimetr “vpřed”. Ač byla přesnost hodně malá, jsem na základě tohoto ochoten věřit, že je vše tak, jak jsem napsal.

Úloha II . 2 ... jádro hélia (5 bodů)

Tritium má vazebnou energii:

$$E_T = (2m_n + m_p - m_T) \cdot c^2 = 1,277 \cdot 10^{-12} \text{ J},$$

helium ${}^3\text{He}$ ji má o něco nižší:

$$E_{\text{He}} = (2m_p + m_n - m_{\text{He}}) \cdot c^2 = 1,073 \cdot 10^{-12} \text{ J}.$$

Jelikož je silná interakce mezi nukleony stejná bez ohledu na to, zda se jedná o proton nebo neutron, musí být vazebná energie způsobená silnou interakcí u obou jader stejně veliká. Námi nalezený rozdíl je způsoben pouze elektromagnetickým odpuzováním dvou protonů v jádře tritia, tedy hlavně elektrostatickou potenciální energií,

$$\Delta E = e^2 / (4\pi\epsilon_0 r).$$

Jednoduchou úpravou získáme výsledný vztah

$$r = e^2 / (4\pi\epsilon_0 c^2 (m_n - m_p + m_{\text{He}} - m_T)) = 1,1 \cdot 10^{-15} \text{ m},$$

což řádově odpovídá jiným pozorováním. Mnozí řešitelé neřešili úlohu fyzikální úvahou a výsledek získali použitím přibližně platného empirického vztahu pro poloměr jádra atomu:

$$R = R_0 \cdot \sqrt[3]{A},$$

kde $R_0 = 1,2 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ a A je nukleonové číslo. Za toto řešení jsem ovšem nemohl dávat více než dva body, protože cílem úlohy bylo odhadnout poloměr jádra helia pouze ze znalosti hmotností příslušných částic.

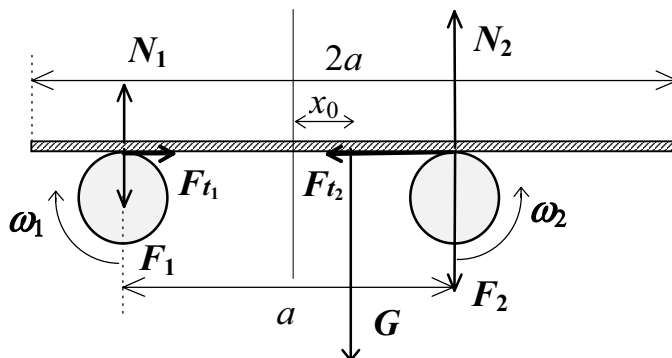
Úloha II . 3 ... válcovací stolice (5 bodů)

Podívejme se na obr. 35, jak to mělo asi vypadat. Síly působící v soustavě jsou zřejmé z obrázku: F_1 a F_2 jsou síly, kterými deska působí na válce a síly N_1 a N_2 jsou reakce, kterými válce působí na desku. F_{t1} a F_{t2} jsou třecí síly vyvolané tlakem desky na válce a rotací válců. Platí rovnice

$$G = F_1 + F_2 \quad (1)$$

a vztahy $F_1 = -N_1$, $F_2 = -N_2$, $F_{t1} = \mu F_1$, $F_{t2} = \mu F_2$.

Obr. 35



Ve svislém směru se deska nemá důvod pohybovat, neboť síly v tomto směru jsou v rovnováze, ve směru vodorovném pak pohyb mohou způsobovat pouze třecí síly. Třecí síla závisí jen na koeficientu smykového tření a přítláčné síle, tuto zjistíme z již zmíněné momentové věty. Vzhledem k počátku souřadnic, který jsme si zvolili přesně uprostřed mezi válci, platí ve tvaru (M_1 je moment síly N_1 atd.)

$$M_1 + M_2 + M_G = 0 \quad \Rightarrow \quad F_2 \frac{a}{2} - F_1 \frac{a}{2} = Gx \quad (2)$$

Vyřešíme-li soustavu rovnic (1) a (2) vzhledem k F_1 a F_2 a získané vztahy dosadíme do vzorců pro třecí síly, výsledná síla F působící na desku nám vyjde ve tvaru

$$F = F_{t1} - F_{t2} = -\frac{2\mu mg}{a}x \quad (3)$$

Vztah pro sílu má tvar $F = -kx$, kterým je dána výše uvedená elastická síla. Deska se tedy bude chovat jako harmonický oscilátor kmitající s periodou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{2\mu g}} \quad (4)$$

Toto řešení zcela stačilo na plný počet bodů. Devadesát procent chybných řešení spočívalo v názoru, že těleso se zastaví, jestliže na něj nepůsobí žádná síla. Proti tomuto aristotelovskému pojetí fyziky musíme důrazně protestovat! První Newtonův zákon jasně říká: **Těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, pokud není působením vnějších sil nuceno tento stav změnit.** V okamžiku, kdy deska dorazí do rovnovážné polohy, což je právě uprostřed mezi válci, je síla nulová. Jenomže deska má nějakou nenulovou rychlost, kterou působením síly získala, ještě než do oné rovnovážné polohy došla. V rovnovážné poloze na desku síla nepůsobí, tudíž není důvod, aby nepokračovala dál do oblasti, kde síla opět začne působit.

Pro nevěřící a zájemce přidávám exaktní řešení rovnice (3). Dosadíme z druhého Newtonova zákona za sílu, zkrátíme hmotnost a $2\mu g/a$ označíme jako ω^2 . Dostaneme diferenciální rovnici druhého řádu ve tvaru

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0. \quad (5)$$

Řešení získáme početním trikem, který je účinný i na rovnice složitější, proto se vyplatí si jej zapamatovat. Celou rovnici vynásobíme výrazem $2 \cdot dx/dt$.

$$2 \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + 2\omega^2 x \frac{dx}{dt} = 0. \quad (6)$$

Ti, kteří jsou zblbělí v derivování, na první nebo na druhý pohled vidí, že to je ekvivalentní zápisu

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \omega^2 x^2 \right] = 0. \quad (7)$$

To znamená, že výraz v závorce je roven nějaké konstantě, kterou označme $C^2 \omega^2$:

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \omega^2 x^2 = C^2 \omega^2. \quad (8)$$

Toto je pouze rovnice prvního řádu, kterou můžeme řešit separací proměnných,

$$\omega dt = \frac{dx}{\sqrt{C^2 - x^2}}. \quad (9)$$

Integrací a následnou úpravou již dospějeme k obecnému řešení

$$\omega t + \varphi_0 = \arccos \frac{x}{C} \Rightarrow x = C \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (10)$$

přičemž z počátečních podmínek plyne $C = x_0, \varphi_0 = 0$.

Řešení (10) má však jeden háček. Platí totiž pouze za předpokladu, že deska před průchodem rovnovážnou polohou nedosáhne rychlosti rovné obvodové rychlosti válců. V okamžiku, kdy se tak stane, přestane totiž na jednom z válců působit třecí síla. Proč? Protože relativní rychlost válce a desky je nulová. To znamená, že deska již nebude dále urychlována, naopak třecí síla na druhém válci ji zpomalí, ale jen o maličko, neboť okamžitě začne působit třecí síla na prvním válci a jelikož deska ještě neprošla rovnovážnou polohou, je tato síla větší než síla na druhém válci, výslednice tedy desku urychlí zpět na hodnotu obvodové rychlosti válců. Třecí síla opět přestane působit atd., atd. Toto pokračuje po elementárních časových intervalech až do rovnovážné polohy, kam deska dospěje s rychlostí, jakou se otáčejí válce. Jakmile však deska projde rovnovážnou polohou, tak výslednice třecích sil již směřuje proti směru pohybu, a jak víme, je dána vztahem $F = -kx$. Opět tedy máme před sebou harmonický oscilátor kmitající se stejnou periodou a rychlostí danou rovnicí

$$v = -\omega_1 R \sin \omega t \quad (11)$$

Co se změní, bude amplituda. Integrací předchozího totiž dostaneme závislost výchylky na čase

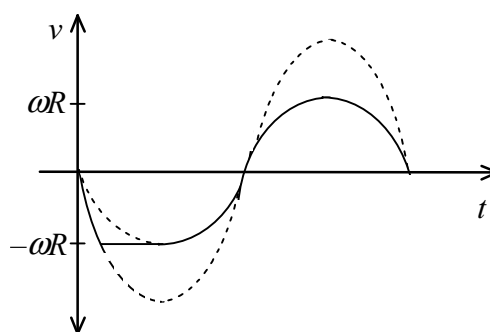
$$x = \frac{\omega_1 R}{\omega} \cos \omega t. \quad (12)$$

Graf závislosti rychlosti na čase je na obr. 36. Pak již není žádný problém, neboť deska dosáhne obvodové rychlosti válců jen v rovnovážné poloze, kde na ní stejně žádná síla nepůsobí. To je vše, co se týká háčku.

Pokud bychom se chtěli bavit o tlumení kmitů desky, pak dospějeme k tomu, že amplituda bude zmenšována jen důsledkem odporu vzduchu. Na rozdíl od klasických kmitajících věcí (závaží na pružině, matematické kyvadlo) je zde třecí síla silou kmitání způsobující a nikoli působící proti němu. Jestliže bychom válcovací stolicí umístili do vakua, deska by kmitala netlumeně, což například u pružiny nenastane, neboť část její mechanické energie se přeměňuje na energii vnitřní.

K případu b): nejjednodušším a k získání bodů postačujícím přístupem bylo považovat tření za coulombické neboli suché, a tedy nezávislé na rychlosti. Pak je řešení identické

Obr. 36



s a). Mnoho z vás se snažilo použít nějaký jiný model, kde tření na rychlosti záviselo. Bohužel pak nebyli schopni tento model propočítat ani dostačujícím způsobem odůvodnit. Takže pro příště: je lepší zvolit aproximaci, kterou umím spočítat, než trvat na přesnosti, jež mi stejně není nic platná, protože se nedopočítám k žádnému rozumnému výsledku.

Úloha II . 4 ... *elektrická krychle* (4 body)

Vezměme si obecný vztah pro výpočet intenzity elektrického pole, který zní

$$E(\mathbf{r}_0) = k\rho \int_V \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} d^3\mathbf{r}, \text{ kde integrujeme přes celý objem } V \text{ tělesa.}$$

Nyní tento vztah aplikujeme na krychli o straně a (počátek souřadnic zvolíme v bodě A) a hledáme intenzitu v bodě A .

$$E(A) = k\rho \int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{x + y + z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx dy dz,$$

Tento integrál bychom mohli vyřešit, ale bohužel je analyticky nevyjádřitelný. Takže se uchýlíme k numerickému řešení, abychom pro různá a získali odhad, že intenzita je závislá na hraně krychle lineárně, což nyní hravě dokážeme (i když v matematice by tento důkaz asi neprošel, fyzikům stačí). Přes co se vlastně integruje? Přes nekonečně malé krychličky o hraně $dx = dy = dz$, jejichž střed má polohový vektor (x,y,z) . Co když se hrana zmenší na polovičku? Pak se zmenší i (x,y,z) na polovičku, ale také dx, dy a dz na polovičku. Čili budeme moci psát

$$E'(A) = k\rho \int_0^{a/2} \int_0^{a/2} \int_0^{a/2} \frac{\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2}}{\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \frac{dx}{2} \frac{dy}{2} \frac{dz}{2} = \frac{1}{2} E(A),$$

Dle principu superpozice intenzita vykousnutého tělesa bude

$$E'' \in E - E' \in \frac{1}{2}E.$$

Jak se vám to líbí? Nerozumíte tomu? Tak já vám ukázu hezčí řešení.

Tako jako lze s hmotností tělesa počítat, jako by byla celá v těžišti, nahradíme rovnoměrně rozložený náboj v krychli bodovým, taktéž umístěným v těžišti. Čili v bodě A bude intenzita (pro krychli o hraně a) rovna

$$E(A) = \frac{kQ}{\left(a \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{4}{3} k\rho a, \text{ neboť } Q = \rho V = \rho a^3.$$

Pro krychli o poloviční hraně, tj. $a/2$, pak po dosazení do téhož vzorce vyjde

$$E' = \frac{4}{3} k\rho \frac{a}{2}, \text{ tzn. } \frac{E'}{E} = \frac{1}{2}.$$

Dle principu superpozice intenzita našeho vykousnutého tělesa bude

$$E'' \in E - E' \in \frac{1}{2}E.$$

Hezké? TAK TO TEDY NE!!! Úvaha o tom, že lze rovnoměrně rozložený náboj v krychli nahradit bodovým v jejím těžišti, je naprosto chybná, což si přibližně $\frac{1}{3}$ řešitelů neuvědomila a vesele s tím počítala. Pokud tutéž úvahu navíc použili i na to vykousnuté těleso, jemuž pracně vypočítali polohu těžiště, dočkali se překvapivého (tzn. špatného) výsledku. To, že to nelze ani pro speciální případ, kdy intenzitu měříme ve vrcholu krychle, mi však trvalo dokázat více než 10 hodin za pomoci celkem výkonné počítačové techniky. Že to nejde obecně, je celkem jasné z toho, že máme-li bodový zdroj elektrického pole, pak se okolo utvoří radiální elektrické pole, tj. takové, jehož ekvipotenciální plochy jsou koule. No jo, ale okolo krychle se takové pole vytvoří asi těžko.

Takže tohle řešení by se vám asi taky líbit nemělo. Tak já vám to, které se mi líbilo nejvíce, ukážu. Předem ale ještě povím, co je to ten tajemný **princip superpozice**. Tak jako můžeme skládat síly, můžeme skládat i intenzity (v jednom bodě). Plyne to z definice intenzity, která zní $E = F_e/Q$. Když složíme síly F_e a vynásobíme to reálným číslem $1/Q$, dostaneme i výsledné pole pro E . Ted' už tedy ke správnému a srozumitelnému řešení. Je to víceméně totéž, co jsem předvedl v úvodu, avšak lidsky řečené.

Rozdělme krychli na veliký počet stejně rozměrných krychlí a označme si vzdálenost každé z nich (jejich náboj bude $\rho V/N$, kde N je počet krychlí). Intenzita celé krychle bude díky principu superpozice

$$E = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{\rho V/N}{r_i^2} e_i$$

Nyní mějme krychli o poloviční hraně. Ta je stejnohlá podle bodu A s koeficientem $1/2$ s velkou krychlí. Tedy pokud budeme počítat intenzitu v tomto bodě, každé krychličky ve velké krychli je stejnohlelostí jednoznačně přiřazena jiná krychlička v malé krychli, přičemž tato nová krychlička má poloviční velikost hrany (tzn. $1/8$ objemu) a zároveň je v poloviční vzdálenosti. Čili

$$E' = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{\rho V/N}{(r_i/2)^2} e_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{4}{8} \frac{\rho V/N}{r_i^2} e_i = \frac{1}{2} E$$

Dle principu superpozice intenzita vykousnutého tělesa bude

$$E'' = E - E' = 1/2 E.$$

Toto řešení je takřka ideální. Uznával jsem i mnohem méně přesně zapsané řešení (konkrétně ty limity tam neměl skoro nikdo, sumu leckdo obcházel pouze slovním vysvětlením rozdělení na nekonečně mnoho krychliček, z nichž pro každou platí, že se přiměřeně zmenší a přiblíží; jiní zase různě obcházelí stejnohlelost a podobně).

Ze správných řešení bych se pak ještě zmínil o úvaze, že bude určitě existovat nějaký bod, do kterého kdyby se zhustil všecek náboj, pak by intenzita v bodě A byla stejná, jako kdyby ten náboj byl rovnoměrně rozložen (nebude to střed, jak se mnoho lidí mylně domnívalo!). Vzdálenost tohoto bodu od vrcholu A bude zjevně lineárně závislá na velikosti hrany krychle, neboť ve vzorci $E = kQ/r^2$ náboj v krychli roste s třetí mocninou hrany, avšak druhá mocnina vzdálenosti klesá s druhou mocninou velikosti hrany krychle. Čili při poloviční hraně krychle bude intenzita poloviční; intenzita vykouslého tělesa se opět dopočítá superpozicí.

Úloha II . 5 ... Lomonosovův průvan (3 body)

Označme nejprve některé veličiny podle obr. 37:

h – výškový rozdíl mezi body A a D .

$p_A \dots p_F, \rho_A \dots \rho_F$ – tlaky a hustoty vzduchu v bodech A, \dots, F

Ad a) Porovnáme tlaky p_A, p_B, p_C, p_D v bodech A, B, C, D . Zřejmě platí

$$p_A = p_B \text{ a } p_D = p_A + h\rho_D g, p_C = p_B + h\rho_C g,$$

pokud hustota ve sloupci AC je stejná jako v bodě D a hustota v bodě C je stejná jako ve sloupci BC . Bude tedy platit $p_D > p_C$ pro $\rho_D > \rho_C$ a $p_D < p_C$ pro $\rho_D < \rho_C$. Ze stavové rovnice ideálního plynu vyjádříme hustotu; myslím, že všichni víme, že studenější vzduch má větší hustotu než vzduch teplý, neboli hustota vzduchu je nepřímo úměrná jeho teplotě,

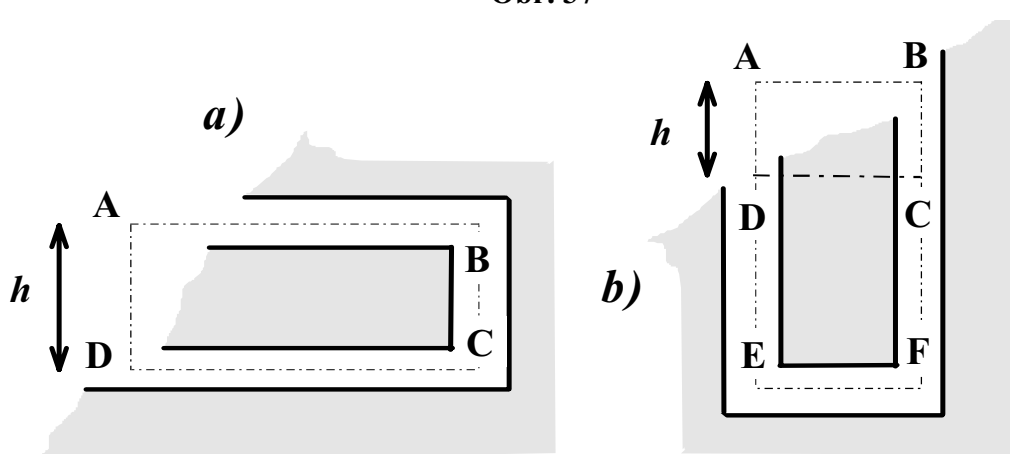
$$\rho = \frac{pM}{RT}.$$

Teplota v dole je konstantní, a tak je v létě $T_C < T_D$, resp. v zimě naopak $T_C > T_D$. Proto je $\rho_C > \rho_D$, resp. $\rho_C < \rho_D$. Odtud dostáváme, že $p_C > p_D$, resp. $p_C < p_D$. V létě vzduch proudí z bodu C do bodu D , v zimě naopak je směr proudění DC .

Shrnujeme:

léto – směr proudění vzduchu je $A-B-C-D$,
zima – směr proudění vzduchu je $D-C-B-A$.

Obr. 37



Ad b)

Odůvodnění pro druhý důl provedeme trochu jiným způsobem, slovní zdůvodnění není možná tak přehledné jako vzorečky, zato skrze něj můžeme věci více porozumět. Odpověď získáme srovnáním aerostatických tlaků daných sloupci vzduchu v bodech E, F dolu.

Celkový tlak v bodech z obrázku má tři komponenty:

tlak vzduchového sloupce nad horizontální úsečkou AB , který je stejný pro oba diskutované body E, F ,

tlak sloupců AD a BC , tyto tlaky budou také stejné, pokud hustota vzduchu bude stejná v obou sloupcích,

tlak daný sloupci DE a CF .

Nyní předpokládejme, že teplota vzduchu v dole, která je konstantní, je nižší než okolní teplota v létě, resp. vyšší v zimě. Potom teplota vzduchu v létě ve sloupci AD bude větší a hustota vzduchu tak menší než ve sloupci BC , resp. v zimě pak máme hustotu vzduchu ve sloupci AD větší než je v protějším BC . Odtud dostáváme, že tlak tvořený sloupcem BC bude v létě větší než tlak daný sloupcem AB . Skutečně se pak rozdíl těchto tlaků projeví v bodech E, F , a tak určí proudění vzduchu, a to tak, že v létě bude vzduch proudit z bodu F do bodu E a v zimě naopak bude směr proudění EF .

V létě bude vzduch vstupovat do otvoru dolu ležícího ve vyšší výšce (bod B) a horníci u otvoru ležícího níže (bod D) budou ofukováni nezdravým důlním vzduchem. I v zimě na tom budou lépe horníci u otvoru B , protože je sice bude ofukovat nezdravý důlní vzduch, zato však o něco teplejší než třeskatý mrazivý průvan proudící do dolu otvorem D . Když už diskutujeme o pracovních podmínkách zaměstnanců důlních závodů, nemůžeme zase upřít dělníkům u otvoru D , že za letního parného počasí jim studený důlní průvan určitě prospívá.

Shrneme:

léto – směr proudění vzduchu je $B-C-F-E-D$,

zima – směr proudění vzduchu je $D-E-F-C-B$.

V obou případech tak budeme v létě ofukováni důlním vzduchem u otvoru ležícího níže a v zimě na nás bude proudit vzduch z dolu otvorem ležícím výše.

Vzduch v dole nevzniká ani nezániká, je tedy značně nepravděpodobná hypotéza, že by z dolu vzduch proudil oběma otvory či tam naráz oběma otvory foukal. Stejně tak je nepravděpodobné, že by vzduch jedním otvorem proudil ven i dovnitř.

Nakonec ještě takovou drobnou poznámku k samotnému zadání příkladu. Byli jsme upozorněni, že už ve 13. století byly doly hluboké několik set metrů. Lomonosov se touto problematikou asi zabývat musel, bohužel však máme pouze ty odkazy na jeho dílo, které

zkoumají toliko doly mělké, to znamená dvacet třicet metrů hluboké, prostě doly, ve kterých můžeme přírůstek teploty s hloubkou zanedbat vůči teplotním rozdílům mezi teplotou v dole a teplotou jeho okolí. Nehledě k tomu, že velice hluboké doly asi těžko vypadají tak jednoduše, jako ukazuje obr. 37.

Úloha II . 6 ... odpolední čajíček (8 bodů)

1. Teorie

Výsledek ovlivňuje

- *kolísání napětí v síti* – tento jev je třeba započítat do chyby měření (dá se omezit měřením v době nízkého využití sítě, bohužel měřit ve tři hodiny ráno není zrovna nejlepší). Povolené napětí v síti je 200–240 V, což přináší poměrně velkou chybu měření,
- *předávání tepla okolí* – dá se omezit částečným odizolováním soustavy, např. obložením pěnovým polystyrénem, přesto to je (zvláště, když bychom zvolili nevhodný rozsah teplot) zdrojem poměrně velkých chyb,
- *tepelná kapacita hrnce* – tu můžeme eliminovat měřením pro různé množství vody,
- *tepelná kapacita vařiče* – pokud pracujeme s ohřátým sporákem, jeho teplota se již téměř nemění, u ponoráku se vařič ohřívá s vodou,
- vařič má jistou induktanci a kapacitanci, jejich velikost je však zanedbatelná,
- *závislost odporu na teplotě* – zahrneme do chyby měření (ostatně u odporového drátu to nebude zase tak moc),
- vařič nemá 100% tepelnou účinnost – zahrneme do chyby měření.

Odvození vztahů pro odpor

Pokud by měření neovlivňovaly výše uvedené vlivy, platilo by pro efektivní výkon

$$P_{ef} = \frac{U_{ef}^2}{R}. \quad (1)$$

Tedy práce vykonaná obvodem bude

$$W = \frac{U_{ef}^2}{R} \tau, \quad (2)$$

kde τ je čas, po který budeme ohřívát vodu

Tato práce by se spotřebovala pouze na ohřev vody

$$\frac{U_{ef}^2}{R} \tau = cm\Delta t. \quad (3)$$

K tepelné kapacitě vody musíme připočíst tepelnou kapacitu hrnce (a ponoráku)

$$\frac{U_{ef}^2}{R} \tau = (K + cm)\Delta t. \quad (4)$$

Tak bychom mohli dostat při dvou měřeních soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Při jejím řešení však odečítáme dvě řádově stejné hodnoty, čímž enormně vzrůstá chyba výsledku, proto je paradoxně přesnější (a taky jednodušší) K zanedbat. Potom platí:

$$\tau = a\Delta t, \quad (5)$$

kde a koeficient úměrnosti získaný z lineární regrese (viz níže), neboli

$$a = \frac{U_{ef}^2}{Rcm} \quad R = \frac{U_{ef}^2}{acm} \quad (6)$$

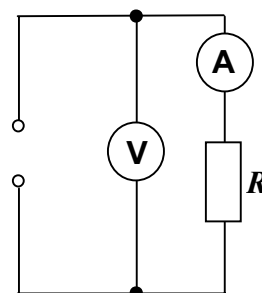
2. Měření

Varič připojíme ke zdroji napětí podle obr. 38. Pro odpor spirály pak platí (síť se chová jako zdroj bez vnitřního odporu) $R = U/I$.

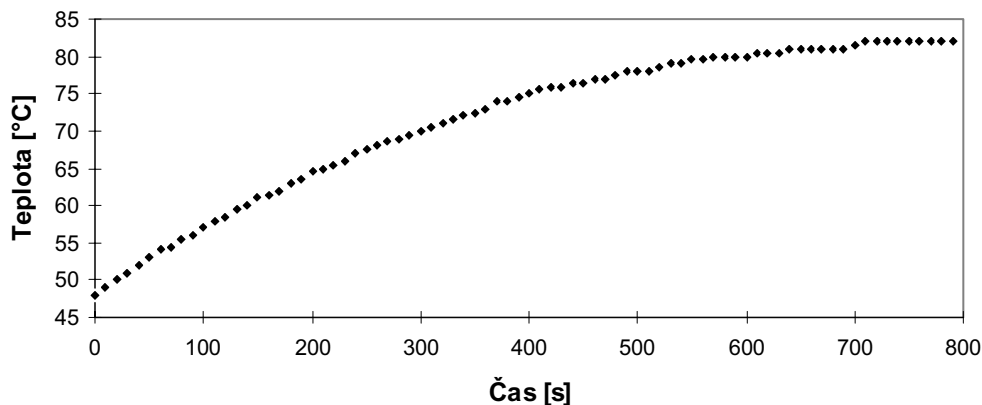
Pomůcky: 2 teploměry, jeden s přesností na desetinu °C a se stupnicí do 50(,5)°C a druhý s přesností na 1°C a se stupnicí do 100°C, elektrický ponorný vařič, malý a velký hrnec, ampérmetr a voltmetr pro kontrolní měření,

Postup: Odměrným válcem jsme odměřili patřičné množství vody. Hustota při 20°C je přibližně 1000 kg/m³ (chyba je ve srovnání s kolísáním napětí a ztrátami tepla malá). Hrnec jsme odizolovali ručníky z boku a novinami zeshora (nepoužili jsme pokličku, neboť vodu bylo třeba míchat, krom toho by to i ztěžovalo měření teploty). Každých 10 s (u měření bez izolace každých 20 s) jsme změřili teplotu vody. Učinili jsme také jedno odstrašující měření bez izolace do 82 °C – dále se již voda téměř neohřívala (ostatně na co je dobrá poklička, že?) – viz grafy 1 a 2.

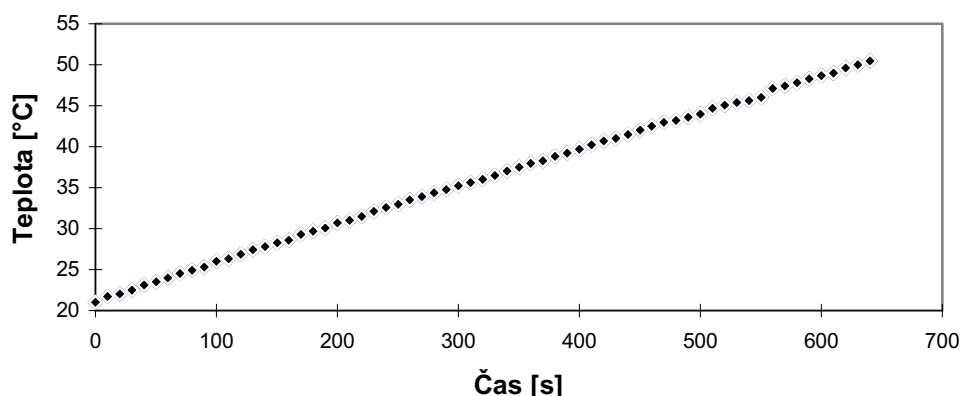
Obr. 38



Graf 1 – Bez izolace 1 l vody, teploměr do 100°C, velký hrnec



Graf 2 – Měření (7) při objemu 2,5 l vody, teploměr do 50°C, velký hrnec



Výsledky měření: (z důvodu úspory místa uvádím graf pouze pro dvě měření)

Naměřené hodnoty jsem zpracoval lineární regreseí $teplota = a \cdot čas + b$ (kdo ji nezná, ať si přečte dodatky).

Chyba lineární regrese (tj. odchylka od lineární závislosti) je, s výjimkou odstrašujícího příkladu, mnohem menší než chyba měřicí metody (drží se pod 1 %), můžeme ji proto s klidným svědomím zanedbat.

Jednotlivá měření: (neuvádím dílčí hodnoty, pouze výsledky regrese)

Tabulka – Výsledky lineární regrese

| Měření (v závorce číslo pokusu) | počet hodnot | a | r^{***} | $R[\Omega]$ |
|--|--------------|-----------|----------------|-------------|
| (1) 0,75 l vody, teploměr do 50 °C, malý hrnec | 21 | 0,1437(5) | 99,99 % | 80 |
| (2) 1 l vody, teploměr do 50°C, malý hrnec | 26 | 0,1126(7) | 99,95 % | 137 |
| 1 l vody, teploměr do 100°C, velký hrnec bez izolace * | 80 | 0,042(1) | 95,73 % (!) | == |
| (3) 2 l vody, teploměr do 100°C, velký hrnec | 66 | 0,0404(5) | 99,33 % ** | 131 |
| (4) 1 l vody, teploměr do 50°C, velký hrnec | 25 | 0,104(1) | 99,69 % | 111 |
| (5) 1,5 l vody, teploměr do 50°C, velký hrnec | 41 | 0,0731(4) | 99,95 % | 114 |
| (6) 2 l vody, teploměr do 50°C, velký hrnec | 51 | 0,0506(1) | 99,98 % | 106 |
| (7) 2,5 l vody, teploměr do 50°C, velký hrnec | 65 | 0,0456(1) | 99,98 % | 101 |

U a je uvedena v závorce chyba poslední číslice.

* odstrašující měření – **tak takhle by to rozhodně vypadat nemělo !!!**

** po vypuštění 10 hodnot blízkých 100°C, které měření výrazně zkreslují, jsou hodnoty $a = 0,0443(3)$, $r = 99,89 \%$, tyto hodnoty jsem také použil k dalším výpočtům,

*** r je tzv. koeficient korelace, udávající, jak moc je závislost lineární.

Průměrná hodnota: 110 Ω .

Chyba měření (součet chyby statistické a systematické): 30 Ω .

Kontrolní měření: Napětí a proud jsme měřili voltmetrem a ampérmetrem s třídou přesnosti 5.

$$U = (230 \pm 15) \text{ V}, \quad I = (2,25 \pm 0,15) \text{ A}, \quad R = (100 \pm 10) \Omega$$

3. Závěr

Náš způsob měření se hodí (zejména vlivem chyby v napětí $\pm 10 \%$, což v druhé mocnině představuje chybu $\pm 20 \%$, i vlivem tepelných ztrát) pouze na orientační měření.

4. Nejčastější chyby

- Nemá smysl uvádět chybu na víc platných cifer než na dvě, ale spíše se při tomto počtu měření uvádí na jednu.
- K chybě *statistické*, to je ta, která se počítá podle vzorce $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum (\bar{x} - x_i)^2}$ je třeba ještě “přičíst” podle vzorce $\sigma_{\text{celková}} = \sqrt{(3\sigma_{\text{statistická}})^2 + (\sigma_{\text{systematická}})^2}$ chybu systematickou, nebo obě chyby aritmeticky sečíst $\sigma_{\text{celková}} = 3\sigma_{\text{statistická}} + \sigma_{\text{systematická}}$, při našem počtu měření není rozdíl příliš velký. Systematická chyba zahrnuje hlavně chybu přístrojů a chybu metody měření – ztráty tepla a kolísání napětí v síti. Za chybu přístrojů považujeme (není-li uvedeno jinak, např. může být udána tzv. třída přesnosti představující chybu v procentech) polovinu dílku stupnice. Chybu metody, není-li možno ji vypočíst, musíme odhadnout.

Výsledek by pak měl ležet (s pravděpodobností 99,7%) v intervalu $R \pm \sigma_{\text{celková}}$!!!

- Je třeba pracovat v nižších teplotách, aby byly ztráty tepla co nejmenší (při teplotách blízkých 100 °C se navíc voda intenzívně odpařuje. Viz odstrašující měření).
- Dále je třeba pracovat s ohřátým vařičem, neboť jinak, po dobu než se vařič ohřeje, nedochází k ohřevu vody a měření je tím zkresleno (to platí jen pro sporák, u ponoráku se vařič ohřívá zhruba stejně jako voda).
- Naměřené hodnoty nelze jen tak pospojovat (jsou zatíženy chybou měření a skutečná závislost probíhá jinak).

Úloha III . 1 ... vyhlodaný hranol (5 bodů)

Čím začít? Snad tím, že asi čtvrtina lidí nepochopila problém a řešila, kdy se malý kvádr μ uvede do pohybu tím, že do něj narazí kvádr m . Jenže o to vůbec nešlo, proč by tam jinak byla podmínka o pohybu hranolu M bez tření? Drtivá většina to počítala pomocí sil.

První krok: m klouže dolů a působí na hranol M ve vodorovném směru silou F :

$$F = mg \sin \alpha \cos \alpha . \quad (1)$$

Tato síla působí na M a μ , takže jejich zrychlení je

$$a_1 = \frac{F}{M + \mu} , \quad (2)$$

a pokud průmět tohoto zrcadlení do roviny pohybu μ je větší než průmět tíhy μ tamtéž, čili

$$F_s = \mu(a_1 \cos \alpha - g \sin \alpha) > 0 ; \quad (3)$$

potom m stoupá. Sloučením vzorců (1),(2),(3) dostaneme podmínku

$$m \cos^2 \alpha > M + \mu , \quad (4)$$

která je ŠPATNĚ.

Síla F totiž působí nejen na M a μ , ale je třeba vzít do úvahy i hmotu m a to s faktorem $\sin^2 \alpha$. Proč? Tíhu mg rozložíme do směru kolmého k podložce, tato složka je vykompenzována, a do směru rovnoběžného s rovinou: $F_0 = mg \sin \alpha$. Tuto sílu rozložíme opět do dvou směrů: vodorovného a svislého, tím dostaneme sílu (1).

Vodorovná část síly urychluje hranol M , zatímco svislá část má stejný účinek, jako by na hranolu M leželo přidané závaží o tíze $m \sin^2 \alpha$.

Tedy

$$a = \frac{F}{M + \mu + m \sin^2 \alpha} ,$$

$$F_s = \mu(mg \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - (M + \mu + m \sin^2 \alpha)g \sin \alpha) > 0 ;$$

$$m \cos 2\alpha > M + \mu ,$$

kde $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.

Aby pravá strana mohla být větší než strana levá, musí být větší než 0, proto

$$\cos 2\alpha > 0 \Rightarrow \alpha < 45^\circ ,$$

pro nezáporné hodnoty hmotností.

Úloha III . 2 ... dálkový průzkum (6 bodů)

Abychom si nekomplikovali život, předpokládejme, že se Merkur pohybuje rychlostí daleko menší než je rychlost světla, a proto se jeho poloha během měření příliš nemění. Radiový signál se odráží pouze od přivrácené polokoule, časová prodleva mezi začátkem a koncem ozvěny bude tedy $2r/c$, takže

$$r = \frac{c}{2}(t_2 - t_1) .$$

Vzdálenost středu Merkuru vypočteme jednoduše ze vztahu

$$x = \frac{c}{2}t_2 ,$$

protože za čas t_2 , urazí paprsek dráhu dvakrát.

Signály o frekvencích f_1 a f_2 jsou odrazy od dvou protilehlých bodů na rovníku Merkuru, přesně na okraji pozorovatelné polokoule. Z bodu A , který se vlivem rotace vzdaluje ještě více než střed, pochází signál f_1 , od bodu B , který se vzdaluje nejpomaleji, se odráží f_2 . K Dopplerovu jevu dojde vždy dvakrát:

a) ve vztahu vysílač-Merkur. Pozorovatel stojící v bodě A na Merkur by registroval frekvenci

$$f_1' = \frac{c - v - \omega r}{c} f_0 ,$$

b) ve vztahu Merkur-přijímač. V soustavě spojené s bodem A má odražený signál frekvenci f_1' , v soustavě spojené s observatoří je to však

$$f_1 = \frac{c}{c + v + \omega r} \cdot f_1'$$

Celkem tedy dostáváme

$$f_1 = \frac{c - v - \omega r}{c + v + \omega r} \cdot f_0, \quad f_2 = \frac{c - v + \omega r}{c + v - \omega r} \cdot f_0.$$

Protože je $v \ll c$ a $\omega r \ll c$, můžeme po zanedbání přibližně psát

$$\frac{f_1}{f_0} = 1 - \frac{2v}{c} - \frac{2\omega r}{c}, \quad \frac{f_2}{f_0} = 1 - \frac{2v}{c} + \frac{2\omega r}{c}.$$

Kombinací těchto rovnic dojdeme ke vztahům

$$v = \frac{c}{2} \left(1 - \frac{f_1 + f_2}{2f_0} \right), \quad \omega = \frac{f_2 - f_1}{2f_0} \cdot \frac{1}{t_2 - t_1}, \quad T = \frac{4\pi f_0}{f_2 - f_1} \cdot (t_2 - t_1).$$

Číselně:

$$r = 2440 \text{ km}, \quad x = 1,604 \cdot 10^{11} \text{ m} = 1,0723 \text{ AU},$$

$$v = 33,875 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \omega = 1,23 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}, \quad T = 5,1 \cdot 10^6 \text{ s} = 59 \text{ dní}.$$

Doba rotace Merkuru tedy není 88 dní, jak se astronomové dříve domnívali, ale 59 dní. Nejpříjemnější hypotéza vázané rotace tedy padla. Po zveřejnění radarových měření dokázal italský fyzik Giuseppe Colombo, že se u planety s hodně výstřednou drahou může poměr oběžné doby a rotace ustálit na hodnotě 2:3. Tím byla vyřešena otázka pohybu této neobvyklé planety.

Úloha III. 3 ... Pinocchiova čepička (4 body)

Na úvod si objasníme několik faktů a zavedeme společné značení. Výrok “dokonale hladká” v tomto případě znamená, že tření mezi čepičkou a hlavou je nulové, nebo se alespoň k nule blíží, proto v dalších výpočtech nebudeme tření uvažovat. Dále je chybný názor, že čepice je kužel (“je tvaru kužele” neříká, že jde o kužel); jde o plášť kužele.

Základní předpoklad úspěchu je zjistit, jak bude mít Pinocchio čepici nasazenou. Buď způsobem *a*) nebo *b*) na obr. 39.

V případě *a*) musí být $s = |VC| > a = |VA|$ (viz obr. 40),

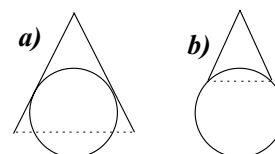
$$s = \frac{v}{\cos \alpha}, \quad a = \frac{r}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Po dosazení

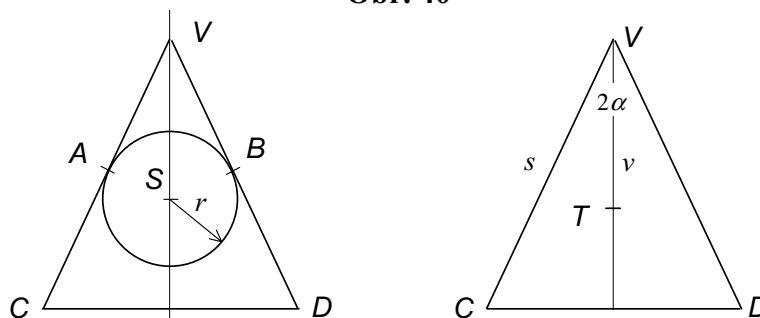
$$s = 23,09 \text{ cm}, \quad a = 25,98 \text{ cm} \Rightarrow s < a.$$

Z výpočtu vidíme, že čepička ze zadání je na obr. 39 *b*). Je jasné, že těžiště čepičky se bude nacházet někde mezi podstavou a vrcholem kužele. Dále je zřejmé, že těžiště bude vždy nad osou otáčení, v našem případě středem hlavičky, a čepička spadne. V nejlepším případě ji lze postavit do polohy labilní rovnováhy a spadne taky.

Obr. 39



Obr. 40



Pro nenechavce rozebereme i případ *a)*. Nejprve určíme, kde má čepička těžiště, a poté v jaké poloze se těžiště nachází vůči středu koule – hlavy.

Těžiště určíme pohledem. Pro ty, co neumějí integrovat, je zde obr. 41. Plášť kužele rozdělíme na velmi malé rovnoramenné trojúhelníky, u kterých hlavní výška splývá s těžnicí, a proto je u každého z nich těžiště ve $\frac{2}{3}$ od vrcholu. Poněvadž to je těleso symetrické, bude těžiště ve $\frac{2}{3}$ výšky pláště kužele. Když už známe těžiště, musíme ještě zjistit délku $|SV|$.

$$|SV| = \frac{r}{\sin \alpha} = 30 \text{ cm (platí pouze pro } s \geq a)$$

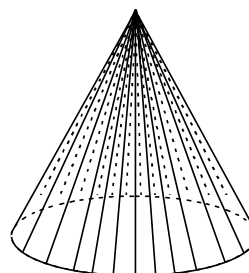
$$|VT| = \frac{2}{3} v.$$

Je-li $|SV| > |VT|$, můžeme čepičku v optimálním případě dostat pouze do polohy labilní rovnováhy.

Je-li $|SV| = |VT|$, čepička se bude nacházet v poloze volné rovnováhy, česky: bude v poloze rovnovážné indiferentní.

Pro $|SV| < |VT|$ bude čepice v poloze stabilní a nespadne.

Obr. 41



Úloha III . 4 ... lednička (3 body)

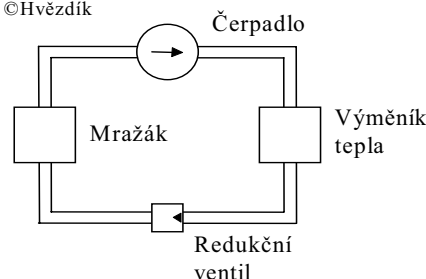
Místnost je tepelně izolována a do místnosti je dodávána energie ze zásuvky \Rightarrow teplota v místnosti se zvýší. Schema ledničky viz obr. 42.

Pozor: Někteří z řešitelů psali: Kdyby lednička byla ideální, teplota v místnosti by se nezměnila. Tato ideální lednička by však porušovala 2. termodynamický zákon: *teplo samovolně přechází z tělesa teplejšího na těleso studenější*. Pokud chcete, aby se teplo předávalo z tělesa studenějšího na těleso teplejší, musíte dodat práci, a tuto práci nemůžete zanedbat ani v ideálním případě. Proto se v ledničce nachází onen kompresor – to je ta věc, která dodává práci, aby teplo ze studenějšího tělesa přešlo na teplejší.

Obr. 42

Schéma ledničky

©Hvězdík



Úloha III . 5 ... vodní kyvadlo (5 bodů)

Těleso se převrátí, pokud bude v labilní rovnovážné poloze. Je k tomu sice nutná jistá, byť malá, vnější síla, ale ta vznikne třeba už tím, že led nemrzne pravidelně (ne nutně musí foukat vítr, jak uvedl jistý řešitel). Jak roste při mrznutí objem ledu, roste i výška těžiště ledového kvádrů. Zřejmě nejvyšší je po zamrznutí celého objemu vody. Těžiště pak je v polovině výšky ledového kvádrů. Víme, že hmotnost vody je v obou skupenstvích stejná. Tedy můžeme psát:

$$\rho_V V_V = \rho_L V_L \rightarrow V_L = \frac{\rho_V}{\rho_L} V_V \quad (\text{z tabulek } \rho_L = 917 \text{ kg.m}^{-3}, \rho_V = 998 \text{ kg.m}^{-3})$$

a) Led se může rozpínat pouze nahoru, takže vytvoří kvádr o podstavě $a \times a$ a výšce $2h$. Těžiště bude ve výšce h . Pokud zavěsíme těleso níže, bude v labilní rovnovážné poloze. Pokud zavěsíme těleso ve výšce přesně h , bude teoreticky v poloze indiferentní, avšak hmotnost nádoby je sice zanedbatelná, leč nenulová, takže to bude ve skutečnosti stejně poloha labilní. Čili maximální výška závěsu, kde se ještě nádoba převrátí, je h ,

$$a^2 2h = \frac{\rho_V}{\rho_L} a^3 \rightarrow h = \frac{\rho_V}{2\rho_L} a = 0,54a.$$

b) Led se rozpíná do všech stran, ale výška těžiště roste, neboť led se po stěnách klouže. Takže platí totéž co v případě a) s tím rozdílem, že výsledné ledové těleso bude krychle s rozměry $2h \times 2h \times 2h$,

$$(2h)^3 = \frac{\rho_V}{\rho_L} a^3 \rightarrow h = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{\rho_V}{\rho_L}} a = 0,51a.$$

Nejčastější chybou bylo užití vzorce pro teplotní objemovou roztažnost látek, kde se hovoří o změně objemu v závislosti na změně teploty, což je jaksí nesmysl, neboť při 0°C se teplota nemění, kdežto objem se poněkud zvětší.

Úloha III. 6 ... gravitační zrychlení (8 bodů)

Gravitační zrychlení lze měřit mnoha způsoby, jak si mnozí z vás zkusili v této experimentální úloze. Naskytly se i takové výjimky, které nás doslova zahltily měřeními, čítající deset i více různých měření.

Mezi nejčastější měření, které jste prováděli, patří dobře známé měření volného pádu, různých kyvadel, valení po nakloněné rovině, mechanický oscilátor, vytékání kapaliny z trubice a mnoho jiných.

Teorie

1. Volný pád

Metoda volného pádu se vyskytla u řešitelů nejčastěji. Tato úloha je totiž technicky, fyzicky i jinak nenáročná. Stačí k ní nějaký ten předmět (nerozbitný či jinak nedeformovatelný, to pro vícenásobné měření), stopky a nějaká ta výška, z které, pokud možno hozený předmět nikomu nespadne na hlavu. Z již klasického vzorce pro volný pád si vyjádříme gravitační zrychlení: $g = \frac{2s}{t^2}$ a dále, jak je z tohoto vztahu vidět, měříme čas t a

dráhu (výšku) s .

2. Kyvadla

a) matematické kyvadlo

Rozumíme jím hmotný bod hmotnosti m upevněný na konci nehmotného závěsu délky l . Pokud se omezíme jen na malé výchylky (asi do 5°) lze ze vzorce pro dobu kmitu T určit místní tíhové zrychlení:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

b) reverzní kyvadlo

Toto kyvadlo kývá se stejnou dobou kmitu kolem dvou rovnoběžných os ležících v rovině, která prochází těžištěm kyvadla. Tyto osy mohou být buď symetricky položeny vzhledem k těžišti nebo vzdáleny o redukovanou délku kyvadla l_r . Z doby kmitu po úpravě

dostaneme: $g = \frac{4\pi^2 l_r}{T^2}$. Zbývá tedy nalézt v kyvadle obě osy. Leží-li tyto osy v rovině

procházející těžištěm tak, že jsou vůči němu nesymetricky rozložené, pak vzdálenost mezi nimi je právě námi hledaná redukovaná délka.

3. Mechanický oscilátor

Jestliže těleso zavěsíme na pružinu, zaujme oscilátor rovnovážnou polohu, ve které je v rovnováze tíhová síla ($F_G = mg$) a síla pružnosti ($F_p = k\Delta l$, kde Δl je prodloužení pružiny). Při okamžité výchylce y z rovnovážné polohy působí na oscilátor výsledná síla F směřující do rovnovážné polohy. Velikost této síly je přímo úměrná velikosti okamžité výchylky a pro její souřadnici na ose y platí:

$$F = -ky, \quad (*)$$

Podle 2. pohybového zákona platí: $ma = -ky$,
přičemž $a = -\omega_0^2 y$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, a tedy pro dobu T kmitání máme $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

Dosadíme do (*) a dostaneme pro tíhové zrychlení $g = \frac{4\pi^2}{T^2} y$.

4. Rychlost kapaliny vytékající otvorem v nádobě

V blízkosti otvoru, který je v hloubce h pod volnou hladinou, se mění tlaková energie kapaliny $E_p = pV$ na kinetickou energii $E_k = \frac{1}{2}\rho Vv^2$. Tzn. $E_k = E_p$, a tedy pro rychlost kapaliny dostáváme $v = \sqrt{2gh}$. Z rovnice kontinuity plyne, že rychlost je rovna objemu kapaliny vyteklé průřezem S za čas t . Tedy $v = V/St$. Porovnáním obou rychlostí obdržíme vztah

$$g = \frac{V^2}{2S^2 t^2 h}$$

5. Nakloněná rovina

Těleso má ve výšce h potenciální energii $E_p = mgh$, vlivem tíhové síly se bude pohybovat dolů. Jeho kinetická energie se bude rovnat součtu translační a rotační energie.

$$E_{KT} = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{a} \quad E_{KR} = \frac{1}{2}J\frac{v^2}{r^2}, \quad \text{kde } J \text{ je moment setrvačnosti.}$$

Pro kouli: $J = \frac{2}{5}mr^2$, pro válec: $J = \frac{1}{2}mr^2$.

Ze zákona zachování energie dostaneme pro kouli $g = \frac{7v^2}{10h}$, pro válec $g = \frac{3v^2}{4h}$.

Vzorové zpracování úlohy:

MECHANICKÝ OSCILÁTOR

Místní tíhové zrychlení určíme tedy z doby kmitu tělesa a to tak, že těleso zavěšíme na pružinu, změříme y a pak těleso rozkmitáme.

Výsledky měření:

Měření jsem prováděla pouze pro jednu pružinu (to abyste se neunudili opakováním). Naměřené hodnoty jsem zpracovala do následující tabulky:

Tabulka 1 – Měření tuhosti pružin a tíhového zrychlení

| Měření | m [g] | l [cm] | N | T [s] | y [cm] | k [Nm ⁻¹] |
|--------|---------|----------|-----|---------|----------|-------------------------|
| 1 | 50 | 43.70 | 5 | 2.6 | 7.24 | 6.77 |
| 2 | 100 | 36.42 | 10 | 7.8 | 14.52 | 6.76 |
| 3 | 120 | 33.88 | 10 | 8.0 | 17.06 | 6.90 |
| 4 | 150 | 29.41 | 10 | 9.0 | 21.53 | 6.83 |
| 5 | 200 | 22.42 | 10 | 10.7 | 28.54 | 6.87 |

Výsledky jsem statisticky zpracovala. Tuhost pružiny je: $k = (6,83 \pm 0,03) \text{ Nm}^{-1}$. Tíhové zrychlení jsem vypočetla ze vztahu (1): $g = (10,2 \pm 0,2) \text{ ms}^{-2}$, g je uvedeno jako aritmetický průměr měření spolu s pravděpodobnou chybou. Relativní chyba je $\rho_g = 2\%$.

Diskuse:

Hodnotu tuhosti pružiny jsem určila metodou statistickou.

Hodnota tíhového zrychlení je určena s chybou, která byla způsobena nepřesností při měření doby kmitu. Pro zmenšení chyby měření by bylo zapotřebí změřit čas většího počtu kmitů. To se ovšem nepodařilo, neboť k tomu by bylo třeba užít větších hmotností. Ovšem pružina po zavěšení většího počtu závaží začala vykonávat nejen kmity vertikální, ale i horizontální, což se projevilo v chybě měření, ale i ve výsledku.

Nepřesnost měření byla způsobena také tím, že pružina byla částečně deformována.

Závěr: Tuhost pružiny jsem určila metodou statistickou: $k = (6,83 \pm 0,03) \text{ Nm}^{-1}$.

Pro tuto pružinu jsem určila tíhové zrychlení: $g = (10,2 \pm 0,2) \text{ ms}^{-2}$.

Nejčastější chyby, kterých se řešitelé dopouštěli:

1. Píšete výsledky i mezivýsledky na strašnou spoustu desetinných míst. Stačí tolik desetinných míst, na kolik je 1. platná cifra chyby ($g = (9,82 \pm 0,01) \text{ ms}^{-2}$).

2. Pokud byly uváděny chyby, velmi často jste zapomínali uvádět chyby výsledku.

3. Skoro všichni uváděli některé veličiny (výška, délka...), aniž by jste je změřili vícekrát a vzniklou chybu započítali do chyby výsledné.

Ještě na závěr malý dluh.

Padostroje slouží k vyšetřování rovnoměrně zrychleného pohybu v tíhovém poli zemském.

U Atwoodova padostroje je rovnoměrně zrychlený pohyb použitím kladky podstatně zpomalen proti volnému pádu. Na obr. 43 je vidět, že se skládá z vysokého stojanu S , na jehož vrcholu je upevněna kladka K , přes kterou jde vlákno nesoucí na koncích dvě závaží Z stejné hmoty m . Po obou stranách stojanu opatřeného měřítkem jsou posuvné plošinky. Jedna plošinka P_1 bývá opatřena elektromagnetem, který umožňuje přidržet jedno závaží a ve vhodný čas je uvolnit. Na druhé straně stojanu je kromě plné plošinky P_2 i plošinka P_3 s kruhovým otvorem, kterým projde závaží, ale neprojde přivažek o hmotě m_1 , který přikládáme na jedno z obou závaží, abychom dosáhli zrychlení, pro které plyne z Newtonova zákona

$$a = g \frac{m_1}{2m + m_1},$$

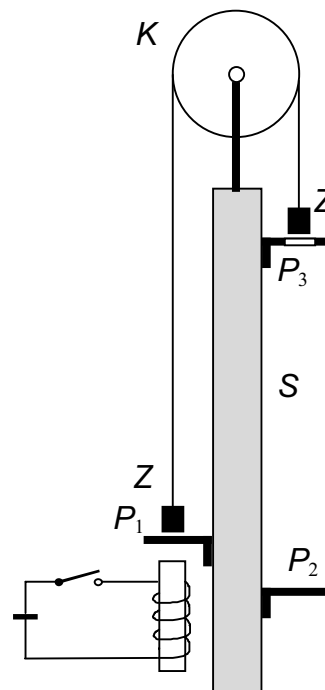
jestliže neuvažujeme tření a kladka i

vlákno jsou nehmotné. Dále změříme odpovídající doby pádu závaží. Pro a z rovnoměrně zrychleného pohybu platí:

$$a = \frac{2s}{t^2}.$$

Obr. 43

Atwoodův padostroj

**Úloha IV . 1 ... Pozor, přímý přenos (5 bodů)**

Tato úloha byla vymyšlena k tomu, abyste se naučili sami si zvolit, co při řešení vzít v úvahu, kde si co zjednodušit a co zanedbat. Příroda s sebou přináší problémy, které nejsou dostatečně zadané, fyzik je nucen dělat řádové odhady, lineární zjednodušování, zanedbávání nejrůznějších efektů, aby vůbec k něčemu dospěl.

K Honzíčkovi se šíří signál rychlostí zvuku v přímo od orchestru a to na vzdálenost h . Pepíček své tóny dostane tak, že z mikrofónů umístěných nad orchestrem musí rádiový signál překonat vzdálenost p rychlostí c až do Pepíčkova přijímače. Podle zadání příkladu potom snadno určíme h :

$$h = \frac{pv}{c}. \quad (1)$$

Rozumná řešení, jak určit vzdálenost p , byla dvě a lišila se od sebe zhruba o jeden řád. Signál se do Prahy může dostat buďto přes telekomunikační družici, anebo zprvu podmořským kabelem přes Atlantik a poté třeba z Londýna na dlouhých vlnách.

Některé výchozí údaje:

$$v = 345 \text{ m.s}^{-1} \text{ (za teplot asi } 20^\circ\text{C a normálního tlaku),}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\text{New York: } 41^\circ \text{ s.š., } 74^\circ \text{ z.d.; Praha: } 50^\circ \text{ s.š., } 14,5^\circ \text{ v.d.}$$

A) telekomunikační družice

Družice určené pro přenos informací z jednoho konce světa na druhý musí mít jednu základní vlastnost – být snadno zaměřitelné z místa přenosu. Z tohoto důvodu se používají tzv. geostacionární družice, které mají periodu oběhu stejnou jako je doba rotace Země. Obíhá-li taková družice po orbitě nad rovníkem, nachází se pořád nad stejným místem

povrchu Země, a je tudíž snadno zaměřitelná. Dosadíme-li do pohybového zákona družice (dostředivou silou mv^2/r je síla gravitační $\kappa mM/r$) za dobu oběhu $T = 24$ hod., zjistíme, že se nachází na kruhové orbitě ve výšce

$$h = \sqrt[3]{\frac{\kappa M}{4\pi^2}} T^2, \text{ číselně } h = 35\,700 \text{ km.} \quad (2)$$

Započítáme-li, případně odhadneme-li to, že New York a Praha neleží přímo na rovníku a jsou od sebe nějak vzdáleny, dojdeme k celkové hodnotě $p = 73\,000$ km. Mnozí jste vzdálenost určili tak, že jste si zavedli kartézský systém souřadnic s počátkem ve středu Země, našli souřadnice New Yorku, Prahy a družice a z nich potom snadno Pythagorovou větou hodnotu p . Je to pěkný matematický přístup, já se však spokojím s pouhým odhadem. Podle (1) dostaneme $h = 84$ m.

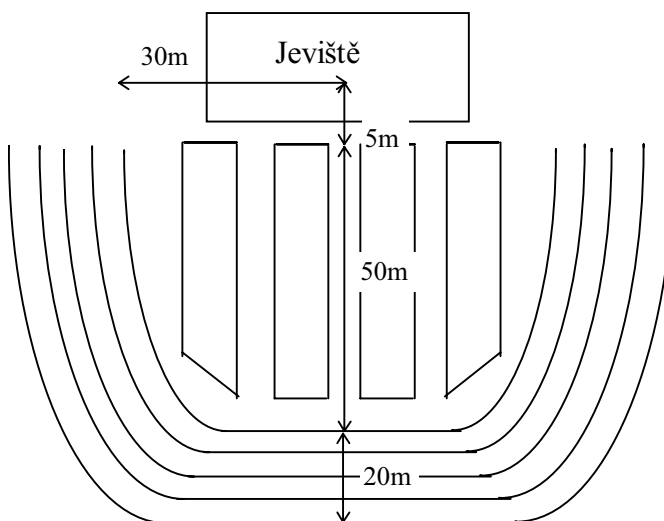
B) podmořský kabel

Zjistíme nejmenší možnou vzdálenost New York – Praha jako délku oblouku na kouli, již Zemi nahradíme. Tady jste se mnozí dopouštěli té chyby, že jste za poloměr oblouku vzali poloměr Země R_z a ne $R_z \cos \phi$, kde ϕ střední zeměpisná šířka pro New York a Prahu ($\phi = 45,5^\circ$ s.š.). Délka oblouku pak vyjde 6900 km, můžeme proto směle položit $p = 7000$ km. Podle (1) máme $h = 8$ m, skutečně o řád méně než v A).

C) Carnegie Hall

A jak je to vlastně s parametry naší koncertní síně? Na obr. 44 jsem se pokusil naznačit, jak vlastně Carnegie Hall, postavená na konci minulého století, vypadá. Dočetl jsem se, že pojme asi 2760 posluchačů, můj plánek je inspirován dobovou fotografií. Vzdálenost řad jsem odhadl na 1 m. Přiznám se, že jsem se snažil rozměry spíše nadhodnocovat než naopak (např. velikost balkónů). I tak podle výsledků A) musí Honzíček sedět na tom nejnepříznivějším místě galerie – posledním balkónu. Naopak podle výsledků B) má jedno z těch nejlepších míst v prvních řadách přímo před dirigentem. Rozmyslete si už sami, na co asi malý český človíček má. Zajímavé je, že nikoho nenapadlo, že může Honzíček sedět “uhlopříčně”, i když to dá jenom pár metrů.

Obr. 44 – Carnegie Hall



U pár lidí se vyskytla idea šíření signálu odrazy od ionosféry, na tak velkou vzdálenost by to asi skutečně nefungovalo. Chtěl bych také zdůraznit, že odhadovat neznamená vymýšlet si, jak někteří předváděli sypání si čísel z rukávu. Nakonec ještě poznamenejme, že úloha může mít trochu nestandardní řešení, neboť při poslechu především ve větších vzdálenostech hraje roli odrazení zvuku od stěn a stropu sálu.

Citlivost lidského ucha je tak asi 0,1 s, tudíž uvážíme-li Honzíčka jako měřicí přístroj s takovou citlivostí, námi spočítaný efekt bude překryt chybami. Honzíček pak nebude schopen Pepíčkově přesně říci, kdy co slyšel, aby si ověřili, že skutečně každou notu slyšeli ve stejný okamžik.

Úloha IV . 2 ... opilci v New Yorku (6 bodů)

Nejdříve si napíšeme parametrické rovnice pohybu obou kamarádů v závislosti na čase t (začátek pohybu je v nulovém čase, směry jsou při pohledu na obrázek).

$$\begin{aligned} \text{Vodorovný směr:} \quad x_1 &= -l + vt, & y_1 &= A \cdot \sin(2\pi vt)/T, \\ \text{svislý směr:} \quad x_2 &= -A \cdot \sin(2\pi vt)/T, & y_2 &= -l + vt. \end{aligned}$$

Nyní si vyjádříme jejich vzdálenost s v závislosti na čase t pomocí Pythagorovy věty:

$$s = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{2(vt - l)^2 + 2A^2 \sin^2\left(\frac{2\pi vt}{T}\right)}.$$

Až sem vedla většina řešení. Dále potřebujeme zjistit, kdy je tato vzdálenost nejmenší, tzn. je třeba nalézt minimum funkce $s(t)$ v závislosti na čase. Mnozí z vás se pustili do numerického hledání minima tak, že nechali na počítači (nebo řidčeji v ruce) probíhat čas od nuly do nějakého velkého čísla s tím, že přičítali nějaké malé Δt , a hlídali si, zda vzdálenost v příslušném čase není menší, než dosavadní minimum. Tento postup má jednu drobnou nevýhodu (která se ale naštěstí v tomto případě neprojeví), že pokud se ve funkci vyskytne nějaký velký “skok dolů” na intervalu kratším než Δt , tak ho algoritmus přejde naprosto bez povšimnutí. Bez znalosti derivací je to však řešení nejsnazší. Já raději předvedu řešení, jaké by mi připadlo korektnější.

Využijeme matematickou větu, která tvrdí asi toto: *pokud má funkce v bodě x_0 minimum, tak její derivace je v bodě x_0 nulová (pokud tato derivace existuje!)* – tato věta **neplatí naopak**, jak ji takřka všichni používají! Funkce $s(t)$ vskutku je spojitá a také je všude derivovatelná, a tak nám nic nebrání ji zderivovat. Příjemnější však bude pracovat s funkcí $w(t) = s^2(t)/2$, která má zřejmě minima právě v těch bodech, kde je má i funkce $s(t)$, neboť druhá mocnina je na intervalu $(0, \infty)$ rostoucí funkcí. Proto položíme

$$\frac{dw}{dt} = 2v^2 t - 2vl + 2A^2 \frac{\pi v}{T} \sin\left(\frac{4\pi vt}{T}\right) = 0.$$

Tato rovnice nejde nijak rozumně řešit analyticky (jednomu řešiteli se to povedlo moc pěkně nahrazením sinu lineární funkcí, ale není to zas tak triviální a už vůbec ne obecné), snadno to však jde numericky, třeba nejjednodušší metodou půlení intervalu – byl tomu věnován seriál na pokračování v minulém ročníku. Zde je krátký výpis pascalovského programu:

```
var d,t,a,b:real;
function dd(t:real):real; {derivace funkce w v bod t}
begin dd:=2*t-54+50*pi/12.6*sin(4*pi*t/12.6);end;
begin
a:=20;b:=27; {krajní body intervalu, kde hledám minimum}
repeat
if dd((a+b)/2)>0 then b:=(a+b)/2 else a:=(a+b)/2;
{rozp lení intervalu}
until b-a<1e-4; {1e-4 ... požadovaná p esnost}
t:=(a+b)/2; {výsledný as leží n kde na intervalu <a,b>}
d:=sqrt(2*(t-27)*(-27+t)+50*sin(2*pi*t/12.6)*sin(2*pi*t/12.6));
writeln(t:10:3,d:10:3);
end.
```

Výsledek zní, že v čase asi 25,5 sekundy budou vzdáleni asi 2,4 metru. Taková by měla být přesnost výsledku vzhledem k zadaným hodnotám, i když vzhledem k interpretaci zadání by se víc hodila odpověď, že “někde skoro uprostřed křižovatky do sebe skoro vrazej”. Pro všechny, kteří se snažili o strašně moc desetinných míst – jen málokdo to měl dobře od nějaké páté cifry dál správně – oficiální verze je: čas 25,451 691 9030 s a vzdálenost 2,361 784 8417 m. Ale znovu upozorňuji, uvádějte výsledek pouze s takovou přesností, s jakou byla úloha zadána.

Co se týče algoritmů, celkem mě mrzelo (i když na hodnocení to nemělo vliv), že naprostá většina řešitelů přešla výpočet poznámkou “a podle počítače výsledek zní”.

Zmínil bych se ještě o jedné chybě. Leckdo zaokrouhlil výraz $2\pi/T$ jako 0,5. Sice jsem to tak při vymýšlení úlohy zamýšlel, ale ukázalo se, že to ovlivňuje vzdálenost již na prvním desetinném místě, což je docela nepříjemné. Zásadní chyba tedy byla, když někdo užil tuto fintu a pak vesele vypsál (špatný) výsledek na 6 desetinných míst! Pod pojmem grafické řešení jsme mysleli nikoliv přibližný obrázek, ale nějakou přesnou geometrickou konstrukci.

Úloha IV . 3 ... stvoření hvězd (6 bodů)

Nejprve si převedme problém z oblaku plynu a spousty částic na problém dvou částic, který zajisté vyřešíme snadněji.

Jak jistě víte a jak dokázal i Newton, máme-li kulovou slupku, která má všude stejnou objemovou hustotu, můžeme ji nahradit hmotným bodem ve středu této slupky – to však platí pouze pro síly úměrné – tedy pro gravitační nebo coulombovské.

Odtud je krůček k tomu, abychom kouli, u které je hustota závislá pouze na vzdálenosti od středu (a nebo jak říkají lidé, kteří chtějí udělat dojem: “hustota je rozmístěna radiálně symetricky”), nahradili v případě výpočtu gravitačních sil hmotným bodem ve středu koule. Samozřejmě, jednu částičku si necháme, aby mělo co padat do středu.

Tento čistě gravitační problém – za jak dlouho dopadne malá částička na velkou částici – můžeme řešit několika způsoby.

- 1) přímou integrací (pouze pro šílence, nadšence a jiné matematicko-fyzikální talenty),
- 2) “fintou” a pokud možno co nejjednodušeji – pomocí Keplerových zákonů,
- 3) “podvodem” – tedy numericky.

Přičemž všechny způsoby jsou správné a vycházejí stejně.

Ad 1) řešení přímou integrací.

Vyjděme ze zákona zachování energie pro volně padající částici, na počátku je potenciální energie největší a kinetická nejmenší (nulová), během času se potenciální energie zmenšuje, kinetická zvětšuje,

$$\frac{1}{2}mv^2 - \kappa Mm \frac{1}{r} = E_{\text{celk.}} = -\kappa Mm \frac{1}{R}.$$

Rychlost je derivace dle času, $v = dr/dt$, dostáváme diferenciální rovnici prvního řádu

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \kappa M \frac{1}{r} - \kappa M \frac{1}{R}.$$

Nyní máme diferenciální rovnici prvního stupně, kterou můžeme řešit separací proměnných, to znamená, že všechny r (a jedno dr) převedeme na jednu stranu rovnice a všechny t (a jedno dt) na stranu druhou. Tento postup je většinou nejjednodušší metoda řešení diferenciálních rovnic, jde však použít pouze pro diferenciální rovnice prvního řádu. Odseparováním r nalevo a t napravo dostáváme (současně jsme jaksí mimochodem odmocnili, připsali integrály, doplnili a přepsali dr na druhou stranu):

$$\int_R^0 \frac{dr}{\sqrt{2\kappa M/r - 2\kappa M/R}} = \int_0^T dt,$$

neboli
$$\frac{1}{\sqrt{2\kappa M}} \int_R^0 \sqrt{\frac{rR}{R-r}} dr = [t]_0^T = T.$$

Zatímco pravá strana je lehkou řešitelná, s levou stranou budou jistě problémy. Toto je onen slibovaný šílený integrál, jehož řešení jsem zbaběle opsal. Máte-li volný víkend, zkuste si přepočítat řešení. Pro začátek zkuste substituci $r = R \sin^2 \alpha$, která by měla po dosazení vést na

$$T = \frac{2R\sqrt{R}}{\sqrt{2\kappa M}} \int_{\pi/2}^0 \sin^2 \alpha d\alpha' = \sqrt{\frac{2R^3}{\kappa M}} \left[\frac{\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2} \right]_{\pi/2}^0 = \pi \sqrt{\frac{R^3}{8\kappa M}}.$$

Nyní se již pouze dosadí za hmotnost hvězdy její poloměr, hustota a nějaké ty konstanty, tedy $M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$, což po dosazení do doby pádu T dává konečný výsledek

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{32\kappa\rho}}.$$

Číselně pro zadané hodnoty dostáváme nějakých 470 tisíc let.

Je mi jasné, že tyto výpočty jsou více než příšerné, pokud se je rozhodnete přeskočit, zaručeně téměř o nic nepřijdete. Proto mám v záloze pro vás přijatelnější řešení.

Ad 2) řešení figlem pomocí Keplerových zákonů

Použijeme následující trik: pohybuje-li se malá částice v gravitačním poli větší částice, lítá spokojeně po elipse, jež má větší částici v ohnisku a splňuje 3. Keplerův zákon

$$\frac{a^3}{T_{\text{ob}}^2} = \text{konst.},$$

kde a je velká poloosa elipsy a T_{ob} perioda oběhu částice.

Budeme-li elipsu zužovat a zužovat, což odborně znamená zvyšovat její excentricitu, časem se z ní stane úsečka, velmi protáhlá elipsa, která ale také splňuje Keplerovy zákony (viz obr. 45). Tato trajektorie v podstatě odpovídá volnému pádu částice do centra, což je přesně to, co potřebujeme.

Určeme dobu oběhu částice T_{ob} letící po kruhové dráze z rovnosti přitažlivých a gravitačních sil:

$$m\omega^2 R = \frac{\kappa Mm}{R^2}.$$

Odtud pomocí $\omega = \frac{2\pi}{T_{\text{ob}}}$ dostáváme $T_{\text{ob}} = 2\pi \sqrt[3]{\frac{R^3}{\kappa M}}$.

My však můžeme ze znalosti poloměru a hustoty určit hmotnost $M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$, z čehož máme samozřejmě radost, poněvadž se nám vykrátí poloměr R . Tím obdržíme konečný vztah pro dobu oběhu částice po kruhové dráze:

$$T_{\text{ob}} = 2\pi \sqrt{\frac{3}{4\pi\rho\kappa}}.$$

Dále použijeme znalost Keplerových zákonů, tj.

$$\frac{R^3}{T_{\text{ob}}^2} = \frac{a^3}{(2T)^2} = \frac{(R/2)^3}{(2T)^2},$$

neboť doba pádu tělesa do středu je poloviční době oběhu velmi protáhlé elipsy (to vysvětluje ono $2T$) a délka hlavní poloosy velmi protáhlé elipsy je polovina vzdálenosti R .

Po sesumírování několika předchozích vztahů se vyloupne pro dobu pádu oné poslední částice, a tím také doba smrsknutí mlhoviny do bodu (podle Newtona, termodynamika a Einstein zde mají dovolenou), vztah

$$T = \sqrt{3\pi/32\kappa\rho}.$$

Ad 3) numerické řešení

Numerických řešeních je samozřejmě děsně moc, na to je celá věda zvaná numerická matematika. V podstatě máte dvě cesty:

- numericky vyřešíte onen šílený integrál z první cesty řešení (přímou integrací),
- numericky řešíte přímo diferenciální rovnici

$$a = \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{\kappa M}{r^2} \quad (\text{Newtonův pohybový zákon}),$$

s těmito počátečními podmínkami:

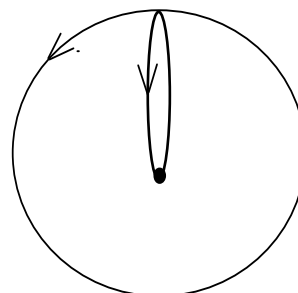
$$\begin{aligned} \text{počáteční poloha: } r &= R, \\ \text{počáteční rychlost: } v_0 &= 0. \end{aligned}$$

Na závěr ještě princip jednoho poměrně jednoduchého algoritmu se slušnou přesností: znám polohu částice \rightarrow určím zrychlení pomocí gravitačního zákona \rightarrow spočtu novou rychlost \rightarrow spočtu novou polohu částice a toto opakuji až do omrzení, tedy

$$a_{i-1} = -\frac{\kappa M}{r_{i-1}^2} \rightarrow v_i = v_{i-1} + a_{i-1} dt \rightarrow r_i = r_{i-1} + v_{i-1} dt + \frac{1}{2} a_{i-1} dt^2,$$

kde dt je časový krok simulace. Až vám klesne r_i pod nulu, tak už jste se zhroutili.

Obr. 45

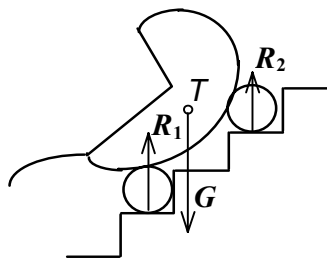


Úloha IV . 4 ... drama na schodech (3 body)

Ačkoliv to tak nevypadá, kočárek zůstane stát (aspoň teoreticky) na místě, protože se nachází v rovnovážné poloze a tudíž nemá důvod se někam pohybovat, předpokládáme-li, že ho maminka zanechala v klidu. To, že těleso je v rovnovážné poloze, znamená nulovou výslednici vnějších sil (tedy těleso nemá tendenci začít se pohybovat translačně) a nulový výsledný vnější moment (těleso nezačne rotovat).

Nejdříve se podívejme na to, které síly působí na kočárek. Je to tíhová síla v těžišti a pak dvě resp. čtyři reakční síly, kterými tlačí schody do kol kočárku. Reakční síly jsou vždy kolmé k povrchu (a to nejen tady). Proč tomu tak je? Obecně platí, že vazbové síly jsou kolmé k vazbě, tj. například k desce stolu. Kdyby tomu tak nebylo, znamenalo by to, že by tečná složka síly urychlovala těleso rovnoběžně s povrchem a tudíž mu dodávala energii. Schody jsou sice šikmé, ale lokálně (tzn. pod koly) je povrch vodorovný. Můžeme tedy shrnout, že síly působící na kočárek jsou pouze svislého směru, gravitace působí dolů, reakce schodů nahoru. Jsou tedy navzájem rovnoběžné, jak se můžete přesvědčit na obr. 46.

Obr. 46



Podívejme se nyní na naši translační rovnováhu. Všechny síly působící na kočárek jsou svislé, jejich výslednice má tedy svislý směr nebo je nulová. Kdyby nebyla nulová, tak by se kočárek nadzvedl a přestaly by působit reakční síly zespoda a kočárek by opět klesl. Dolů se kočárek pohybovat nemůže, protože pak síly R_1 a R_2 rostou až do chvíle, kdy vyrovnají gravitaci. Výslednice sil je tedy nulová a těleso (kočárek) se nebude translačně pohybovat.

Ke stejnému výsledku můžeme dojít pomocí energetických úvah. Na počátku je vše v klidu, tzn. $E_k = 0$ a zvolme nulovou hladinu potenciální energie tak, aby i $E_p = 0$. Tedy celková energie $E_k + E_p = 0$. Pokud kočárek popojede o kousek, musí získat rychlost, což odpovídá nárůstu kinetické energie. Ale co se děje s potenciální energií? Ta zůstává konstantní, neboť výška těžiště zůstává konstantní, opět jen lokálně, pokud jsme na stejném schodě. Pak ale $E_k + E_p = 0 + \text{něco} > 0$, což by znamenalo neplatnost zákona zachování energie. Možná se ptáte, proč lokálně. To znamená že vše musí platit pro jakékoliv malé změny polohy. U kočárku to znamená, že stojí stále na stejném schodě (obr. 47a).

Podobně se podíváme na problém rotace.

Těleso může rotovat vpodstatě kolem dvou os, těmi jsou osy předních a zadních kol kočárku. Tak jak je obrázek nakreslen (především umístění těžiště vůči kolům), musí se těžiště kočárku při rotaci kolem zadních kol zvedat, tedy E_p roste a zároveň kočárek získává nějakou úhlovou rychlost, tedy i E_k roste. Celková energie opět roste,

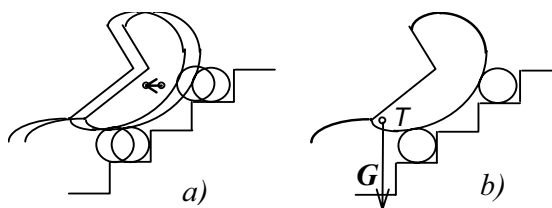
což znamená spor se zákonem zachování energie. Kočárek nemůže začít rotovat. Jinak by to ale dopadlo, pokud by těžiště bylo mnohem více vlevo, při rotaci by těžiště klesalo a $E_p < 0$, $E_k > 0$ a celková energie by se zachovávala ($E_p + E_k = 0$) – viz obr. 47b. Tak tomu ale naštěstí podle zadání není.

Abych tedy shrnul, kočárek se nezačne točit ani posouvat, zůstane přesně tam, kde jej matka zanechala. Doufám, že jsem vás neodradil úvahami z teoretické mechaniky, které jsem se snažil propašovat do řešení tak snadného příkladu.

Úloha IV . 5 ... hrátky se rtuť (4 body)

Předem bych chtěl upozornit, že se jednalo o rtuť a z obrázku šlo vykoukat, že v tomto případě rtuť nesmáčela stěny nádoby ani kapilár. Dochází tak ke kapilární depresi a hladina poklesne, což většina z vás správně pochopila. Úlohu lze řešit, pokud přijmeme jistě

Obr. 47



zjednodušující předpoklady: nádoba se rtutí má mnohem větší rozměr než kapiláry, rtuť je dostatek na ponoření kapilár a především tloušťka stěny vnitřní kapiláry je zanedbatelná vůči průměru, jinak bychom potřebovali tuto tloušťku znát.

Při samotném řešení vyjdeme ze známého vztahu pro tlak $p = F/S$, kde $F = \sigma \mathcal{A} \cos \vartheta$ je kolmý průmět síly vyvolané povrchovým napětím po obvodu kapiláry do svislého směru, ϑ je úhel, který svírá síla se svislým směrem (tedy úhel mezi zakřiveným povrchem rtuť a stěnou kapiláry) a S je obsah průřezu kapiláry. Tlaková bilance pak je

$$p_a + h\rho g = p_a + p_k = p_a + \frac{\sigma l \cos \vartheta}{S},$$

kde p_a je atmosférický tlak působící na kapalinu jak v nádobě, tak v kapiláře a $h\rho g$ je tlak v kapalině v hloubce h měřeno od nejdříve položené hladiny kapaliny. Někteří z řešitelů úlohu řešili chybně tak, že nejdříve ponořili vnější kapiláru, spočetli výšku hladiny a poté ponořili do ní vnitřní kapiláru a určili výšku hladiny ve vnitřní, jako by byla ponořena pouze v té vnější nezávisle na okolí. To samozřejmě nelze, neboť tlak v kapalině je vyvolán celkovou výškou kapaliny.

Pro jednotlivé kapiláry můžeme psát (za předpokladu, že rtuť dokonale nesmáčí stěny kapilár, $\vartheta \in \infty$):

a) vnitřní kapilára

$$l_1 = \pi d, S_1 = \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow h_1 = \frac{\sigma l_1 \cos \vartheta}{\rho g S_1} = \frac{4\sigma \cos \vartheta}{\rho g d} \cong \frac{4\sigma}{\rho g d},$$

b) vnější kapilára (mezikruží, dva obvody!)

$$l_2 = 3\pi d + \pi d = 4\pi d, S_2 = \frac{\pi(3d^2)}{4} - \frac{\pi d^2}{4} = 2\pi d^2 \Rightarrow h_2 = \frac{4\pi \sigma d \cos \vartheta}{2\pi \rho g d^2} \cong \frac{2\sigma}{\rho g d}.$$

Vidíme tedy, že nejnižší bude hladina ve vnitřní kapiláře a ve vnější kapiláře bude hladina v dvakrát menší hloubce.

Poznámka: Úlohu bylo možné řešit i jinak, ovšem se znalostí vztahu pro tlak pod zakřiveným povrchem kapaliny $p_k = \sigma(1/r_1 + 1/r_2)$, kde r_1 a r_2 jsou poloměry křivosti povrchu v daném místě. Tento vzorec lze odvodit z působení sil povrchového napětí na elementární plošku v daném místě. Pro vnitřní kapiláru bereme $r_1 = r_2 = d/2$ (jedná se o kulový povrch) a pro mezeru mezi kapilárami $r_1 = d/2$ a $r_2 = \infty$, neboť zde jde o anuloid ("pneumatiku") a v řezu kolmém na průměr je poloměr křivosti nekonečný. Dosazením těchto křivosti do rovnice pro p_k , a pak do výchozí rovnice s tlaky obdržíme stejný výsledek jako předchozí metodou.

Úloha IV . 6 ... *At' žije sníh!* (8 bodů)

Tak jsem dostal k opravení praktickou úlohu o tření lyžaře na sněhu, zrovna když bylo den po oblevě. Ale abyste neřekli, provedl jsem měření náhradní:

Valivé tření kola bicyklu

Nejprve trocha teorie:

Smyková třecí síla F_t se počítá ze vzorce

$$F_t = f \cdot F_g, \quad (1)$$

kde f je hledaný koeficient, pro danou dvojici materiálů téměř neměnný a F_g tlaková síla působící kolmo na podložku (zde tíhová síla, proto index g).

Naproti tomu valivé tření závisí ještě na poloměru kola r :

$$F_t = \xi F_g / r. \quad (2)$$

Proto má koeficient ξ rozměr délky.

Vlastní měření probíhalo tak, že jsem tahal člověka na kole, a to rychlostí pokud možno rovnoměrnou, přičemž jsem měřil sílu, kterou musím vyvinout. Měření jsem prováděl na rovině, ale abych přesto eliminoval možnou chybu, vždy na dráze "tam a zpět" a výsledek

průměroval. Naměřenou hodnotu jsem považoval přímo za třecí sílu a koeficient ξ jsem pak počítal přímo z úpravy vzorce (2).

Výsledky měření:

$r = 33 \pm 1$ cm, měřeno dílenským metrem.

$F_g / g = (73 \pm 1) \text{ kg} + (15,0 \pm 0,5) \text{ kg} = 88 \pm 2 \text{ kg}$, první člen je hmotnost jezdce, měřená osobní váhou, druhý je hmotnost kola, zjištěná pomocí mincíře.

F_t pro různé materiály, vždy v N, chyba 2 N. Měřeno školním siloměrem s přesností 1 N, ale rozptyl je velký a odečítání za pohybu nepřesné.

Beton: $(13+21)/2 \text{ N} = 17 \text{ N}$

Dlážky malé: $(8+15)/2 \text{ N} = 12 \text{ N}$

Kostky střední: $(21+26)/2 \text{ N} = 24 \text{ N}$ (pardubický Příhrádek)

Kostky velké: $(18+5)/2 \text{ N} = 12 \text{ N}$ (tamtéž)

Tráva: $(62+52)/2 \text{ N} = 57 \text{ N}$ (značné oscilace)

Krom toho jsem měřil klidovou třecí sílu.

Kostky střední: 46 N

Kostky velké: 48 N

Beton: 30 N

Tyto hodnoty jsem dál neuvažoval, neboť na ně nedá pohlížet jako na valivé tření.

| Matroš | ξ [mm] | Chyba Abs[mm] | Chyba Rel [%] |
|----------------|------------|---------------|---------------|
| Beton | 60 | 7 | 12 |
| Dlážky | 42 | 7 | 17 |
| Kostky střední | 84 | 7 | 8,6 |
| Kostky velké | 42 | 7 | 16,8 |
| Tráva | 200 | 8 | 4,2 |

Je vidět, že tam, kde byly hodnoty třecí síly velké, byla menší relativní chyba. Faktem ovšem zůstává, že chyba u např. posledního měření mohla být mnohem větší (stačilo vzít rozptyl hodnot třeba 5 N).

Relativní chybu jsem počítal jako odmocninu ze součtu kvadrátů relativních chyb jednotlivých veličin.

Přímé měření, tedy určení třecí síly a hmotnosti objektu (ve vašem případě lyžaře, nebo samotné lyže) je pochopitelně jednou z mnoha možností jak se dobrat výsledku. Většina lidí to řešila kinematicky, lze měřit např. čas projetí známé dráhy na svahu, při rozjezdu z klidu. Při stálém tření lze předpokládat stálé zrychlení (zpomalení), než jaké by odpovídalo samotnému zrychlování ze svahu. Problém byl v tom, že když se určil sklon svahu (olovnicí, úhloměrem), ve výsledném vzorci se od sebe odečítaly dvě blízké hodnoty, čímž chyba narostla (u některých až nad 100%).

Potížím s měřením úhlu v terénu se vyhnul ten, kdo měřil například dojezd na rovině (prohlásil, že má svah o nulovém sklonu). Na rovině byla třecí síla jedinou silou brzdící, takže problémy s odečítáním blízkých hodnot nevznikaly. Stačilo určit dva parametry zpomaleného pohybu. Nejlepší kombinací je dráha a čas, lze taky dráha a počáteční rychlost, nebo čas a počáteční rychlost. Rychlost se nejlépe získá změřením krátkého úseku (např. 1 m), mnozí si pomohli rozjezdem ze svahu, kde zase měřili příslušný čas a dráhu, přičemž sklon je pálit nemusel. No a hrstka těch, kteří měli svah s proměnným sklonem hledali mezní úhel, kdy se rozjedou rovnoměrně.

A jak to vlastně dopadlo? Dobře. Řešitelé naměřili hodnoty zahrnující všemožné druhy sněhu od nadýchaného prašanu až po firm a led. Koeficient tření kolísá od 0,005 až po 0,300, přičemž nejčastěji se vyskytovaly hodnoty mezi 0,050 a 0,100.

Úloha V. 1 ... řetízek babičky Julie (5 bodů)

Protože platí $H > a + b$, tak v okamžiku opouštění stolu je celý řetízek ve vzduchu. Díky tomu můžeme jeho pohyb rozdělit do pouhých dvou fází, přičemž v první fázi ještě leží nějaká část řetízku na stole, ve druhé jde o prostý volný pád, kdy “sledujeme” poslední článek řetízku (chceme vědět, v jakém okamžiku leží celý řetízek na zemi, tedy kdy dopadne tento poslední článek). V reálném případě by zřejmě již ležící část řetízku ovlivňovala část nalézající se ještě ve vzduchu (ať už kvůli nějakému tření uvnitř řetízku, nebo jen díky pouhému tvoření “hromádky”), ale od těchto efektů, stejně jako od toho, že řetízek je složen z článků, je radno při řešení odhlédnout. Dále budu řetízek považovat za homogenní.

Zaveďme tedy lineární hustotu $\tau = m/(a+b)$, kde m je hmotnost celého řetízku. Potom hmotnosti jednotlivých částí řetízku budou $m_a = \tau a$, resp. $m_b = \tau b$.

Jelikož stopky mačkáme až v okamžiku, kdy řetízek opouští stůl, stačí nám ve výše zmíněné první fázi pohybu znát pouze koncovou rychlost v_0 . K jejímu určení použijeme zákon zachování mechanické energie. Celá část a , a tedy i její těžiště, poklesne o výšku b (viz obr. 48), těžiště části b poklesne o $b/2$. Odtud pro pokles potenciální energie máme

$$\Delta E_p = m_a g b + m_b g \frac{b}{2} = g \tau b \left(a + \frac{b}{2} \right). \quad (1)$$

Tato se přemění zčásti na energii kinetickou E_k , zčásti na práci W potřebnou k překonání tření. Uvažme třecí sílu ve tvaru $F_t = f F_n$, kde f je koeficient tření a F_n síla působící kolmo na plochu. Rozdělíme-li si řetízek na mnoho malých kousků, můžeme si všimnout, že na každý bude působit stejná třecí síla (je-li řetízek homogenní), ovšem každý urazí po stole jinou dráhu. Je vidět, že vykonaná práce bude táž, jako kdyby celá část b urazila dráhu $b/2$. Bude tedy platit

$$W = F_t b/2 = \tau g f b^2/2. \quad (2)$$

Nyní už můžeme dosadit do zákona zachování mechanické energie $\Delta E_k = \Delta E_p - W$, odkud velice snadnou úpravou získáme hledanou rychlost

$$v_0 = \sqrt{\frac{g b}{a+b} (2a + b - f b)}. \quad (3)$$

V druhé fázi pohybu jde o volný pád s nenulovou počáteční rychlostí, pro který platí

$$H = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \Rightarrow t = (\sqrt{v_0^2 + 2gH} - v_0)/g, \quad (4)$$

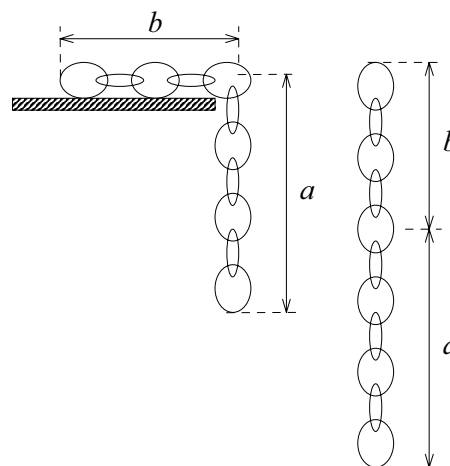
přičemž uvedené řešení je jediný fyzikálně smysluplný (= kladný) kořen rovnice. Po dosazení rovnice (3) do (4) a následné malé úpravě získáme výsledek

$$t = \frac{\sqrt{b(2a + b - f b) + 2H(a+b)} - \sqrt{b(2a + b - f b)}}{\sqrt{g(a+b)}}. \quad (5)$$

Úloha V. 2 ... sportující elektrony (5 bodů)

K řešení se můžeme dobrat pomocí Kirchhoffových zákonů (které se ale, pokud se dobře pamatují, berou až někde ve vyšších ročnících), nebo s pomocí dvou všeobecně známých pouček a Ohmova zákona. Každý ať si vybere, co je jeho srdci bližší.

Nejdřív řešení “bez Kirchhoffových zákonů” (ty uvozovky proto, že tyto poučky jsou přímým důsledkem Kirchhoffových zákonů, i když se dají odvodit pouhou úvahou, jak je demonstrováno níže).

Obr. 48

Pravidlo 1: V sériovém obvodu je proud ve všech částech obvodu stejný a součet napětí na jednotlivých částech obvodu je roven celkovému napětí v obvodu. Proud představuje množství přeneseného náboje za jednotku času. Toto množství musí být přeneseno všemi částmi obvodu, jinak by se někde náboj hromadil, tedy proud je všude stejný. Druhá část pravidla pak plyne z Ohmova zákona.

Pravidlo 2: V paralelním obvodu je napětí na všech větvích stejné a součet proudů v jednotlivých větvích je roven celkovému proudu v obvodu. Dle definice je napětí mezi dvěma body rovno rozdílu potenciálů v těchto bodech, který je stejný, ať jej měříme na kterékoli větvi obvodu. Druhá část pravidla pak plyne z Ohmova zákona.

Nyní k řešení obvodu. Obvod si můžeme překreslit do tvaru jako na obr. 49, z kterého je zřejmé, že kdyby měly ampérmetry nulový odpor, byl by mezi body A a D zkrat a muselo by platit $I_1 = I_2 = 0$.

Napětí mezi body B a C můžeme podle pravidla 2 vyjádřit jako $U_{BC} = R_A I_2$ nebo $U_{BC} = I_1(R_A + R_X)$. Odtud dostáváme:

$$R_A I_2 = I_1(R_A + R_X), \quad (1)$$

$$R_A = R_X \frac{I_1}{I_2 - I_1}. \quad (2)$$

Napětí mezi body A a D můžeme podle pravidla 1 a 2 vyjádřit jako $U_{AD} = R_A I_3$ nebo $U_{AD} = R_A I_2 + R_X(I_1 + I_2)$, z čehož dostaneme:

$$R_A I_3 = R_A I_2 + R_X I_2 + R_X I_1. \quad (3)$$

Dosadíme-li nyní za R_A z rovnice (2), máme

$$R_X \frac{I_1}{I_2 - I_1} (I_3 - I_2) = R_X (I_1 + I_2),$$

$$I_3 = \frac{I_2^2 - I_1^2}{I_1} + I_2 = \frac{I_2^2 + I_1 I_2 - I_1^2}{I_1}. \quad (4)$$

Podle pravidla 1 a 2 vyjádříme celkové napětí

$$U = R_X (I_1 + I_2 + I_3) + R_A I_3. \quad (5)$$

Z této rovnice a z rovnic (2) a (4) vyjádříme R_X

$$U = R_X \left(I_1 + I_2 + \frac{I_2^2 + I_1 I_2 - I_1^2}{I_1} \right) + R_X \frac{I_1}{I_2 - I_1} \cdot \frac{I_2^2 + I_1 I_2 - I_1^2}{I_1},$$

$$R_X = \frac{U I_1 (I_2 - I_1)}{I_2^3 - I_2^2 I_1 + 2 I_2 I_1^2 - 2 I_2 I_1^2 + I_2^2 I_1 + I_2 I_1^2 - I_1^3},$$

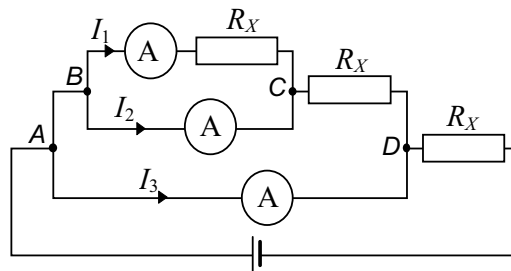
$$R_X = \frac{U I_1 (I_2 - I_1)}{I_2^3 + 2 I_2^2 I_1 - I_2 I_1^2 - I_1^3}.$$

Řešíme-li úlohu pomocí Kirchhoffových zákonů je asi nejvhodnější sestavit rovnice pro smyčky $B-I_1-C-I_2$, $A-B-I_2-C-D-I_3$ a $A-I_3-D$, čímž dostaneme rovnice (1), (3) a (5).

Vnitřní odpor ploché baterie bývá řádově několik ohmů, odpor vodičů je v praxi ještě mnohem menší, a můžeme je tedy zanedbat (i když odvolávání na praxi trochu pokulhává za situace, kdy odpor ampérmetru je 50Ω).

Někteří z řešitelů považovali obvod za paralelní, což podle obr. 49 zřejmě není pravda. Poměrně dost řešitelů si neuvědomilo, že ampérmetry musí mít nějaký odpor, jinak by mezi body A a B byl zkrat, všechen proud by tekla větví 3, a platilo by $I_1 = I_2 = 0$. Někteří si také neuvědomili, že proud je v mA, a pak jim vyšel odpor $0,15 \Omega$.

Obr. 49



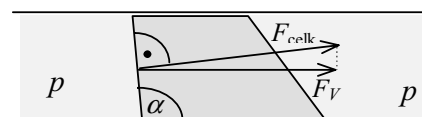
Úloha V . 3 ... ucpaná roura (3 body)

Při řešení této úlohy vyjdeme nejprve z Pascalova zákona. Ten říká, že síla, kterou působí tlak na nějakou plochu je na tuto plochu kolmá a její velikost je rovna pS , kde p je tlak a S je velikost plochy. Levá stěna hranolu má plochu $S_L = S/\sin \alpha$. Velikost síly, která na levou stěnu působí, je tedy $F_{\text{celk}} = pS_L = pS/\sin \alpha$. Tato síla však nepůsobí v ose trubky, a proto ji musíme rozložit na dvě složky – vodorovnou a svislou. Svislá složka nás nebude zajímat, protože pohyb v tomto směru nenastane (nebudeme-li uvažovat destrukci roury). Zato vodorovná složka může zpříčinit pohyb kvádru podél trubice. Jaká je však její velikost? Ze situace na obr. 50 plyne, že velikost vodorovné složky síly je $F_V = F_{\text{celk}} \sin \alpha = (pS/\sin \alpha) \cdot \sin \alpha = pS$. Vidíme tedy, že velikost vodorovné složky síly nezávisí na úhlu α .

Analogický postup můžeme zopakovat pro pravou stranu hranolu. Opět dostaneme $F_V = pS$. Vzhledem k tomu, že tyto složky mají opačnou orientaci, jejich výslednice je tedy nulová a hranol se nemůže pohybovat zrychleně. Jeho zrychlení je tedy nulové.

Jako krásné intuitivní zdůvodnění tohoto výsledku může posloužit trubka se spojenými konci, ve které je umístěn hranol. Ten by se pak pohyboval se zrychlením, a kdybychom jej brzdili, získávali bychom mechanickou práci. Tak by se dalo zkonstruovat perpetuum mobile.

Ale zdaleka nejkurióznější využití případného zrychlování hranolu navrhl jeden z řešitelů ve vojenství. Do trubky na obou koncích otevřené (na obou stranách je atmosférický tlak) se vloží nesymetrický náboj. Vzhledem k tomu, že by se v trubici urychloval (podobně jako náš hranol), dostatečná délka trubice by zajistila dostatečnou rychlost výstřelu. Tak by se dalo bez jakéhokoliv hluku a bez střelného prachu střílet. Bohužel se hranol v trubici urychlovat nebude, a proto se nám asi nepodaří revoluci ve vývoji střelných zbraní vyvolat.

Obr. 50**Úloha V . 4 ... baron Prášil (4 body)**

Úlohu si mírně idealizujeme. Budeme předpokládat, že rychlost dopadu bude nulová (jak snadno zjistíte dosazením do vzorce, je kinetická energie pro rozumnou rychlost výrazně menší než teplo, které koule vydá ochlazením na nulu), dále budeme předpokládat, že se taví led jen takový, který je v přímém styku s koulí, že koule nebude předávat žádné teplo vzduchu, že nedojde k destrukci ledu, že tloušťka ledu bude dost velká na to, aby se koule nepropadla až na dno, a tak podobně. Výsledná hodnota sice příliš přesná nebude, jako horní odhad však poslouží dobře.

Příklad jsme tak zredukovali na obyčejnou kalorimetrickou rovnici. Na jedné straně se ochlazuje koule ze 100 °C na 0 °C , na straně druhé taje led. Tedy $m_k c_k \Delta T = m_l l_t$, kde m_k je hmotnost koule, c_k měrná tepelná kapacita koule, $\Delta T = 100\text{ °C}$, m_l hmotnost roztátého ledu a l_t měrné skupenské teplo tání ledu. Uznávám, že zadány všechny tyto údaje nebyly (ale zase tam byly některé navíc!), což vám však nemělo zabránit v tom, abyste je případně vyhledali v tabulkách. Hmotnosti si rozepíšeme jako součin objemu a hustoty a tak máme

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_k c_k \Delta T = V_l \rho_l l_t \quad (*)$$

Nyní je třeba se zamyslet nad tím, jaký bude objem ledu. Jsou dvě možnosti: buď se koule ponoří méně než do poloviny svého objemu, a pak bude mít jáma vzniklá táním ledu tvar kulového vrchlíku. Nebo se ponoří hlouběji, a pak bude mít jáma tvar válce, na jehož dně bude "přilepena" polokoule. Tedy dosazeno do vzorce to bude vypadat takto:

$$a) \text{ v prvním případě } V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h \right),$$

kde h je hloubka vrcholu koule pod hladinou ledu, tzn. výška kulového vrchlíku, což dosazeno do vzorce (*) dává kubickou rovnici

$$\rho_l l_t h^3 - 3\rho_l l_t h^2 + 4R\rho_k c_k \Delta T = 0.$$

Tu nejlépe vyřešíme pro zadané hodnoty numericky. Tedy jinými slovy, nic dalšího už nebylo potřeba. Pokud jste si našli hodnoty konstant pro olovo a vyřešili s nimi tuto rovnici,

vyšlo $h = 0,97 R$, takže v reálu by to vypadalo tak, že olověná koule by byla v ledu do necelé poloviny.

$$b) \text{ v druhém případě } V = \pi R^2 h + \frac{2}{3} \pi R^3,$$

kde h je hloubka středu koule pod hladinou ledu, tzn. výška onoho válce, což dosazeno do vzorce (*) dává vztah

$$h = \frac{2}{3} R \left(\frac{2\rho_k c_k \Delta T}{\rho_l l_t} - 1 \right).$$

Po dosazení hodnot pro železo dostaneme výsledek $h = 0,89 R$, tedy spodek koule je pod povrchem $1.89R$, takže v reálu se železná koule zaboří do ledu skoro celá.

Co se týče došlých řešení, větší část řešitelů uvažovala pouze jednu z těchto dvou variant. Jak je vidět z dosazených konstant, není rozdělení na případy pustou teorií, skutečně pro dva naprosto běžné materiály se způsob řešení liší. Je také nesmyslné uvažovat nějak výrazněji vliv regelace – styčná plocha koule s ledem je na to příliš velká. Když se postavíte na hladinu zamrzlého rybníka, tak také neklesnete ke dnu vlivem gravitace (ani na bruslích, kde je styčná plocha už docela malá).

Úloha V. 5 ... rotující kyvadýlka (5 bodů)

Po roztočení soustavy na konstantní úhlovou rychlost ω se kuličky vychýlí z rovnovážné polohy na svislé ose (zatím nevíme, zda jde o labilní či stabilní rovnováhu) buď náhodnými fluktuacemi nebo nepatrným šťouchnutím.

Nejlépe soustavu popíšeme v neinerciální soustavě spojené s rotující tyčkou. Tam na kuličku působí síla gravitační, odstředivá a tahová síla vlákna. Rozložíme-li sílu gravitační a odstředivou na složky ve směru vlákna a složky kolmé na něj (viz obr. 51), mají pohybový účinek pouze složky kolmé. Pro velikosti těchto kolmých složek platí

$$F_g^\perp = mg \sin \alpha, F_o^\perp = m\omega^2 l_n \sin \alpha \cos \alpha.$$

Výsledná síla je dána vztahem $F = m \sin \alpha (\omega^2 l_n \cos \alpha - g)$.

Je-li po nepatrném vychýlení kuličky gravitační síla větší než síla odstředivá, tomu odpovídá podmínka (píšeme-li $\cos \alpha \ll 1$, pro velmi malé úhly vychýlení)

$$l_n < \frac{g}{\omega^2}$$

bude se pohybovat kulička zpět k ose a bude kmitat kolem stabilní rovnovážné polohy na této ose. Uvažujeme-li působení odporu vzduchu, ustálí se kulička na této ose.

Je-li naopak gravitační síla menší než odstředivá, bude se dále vychylovat od osy otáčení a bude kmitat kolem rovnovážné polohy dané podmínkou

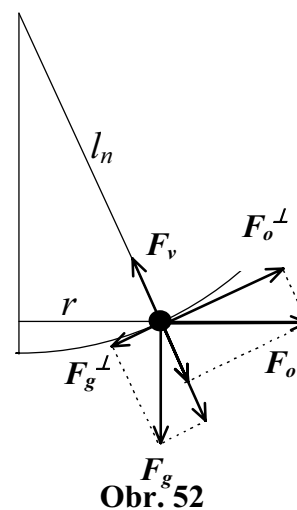
$$\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 l_n}$$

plynoucí z rovnosti gravitační a odstředivé síly. Uvažujeme-li opět odpor vzduchu, ustálí se kulička v rovnovážné poloze a bude se pohybovat po kružnici se středem na ose otáčení. Rovnovážné polohy jsou tedy v konstantní vzdálenosti od vodorovné roviny procházející tyčkou, neboť platí vztah

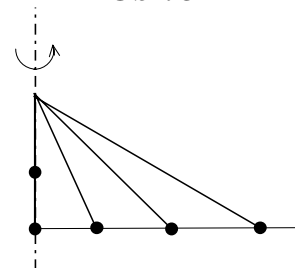
$$h = l \cos \alpha = g/\omega^2$$

Pohled z boku bude po ustálení vypadat jako na obr. 52.

Obr. 51



Obr. 52



Úloha V. 6 ... experimentální úloha z mechu a kapradí (8 bodů)

V této experimentální úloze šlo o to, že jste měli již hotovou “aparaturu” (tj. kapající vodovod) a vaším úkolem bylo odpozorovat vhodné přiblížení, se kterým bylo nutné dále počítat. Řada řešitelů však tento přístup ošidila tím, že prohlásila případ s kohoutkem za nevhodný a počítala si metodu svou. Tak se celkově objevily asi čtyři typy řešení:

1) Nahrazení vodovodu trubičkou (resp. kapilárou) nebo injekční stříkačkou, tím se úloha převedla na jednoduchý případ, poněvadž kapka vznikala na celém průřezu trubičky, jejíž průměr se dal lépe či hůře změřit.

2) Pomocí kapilární elevace. Tato metoda je poměrně přesná, ale s kapajícím vodovodem toho má pramálo společného.

3) Kapková metoda, kdy necháme kapat určitý počet kapek kapaliny známého povrchového napětí a látky neznámého povrchového napětí. Velikosti povrchových napětí obou látek jsou pak v jistém poměru jako jsou hmotnosti “nakapaných látek”. Často se jako kapalina známého povrchového napětí objevoval líh – zřejmě v některých domácnostech teče z kohoutků nejen voda teplá a studená, ale i “ohnivá”.

4) Poslední metodou byla metoda s kapajícím vodovodem. Protože někteří z řešitelů (jak již bylo zmíněno) se buď této metodě vyhnuli nebo řadu věcí možná předpokládali, ale neuvedli, probereme tuto metodu podrobněji.

První částí bylo pozorování tvoření kapek a experimentování se “škrcením” kohoutku. Dá to u některých kohoutků trochu více práce (např. u nových s kulovým ventilem), ale nakonec asi lze dobře docílit pravidelného kapání kapiček o průměru asi 3 až 4 mm. Kapičky se vytvářejí na okraji vodovodu nebo v nejnižším místě sítky perlátoru. To jak se vytvářely kapky přes celý průměr vodovodu (tj. asi 1,5–2 cm) bych docela rád viděl. Pozorováním jednotlivých kapiček si všimneme, že odtrhávající se kapka má tvar jako na obr. 53.

Tlak způsobený zakřivením plochy kapky je $p = 2\sigma/R$ a síla bránící v odtržení kapky je $F_k = p_k S$, kde S je plocha “zaškrcení” kapky, tedy $S = \pi r^2$. Pro F_k pak platí $F_k = 2\pi\sigma r^2/R$. Odtrhávající síla je síla gravitační $F_g = mg$. K odtržení kapky dojde ve chvíli kdy $F_k = F_g$:

$$2\pi\sigma r^2/R = mg = V\rho g, \quad (1)$$

kde ρ je hustota vody.

Požadavkem na kulovitost kapky získáme vztah mezi R a V

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}. \quad (2)$$

Objem V zjistíme pomocí kalibrované skleničky. Necháme ji nakapat “po míru” a tento známý objem V_0 vydělíme počtem kapek k . Pak rovnici (1) lze psát

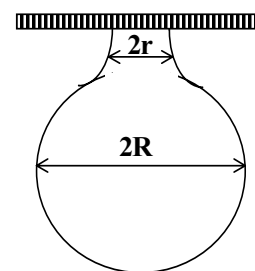
$$\frac{2\pi\sigma r^2}{\sqrt[3]{3V/4\pi}} = \frac{V_0\rho g}{k}. \quad (3)$$

Nyní stále zůstává problém velikosti r . Zde si opět pomůžeme pozorováním. Při mém měření bylo možno říci, že $r \approx R$ (byly i případy kdy $2r \approx R$ – viz nastavení kapání vodovodu). Finální vzorec má pak tvar

$$\sigma = \rho g \cdot \sqrt[3]{\frac{V_0^2}{6\pi^2 k^2}} \quad (4)$$

Vidíme, že nyní σ závisí jen na počtu kapek nakapaných do kalibrované skleničky. Přesnost tohoto měření není vysoká zvláště u odhadu r a nebo při použití zbytečně velké skleničky (mohli jste se v počtu kapiček poměrně dobře seknout). Přesto se hodnota povrchového napětí dala stanovit docela slušně.

Obr. 53



Úloha VI. 1 ... gejzír na betoně (4 body)

Úvaha, která vede k cíli, je předpoklad, že jediná energie, kterou pytlík má, je energie potenciální a ta jediná se může případně měnit v teplo, potřebné na ohřátí vody. Kolik té energie je potřeba, vyplývá z kalorimetrické rovnice $\Delta Q = mc\Delta t + ml_t$, kde někteří z vás neuvažovali člen ml_t , podle toho, jak kdo pochopil zadání. Toto teplo musí být v ideálním případě, kdy se veškerá potenciální energie přemění na teplo dodané vodě v pytlíku přesně rovno potenciální energii. Jde o to, jak ji nejlépe odhadnout. Nejprve to zkusíme podle vztahu $E_p = mgh$. Pak z rovnosti $E = \Delta Q$ dostáváme pro výšku

$$h = \frac{c(t_v - t_0) + l_t}{g},$$

což pro $c = 4,18 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $l_t = 2,26 \text{ MJ.kg}^{-1}$, $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ a teplotu $t_0 = 20^\circ\text{C}$, $t_v = 100^\circ\text{C}$ dává $h = 264 \text{ km}$ (resp. $h = 34,1 \text{ km}$ nechceme-li, aby se voda změnila v páru). Jistě však uznáte, že při takové výšce se může projevit nehomogenita zemského gravitačního pole, a proto by bylo vhodné podívat se na to, jak se to projeví ve vztahu pro výpočet potenciální energie. Pokud považujeme Zemi a pytlík za koule, platí

$$\Delta E_p = -\kappa \frac{Mm}{R_Z + h} - \left(-\kappa \frac{Mm}{R_Z}\right),$$

a tedy
$$h = \frac{R_Z^2 (c\Delta t + l)}{\kappa M - R_Z (c\Delta t + l)};$$

$$h = 275 \text{ km} \text{ či } h = 34,2 \text{ km} \quad (R_Z = 6370 \text{ km}, M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}, \kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}).$$

Vidíme tedy, že tato korekce se projeví významěji při vyšších výškách.

Co se bude dít, pokud započítáme odpor vzduchu? Tím, že se pytlík bude třít o vzduch, bude se zahřívat již před dopadem na zem, a proto dopadne pomaleji než bez odporu vzduchu. Při dopadu však bude mít již vyšší teplotu než na počátku. Ale část jeho potenciální energie se přemění na tepelnou energii vzduchu, který o něj třel, a proto bude třeba pytlík hodit z ještě větší výšky než bez odporu vzduchu. Také je jistě podstatné, že hustota vzduchu se s výškou značně změní.

Úloha VI. 2 ... rtuťová koupel (5 bodů)

V mnohých řešeních se vyskytla chybná domněnka, že uvolněnou energii se myslí rozdíl potenciálních energií rtuťových sloupců před a po ději. Tento rozdíl jste ani nemohli určit, pokud jste – jako mnozí mlčky – nepředpokládali stejnou výšku hladin před uvolněním záklopky. Kupodivu, za zmíněných předpokladů dala tato chybná úvaha správný výsledek. To už se prostě stává.

Někteří se dokonce snažili tvrdit, že je soustava izolovaná, a žádná energie se tedy neuvolňuje. To se dá odbýt snadno faktem, že soustava zřejmě sama nepřejde zpět do původního stavu, a tedy nemůže jít o rovnovážný děj. Práce, kterou koná plyn v nádobě, se zčásti přemění na potenciální energii (a povrchovou energii rtuti, kterou lze do jisté míry chápat také jako potenciální) a zčásti na kinetickou – pohyb rtuťového sloupce, který se dříve nebo později třením zastaví – což je uvažovaná uvolněná energie.

Ukazuje se nám tady ale cesta ke správnému řešení. Množství uvolněné energie je rovno práci, kterou musíme vykonat, abychom dostali systém z konečného do původního stavu. Proti nám působí tlak plynu v nádobě p_n , který je ovšem po celou dobu konstantní (uvažujeme, že změna hladiny v nádobě je mnohem menší než výška vzduchu v nádobě a relativní změna tlaku, úměrná relativní změně objemu, je zanedbatelná). Naopak pomáhá nám konstantní kapilární deprese rtuťového sloupce (tlak p_k) a rozdíl hydrostatických tlaků v trubici a v nádobě $p_h = x\rho g$ (x je rozdíl hladin). Na počátku naší práce jsou ovšem tyto tlaky vyrovnány ($p_{h0} + p_k - p_n = 0$) a během ní se mění pouze výška rtuťového sloupce: rozdíl tlaků, proti kterým musíme působit, snadno určíme jako tuto změnu:

$$\Delta p = -(x - x_0)\rho g.$$

Zároveň se zvyšuje hladina rtuti v nádobě v poměru s/S , což můžeme zanedbat; v opačném případě vynásobíme předchozí výraz faktorem $(1 + s/S)$. Chceme-li určit celkovou práci, musíme pak provést integraci

$$W = \int_{x_0}^{x_0-h} \Delta p s dx = \int_{x_0}^{x_0-h} -(x - x_0) \rho g s \left(1 + \frac{s}{S}\right) dx = \int_0^h x \rho g s \left(1 + \frac{s}{S}\right) dx = \frac{1}{2} h^2 \rho g s \left(1 + \frac{s}{S}\right).$$

Integrace je samozřejmě triviální – pokud vám ovšem přesto tento pojem nic neříká, můžete se spokojit s tím, že za velikost Δp , která roste *lineárně* s x , dosadíte střední hodnotu odpovídající $x = x_0 - h/2$. Dostanete pak stejný výsledek, jako při předchozí integraci.

Můžeme se ještě vrátit k otázce energetické bilance. Při přibližně izobarické expanzi vykoná plyn práci

$$p_n \Delta V = p_n \Delta h S = p_n h s,$$

poslední rovnost je dána zachováním objemu rtuti v soustavě. To vede ke zvýšení potenciální energie rtuti o $sh (x_0 - h/2)(1 + s/S)\rho^{\text{rt}}g$ (je zajímavé, že někteří se domnívali, že právě tato energie je příčinou celého pohybu). Dále působením proti kapilárnímu tlaku se zvýší povrchová energie o $p_k h s$. Zbylý rozdíl, dosadíme-li za $p_n = p_{h0} + p_k$, je pak roven právě výše uvedenému výsledku.

Úloha VI. 3 ... kap, kap (3 body)

Základní problém úlohy byl skryt již v zadání a to ve slovíčku *vypařuje*. Tím jsme mysleli rychlost vypařování, tedy procentní úbytek objemu za čas v závislosti na velikosti kapky. Kdyby nás zajímalo, která kapka se *vypaří* dříve, tak by tam byl právě tento vid dokonavý. Více než polovina řešitelů to pochopila tak, jak jsme chtěli, a tak za tu výrazně jednodušší variantu úlohy jsem dával málo bodů. Řešení by bylo skutečně triviální: než větší kapka zmenší svoji velikost na úroveň té menší, bude to trvat jistý čas. Potom už bude trvat oběma kapkám stejnou dobu, než se zcela vypaří, a tak ta větší kapka bude nad plotnou déle.

Nejprve bych popsal, co se tam vlastně děje. Budu uvažovat kulový tvar kapky. Když dopadá na horkou plotnu, začne se (zejména) na spodní straně intenzivně vypařovat. Tyto páry vytvoří pod ní vzduchový polštář, takže na plotnu nedopadne. Zároveň pára ji i mírně izoluje od výrazně teplejší plotny, takže se hned nevypaří celá. Díky tomuto oblaku páry se celá kapka bude nacházet přibližně ve stejné teplotě (vyšší části kapky budou v menší teplotě, ale to jenom nahrává pomalejšímu vypařování větší kapky). Tedy kapka bude celým svým povrchem přijímat přibližně stejné teplo. Protože ale vzduch je výrazně teplejší než kapka, toto teplo se spotřebuje více na vypaření povrchové vrstvy kapky, než na ohřátí celé kapky na teplotu varu. Mimochodem, teplo potřebné na ohřátí na teplotu varu je stejně možné zanedbat, neboť je celkem výrazně menší, než skupenské teplo varu.

Pusťme se tedy do výpočtu. Větší rychlostí vypařování míníme, že za stejný časový úsek Δt ubude více procent hmoty kapky $\Delta m/m$. Za čas Δt přijme kapka teplo ΔQ , které je úměrné ploše a času,

$$\Delta Q \approx S \Delta t \approx r^2 \Delta t.$$

Toto teplo se využije na vypaření Δm vody,

$$\Delta m = \Delta Q / l_v \approx r^2 \Delta t.$$

Ale hmotnost je úměrná objemu, který je úměrný třetí mocnině poloměru kapky, takže lze psát

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta m}{m} \approx \frac{r^2 \Delta t}{r^3} = \frac{\Delta t}{r}.$$

Z toho plyne, že čím větší poloměr kapky, tím menší je rychlost vypařování.

Je zde sice nějaké to zjednodušení – zejména tedy opomím to, že kapka nejvíce vypařuje na spodní části (tj. na té, která je nejbližší plotně), ale uvědomte si, že tato chyba je taktéž úměrná ploše. Stejně je na tom i to ohřívání celé kapky na teplotu varu (spotřeba tepla opět úměrná objemu).

Ke stejnému závěru vede tato zajímavá úvaha: Nad zakřivenějším povrchem kapaliny je větší tlak nasycených par (na to přijdete tak, že si uvědomíte, co vlastně pojem tlaku nasycených par znamená). Kapka se vypařuje, protože není v rovnováze se svými nasycenými parami a vypařuje se tím rychleji, čím je větší rozdíl mezi tlakem nad povrchem kapky a tlakem nasycených par.

Úloha VI. 4 ... žabák Břet'a (5 bodů)

Problém budeme řešit v rovině kolmé na desku a za předpokladu, že žabák doskočí na opačnou stranu desky vzhledem k těžišti (obr. 54). Díky tomuto předpokladu dodá Břet'a desce pouze hybnost nikoli však moment hybnosti. V opačném případě bychom do pohybu museli započítat rotační pohyb desky kolem osy kolmé na desku se středem v T (obr. 55).

Nyní naši rovinu zavedeme tak, že osa z bude vertikální a osa x ve směru projekce dráhy na desku. Díky zanedbání ponoru se zachovává pouze x -ová složka hybnosti:

$$\begin{aligned} |p_{xz}| &= |p_{xd}|, \quad v_{xz}m + v_{xd}M = 0 \Rightarrow \\ v_{xd} &= v_{xz}m/M, \end{aligned} \quad (1)$$

kde $\mathbf{v}_z = (v_{xz}, 0, v_{zz}) = (v_x, 0, v_z)$ je rychlost žabáka a $\mathbf{v}_d = (v_{dx} = v_d, 0, 0)$ rychlost desky.

Žabák za dobu t urazí vzdálenost $a_1 = v_x t$ a deska $a_2 = v_d t$; chceme, aby žabák dopadl na opačný konec desky: $a_1 + a_2 = a$, kde $a \in \langle l, l\sqrt{2} \rangle$ podle toho, kde na desce se nachází před skokem

$$v_d t + v_x t = a \quad (2)$$

$$\text{Z (1) dosadíme za } v_d: \quad v_x m t / M + v_x t = a \Rightarrow t = \frac{a}{v_x} \left(\frac{M}{m+M} \right) \quad (3)$$

Zanedbáme-li odpor vzduchu, pak se Břet'a pohybuje jako při šikmém vrhu a pro v můžeme psát $v_z = \frac{1}{2}gt$ a po dosazení

$$v_z = \frac{ag}{2v_x} \left(\frac{M}{m+M} \right) \quad (4)$$

Toto je závislost velikosti z -ové složky rychlosti na x -ové. Nyní určíme závislost velikosti rychlosti na úhlu α odrazu vůči hladině vody.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_z}{v_x} = \frac{ag}{2v_x^2} \left(\frac{M}{m+M} \right) \quad (5a)$$

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} \quad (5b)$$

Po dosazení z (5a) a (4) do (5b) získáme

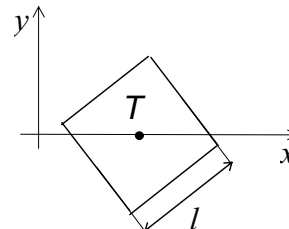
$$|v| = \sqrt{\frac{ag}{\sin 2\alpha} \left(\frac{M}{m+M} \right)} \quad (6)$$

Zde vidíme, že $|v|$ je závislá na jediném parametru. V obecném případě nám přibudou počáteční podmínky – úhel směru odrazu vůči straně desky a vzdálenost od rohu desky.

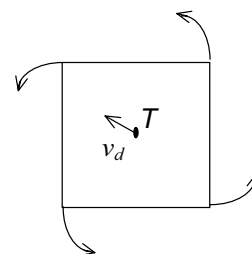
Úloha VI. 5 ... Studentova žárovka (5 bodů)

Studentova žárovka řešitele zaujala. Není se co divit, UFO také člověk nevidí každý den. Jaké tedy mělo být správné řešení? Nevíme. Pokus byl proveden pouze jednou a v nepřítomnosti organizátorů FKS. K dispozici byla pouze výpověď Studenta a dvě fotografie, které jsme se vám snažili zreprodukovat v co možná nejlepší kvalitě. Většina z vás se přiklání k vedení proudu termoemisí nebo výbojem ve zbytkovém plynu žárovky.

Obr. 54



Obr. 55



Nyní fakta:

- a) vzdálenost mezi konci roztrženého vlákna je odhadem 5 mm,
- b) konce přiléhající k vodičím (nosným) drátkům svítí o něco jasněji,
- c) proud tekoucí vláknem je asi 0,2 A (odhad),
- d) v baňce je buď vakuum nebo trocha inertního plynu (dusík, argon).

Co z toho plyne? Výboj v plynu nemohl být doutnavý, ten totiž proud 0,2 A nepřenesl. A výboj, který by přenášel tak velký proud by byl jistě vidět.

Termoemise je silně závislá na teplotě vlákna a na jeho uspořádání. Vlákně žárovky není totiž způsobeno být termoemisní katodou, takže lze počítat s dolní hranicí účinnosti. V knize *Fyzikální elektronika pevných látek* (L. Eckertová, Univerzita Karlova 1992) se na straně 204 píše: "...termoemisní proud wolframových katod je 2-10 mA/W (emisní proud na watt příkonu) a provozní teplota vlákna 2500K". Naše žárovka byla 60 W, tj. pokud uvážíme dolní hranici emisního proudu dostaneme proud 0.12A, což už alespoň řádově souhlasí. Pro hypotézu termoemise navíc hovoří více svítící konce přerušovaného vlákna a fakt, že po delším zhasnutí (2s) se žárovka již nerozsvítila, termoemise je teplotně silně závislý jev. Tedy čistě teoreticky by to možné být mohlo.

Jako nejtriviálnější řešení se nabízí méně fantastičtější možnosti. Drátky mohly být někde zkratovány. Ano, na fotce to sice není vidět, někde se před našimi zraky mohly skrytě spojit zahřáté drátky, po ochladnutí došlo ke kontrakci, a tak k přerušení spojení.

Další hypotézou je, že se na skle při přepálení vlákna napařila tenká vrstvička wolframu, dostatečně silná na to, aby udržela náš proud kolem 100 mA. To je zajímavý problém na fyziku tenkých vrstev. Zajisté jste si někdy povšimnuli, že přepálená žárovka je "začouzená". Toť právě ten wolfram, má však tu nevýhodu, že při napařování tvoří drobné ostrůvky, málo vhodné k vedení proudu. Proto by výboj při přepálení vlákna musel doslova napařit kousek wolframu na sklo mezi podpůrná vlákna, a to z naší fotografie vidět není. Bohužel po delším vypnutí by se napařená vrstva nepřerušila a svítila by dále.

Musím však zdůraznit, že na potvrzení té či oné hypotézy nám chybí fakta. Ve fyzice platí, že **jedno pozorování = žádné pozorování**, pozorovaný jev musí být zkoumatelný a hlavně **opakovatelný**.

Skutečný důvod oné události v časech hluboké totality však už nezjistíme. Pozorujte proto bedlivě své žárovky a žárovky, možná se vám podaří detailněji zachytit stejný případ. A možná přijdete na to, čím to bylo. A pak nám, prosím, dejte vědět.

Úloha VI . 6 ... *hledání jednoho malého bodu* (8 bodů)

Pro určení ohniskové vzdálenosti čočky jste vymysleli celkem šest způsobů. Nějčastěji jste ji měřili metodou přímou (tj. z definice), dalšími variantami byla Abbeova a nebo Besselova metoda. Nepříliš častá byla metoda určování ohniskové vzdálenosti čočky z jejich rozměrů (poloměrů křivostí ploch). Výsledkem posledních dvou metod byly hodnoty, které měly k ohniskové vzdálenosti čočky poněkud daleko.

Nyní k jednotlivým metodám.

1. Metoda přímá

Měříme vzdálenost ohniska od středu čočky. Používáme přitom svazek rovnoběžných paprsků, které se po průchodu čočkou soustředí v ohnisku. Nedostatkem této metody je nutnost měřit vzdálenost ohniska od středu čočky, což pro tlusté čočky způsobuje problémy.

2. Besselova metoda

Pokud umístíme předmět a stínítko na vzdálenost alespoň $4f$ (kde f je ohnisková vzdálenost) od sebe a mezi ně vložíme čočku, existují dvě polohy čočky, kdy je obraz předmětu na stínítku ostrý. Označíme-li vzdálenost poloh čoček Δ a e vzdálenost předmětu a stínítka, pak pro ohniskovou vzdálenost dostaneme $f = (e^2 - \Delta^2)/4e$. Při této metodě odpadá nutnost měřit pozice středu čočky, stačí znát jejich rozdíl. Uvedená metoda je nejpřesnější.

3. Abbeova metoda

Předmět a čočka jsou pevně uchyceny, stínítkem posouváme do té doby, než je obraz předmětu ostrý. Pro ohniskovou vzdálenost čočky platí $f = aa'/(a + a')$, kde a je vzdálenost čočky od předmětu, a' vzdálenost čočky od obrazu. O této metodě platí totéž co o metodě přímé.

4. Geometrická metoda

Spočívá v určení poloměrů křivosti (R_1, R_2) optických ploch. Pokud známe index lomu skla čočky, ohniskovou vzdálenost dopočítáme ze vztahu $1/f = n_{12}(1/R_1 + 1/R_2)$. Poloměry křivosti nedokážeme jednoduchou metodou určit přesněji než s chybou 20%. Index lomu skla většinou neznáme, pohybuje se v rozmezí 1,5 až 1,8. Tato metoda není proto vhodná ani pro orientační měření ohniskové vzdálenosti, mohla by se použít naopak – určit index lomu při známé ohniskové vzdálenosti.

Vzorové vypracování úlohy: Besselova metoda

Teorie: viz výše.

Výsledky měření: Předmět a stínítko jsme umístili do vzdálenosti 100 cm a 110 cm a změřili jsme polohy čočky při ostrém obrazu na stínítku. Naměřená data jsou uvedena v tabulce.

Tab. 2 – Hodnoty měření Δ a e

| | | | | | | | | | |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| e (cm) | 100 | 100 | 100 | 100 | 110 | 110 | 110 | 110 | 110 |
| Δ (cm) | 30,9 | 30,5 | 30,4 | 30,1 | 46,1 | 46,3 | 46,3 | 46,1 | 46,0 |
| f (cm) | 22,61 | 22,67 | 22,69 | 22,73 | 22,67 | 22,63 | 22,63 | 22,67 | 22,69 |

průměrná hodnota ohniskové vzdálenosti22,67 cm

směrodatná odchylka0,03 cm

systematická chyba0,05 cm

celková odchylka0,06 cm

Ohnisková vzdálenost čočky je $(22,67 \pm 0,06)$ cm.

Závěr: Určili jsme ohniskovou vzdálenost čočky $f = (22,67 \pm 0,06)$ cm. Jediným zdrojem nepřesností jsou chyby při měření poloh čočky, stínítka a předmětu. Celkovou odchylku by bylo možno zmenšit jedině použitím optické lavice s přesnějším nastavením pozic. (bylo by možno odečítat vzdálenosti s přesností na 0,1 mm)

Chyby měření

Při každém měření se dopouštíme jisté chyby:

a) chyby hrubé – “ustrhlený” výsledek, chyba, která vznikla z nepozornosti nebo omylu experimentátora. Takové chyby je třeba ze souboru měření vyloučit,

b) chyby náhodné – ovlivnění výsledků “náhodnými” jevy, např. změna polohy oka, změna vlhkosti, proudění vzduchu. Takových jevů je velmi mnoho a jejich vliv je těžko postižitelný, proto chybu můžeme vidět skutečně v náhodě. Při velkém počtu měření (minimálně 10, ale čím víc, tím líp) se dá tato chyba zmírnit,

c) chyby systematické – chyba metody, některé chyby experimentátora (někdo zaokrouhluje výsledek mezi dílky měřidla stále nahoru, někdo stále dolů). **Tyto chyby nelze zmírnit velkým počtem měření**, dají se částečně omezit používáním různých metod měření, tím, že měření provede více lidí apod.

Vzhledem k tomu, že teorie zpracovávání chyb je poměrně složitá uvádíme zde pouze návod, jak zpracovat výsledky měření, koho zajímá, jak se k těmto vzorcům došlo, necht' si přečte příslušné kapitoly v [1], [2].

Následující lze použít pouze pro dostatečný počet měření (10 a více) a týká se pouze chyb náhodných (chybu systematickou nelze snížit velkým počtem měření)!!!

1. Určíme střední hodnotu (aritmetický průměr) z naměřených výsledků:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

a standartní odchylku (= směrodatnou odchylku jednoho měření)

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}.$$

2. Vyloučíme hrubé chyby. Zpravidla se užívá tzv. 3s-kritérium, to jest vyloučíme naměřené hodnoty, které se odchylní od průměru o více jak 3s.

3. Určíme směrodatnou odchylku aritmetického průměru

$$s(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2},$$

kde N je počet naměřených hodnot po vyloučení hrubých chyb.

4. Chybu zaokrouhlíme na jedno platné místo. Střední hodnotu zaokrouhlíme na číslici stejného řádu jako nejnižší platné místo chyby.

Výsledek pak uvádíme ve tvaru: $x = \bar{x} \pm (3 \cdot s(\bar{x}) + \text{chyba systematická})$

Pro zjednodušení se někdy místo směrodatné odchylky počítá tzv. průměrná odchylka $\Delta x'$ (rozdíl mezi nimi se výrazněji projeví až při velmi vysokém počtu měření):

$$\Delta x' = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{N}.$$

Lineární regrese

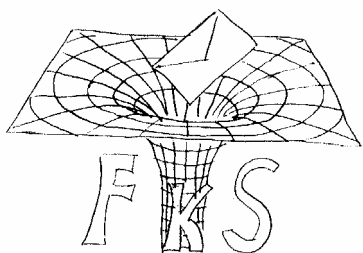
Snažíme se co nejlépe proložit hodnoty přímkou s rovnicí $y = ax + b$:

Platí: (ve všech sumách se sčítá pro i od 1 do N ; N je počet naměřených hodnot)

$$a = \frac{N \sum (x_i y_i) - \sum x_i \sum y_i}{N \sum (x_i^2) - (\sum x_i)^2}, \quad b = \frac{\sum y_i \sum (x_i^2) - \sum x_i \sum (x_i y_i)}{N \sum (x_i^2) - (\sum x_i)^2},$$

kde x_i a y_i jsou jednotlivé naměřené hodnoty.

Soutěž o Logo FKS

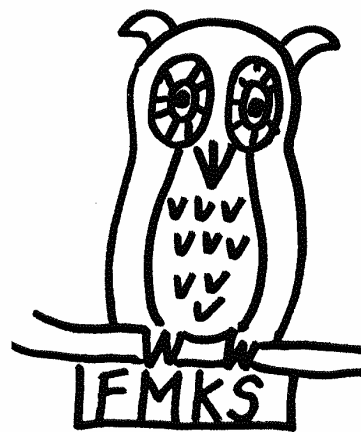
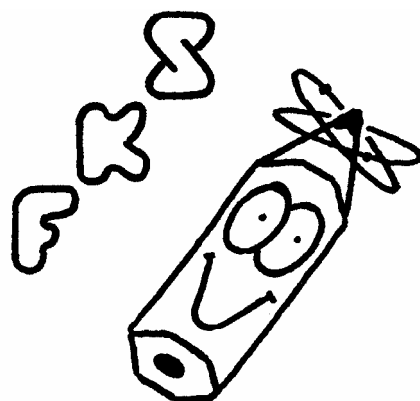


Ve druhé sérii tohoto ročníku jsme vyhlásili soutěž o nejlepší návrh na logo FKS. Sesypala se tak na nás spousta zajímavých námětů, návrhů a nápadů, ty nejlepší z nich (samozřejmě kromě vítězných obrázků) zdobí i tuto stránku. Logo semiáře se skládá z oficiálního znaku FKS a z jakéhosi maskota, který uvádí jednotlivé části serií.

Mnohé z návrhů byly velice inspirující, bohužel grafické zpracování nebylo vždy vyhovující (mám tím na mysli, že obrázky byly příliš kontrastní, obsahovali mnoho podrobností apod.). Abychom byli v hodnocení soutěže pokud možno objektivní, bodovalo návrhy asi deset organizátorů a výsledné počty bodů pak byly pouhým aritmetickým průměrem.

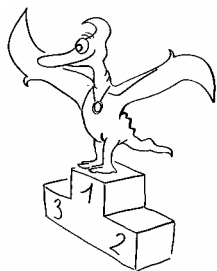
A nakonec dva řešitelé vyšli ze soutěže vítězně: autorem znaku je *Svatava Vyvialová*, která svým návrhem nejlépe splnila naše představy o tom, jak by oficiální znak měl vypadat; s myšlenkou pterodaktyla potýkajícího s nejrůznějšími nástrahami v životě fyzika přišel *Matouš Jiráček*. Pterodaktyl FKS pak uvádí zadání a řešení úloh a vůbec obšťastňuje svými kousky čtenáře každé série i této publikace.

Všem účastníkům soutěže moc děkujeme, snad se při kreslení obrázků bavili alespoň tak, jako my při jejich prohlížení.



Literatura

- [1] Jar. Brož a kol. – *Základy fyzikálních měření*, SPN, kapitola *Chyby měření*;
- [2] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands – *Feynmanove přednášky z fyziky*, Alfa Bratislava, 1986, kapitola *Pravděpodobnost*.
- [3] R. Bakule – *Základy molekulové fyziky a termiky*, SPN, Praha 1988



Pořadí nejlepších řešitelů

Kategorie čtvrtých ročníků

| | Jméno | Příjmení | Třída | Škola | Body |
|---------|----------------|--------------|-------|---------------------------|-------------|
| | <i>Student</i> | <i>Pilný</i> | | <i>MFF UK</i> | 204 |
| 1 | Dalibor | Šmíd | 4.A | Gymnázium Plzeň | 152 |
| 2 | Matouš | Jiráek | 4.A | Gymnázium Říčany | 150 |
| 3 | Daniel | Král | 4.? | Gymnázium Zlín | 148 |
| 4 | Martin | Černý | 4.A | Gymnázium Žďár n. Sázavou | 135 |
| 5 | Jakub | Machek | 4.A | Gymnázium Žďár n. Sázavou | 129 |
| 6 | Jan | Foretník | 4.A | 0 USA | 121 |
| 7 | Jiří | Šplíchal | 4.A | Gymnázium Liberec | 114 |
| 8 | Lukáš | Šmahel | 4.A | Gymnázium Plzeň | 106 |
| 9 | Jiří | Franta | 4.A | Gymnázium Příbram | 96,5 |
| 10 - 12 | Pavel | Bubák | 4.A | Gymnázium Brno | 89 |
| 10 - 12 | Jana | Gřondilová | 4.A | Gymnázium Hradec Králové | 89 |
| 10 - 12 | Martin | Hadrávek | 4.A | Gymnázium Č. Budějovice | 89 |
| 13 | Rudolf | Sýkora | 4.A | Gymnázium Olomouc | 82 |
| 14 - 15 | Michal | Kolář | 4.C | 0 Praha 6 | 74,5 |
| 14 - 15 | Jakub | Slovan | 4.A | Gymnázium Plzeň | 74,5 |

Kategorie třetích ročníků

| | Jméno | Příjmení | Třída | Škola | Body |
|---------|----------------|--------------|-------|---------------------------|------------|
| | <i>Student</i> | <i>Pilný</i> | | <i>MFF UK</i> | 204 |
| 1 | Tomáš | Brauner | 3.B | Gymnázium Mor. Krumlov | 185 |
| 2 | Vlastimil | Kulda | 3.A | Gymnázium Plzeň | 167 |
| 3 | Milan | Orlita | sexta | Gymnázium Uh. Hradiště | 163 |
| 4 | Jiří | Houška | 3.A | Gymnázium Plzeň | 154 |
| 5 | Jiří | Roubínek | 3.A | Gymnázium Žďár n. Sázavou | 145 |
| 6 | Přemysl | Kolorenč | sexta | Gymnázium Nová Paka | 139 |
| 7 | Miroslav | Šimurda | sexta | Gymnázium Karlovy Vary | 135 |
| 8 | Dalibor | Vašek | 3.A | Gymnázium Bílovec | 134 |
| 9 | Jiří | Libra | sexta | Gymnázium Žďár n. Sázavou | 129 |
| 10 | Radomír | Budínek | sexta | Gymnázium Hodonín | 127 |
| 11 | Aleš | Přívětivý | sexta | Gymnázium Pardubice | 124 |
| 12 | Martin | Cibula | 3.? | Gymnázium Brno | 123 |
| 13 - 14 | Vlastimil | Křápek | 3.C | Gymnázium Brno | 121 |
| 13 - 14 | Michal | Šanca | 3.A | Gymnázium Brno | 121 |
| 15 | Oldřich | Novotný | 3.A | Gymnázium Žďár n. Sázavou | 120 |

Kategorie druhých ročníků

| | Jméno | Příjmení | Třída | Škola | Body |
|----|----------------|-----------------|--------------|---------------------------|-------------|
| | <i>Student</i> | <i>Pilný</i> | ☉.☾ | <i>MFF UK</i> | 204 |
| 1 | Roman | Lukáš | kvinta | Gymnázium Prostějov | 125 |
| 2 | Pavel | Stránský | 2.C | Gymnázium PRAHA 6 | 96,5 |
| 3 | Štěpánka | Kučková | 2.E | Gymnázium Praha 6 | 92 |
| 4 | Ondřej | Pejchal | 2.B | Gymnázium Brno | 90 |
| 5 | Jan | Grék | 2.? | Gymnázium Rožnov p. Rad. | 86,5 |
| 6 | Tomáš | Kubař | 2.B | Gymnázium Domažlice | 80,5 |
| 7 | Miroslav | Kulha | kvinta | Gymnázium Rumburk | 71,5 |
| 8 | Karel | Kolář | kvinta | Gymnázium Sušice | 70 |
| 9 | Jaroslav | Hopp | kvinta | Gymnázium Kyjov | 66 |
| 10 | Martin | Kempa | kvinta | Gymnázium Uh. Hradiště | 64,5 |
| 11 | Miroslav | Staněk | 2.B | Gymnázium Ústí nad Labem | 63,5 |
| 12 | Jiří | Štěpán | 2.B | Gymnázium Praha 5 Radotín | 60 |
| 13 | David | Hosnedl | 2.A | Gymnázium Klatovy | 53,5 |
| 14 | Tomáš | Tichý | 2.C | Gymnázium Zlín | 50 |

Kategorie prvních ročníků

| | Jméno | Příjmení | Třída | Škola | Body |
|-------|----------------|-----------------|--------------|---------------------|-------------|
| | <i>Student</i> | <i>Pilný</i> | ☰.☼ | <i>MFF UK</i> | 204 |
| 1 | Karel | Honzl | 1.? | Gymnázium Podbořany | 60 |
| 2 | Hana | Koudelková | 1.B | 0 Praha 6 | 38,5 |
| 3 | Martin | Fabián | 1.D | Gymnázium Brno | 22,5 |
| 4 | Jan | Hanák | kvarta | Gymnázium Slaný | 14,5 |
| 5 - 6 | Petra | Habrovanská | 1.B | Gymnázium Svitavy | 13,5 |
| 5 - 6 | Františka | Jeníčková | 1.? | | 13,5 |
| 7 - 8 | Vlastimil | Kubíček | kvarta | Gymnázium Beroun | 12,5 |
| 7 - 8 | Karel | Wirth | kvarta | Gymnázium Klatovy | 12,5 |
| 9 | Tomáš | Hora | kvarta | Gymnázium Slaný | 11,5 |
| 10 | David | Holec | 1.A | Gymnázium Brno | 10,5 |
| 11 | Libor | Leníček | 1.F | Gymnázium Praha 8 | 10 |

Obsah

| | |
|----------------------------------|----|
| Úvod | 3 |
| Zadání úloh | 4 |
| Seriál na pokračování | 13 |
| Řešení úloh | 24 |
| Dodatky | 66 |
| Literatura | 67 |
| Pořadí nejlepších řešitelů | 68 |
| Obsah | 70 |

MIROSLAV BELÁŇ A KOLEKTIV

Fyzikální korespondeční seminář

IX. ročník – 1995/96

Autoři a opravující úloh:

David Stanovský (II.4, III.5, IV.2, V.4, VI.3), Jan Hradil (I.1, IV.4, V.3, VI.1),
Michal Fabinger (I.2, II.2, III.2), Jan Mocek (II.1, III.1, IV.6),
Martin Krsek (I.6, II.6, V.2), Karel Houfěk (I.5, IV.5, V.5),
Jaroslav Hamrle (III.4, IV.3), Marcel Fuciman (III.3, VI.4), Michal Hvězda (I.3),
Marta Bednářová (I.6), Petr Koňas (II.6), Andrea Budovičová (III.6),
Lubomír Zrnečko (II.3), Jan Rychtář (II.5), Jindřich Koloreň (V.1),
Miroslav Panoš (V.6), Stanislav Daniš (VI.5), Vladimír Slavík (VI.6),
Tomáš Sýkora (I.4), Miroslav Beláň (IV.1), Filip Münz (VI.2)

Seriál na pokračování: Michal Hvězda

Dodatky: Martin Krsek

Předmluva: Miroslav Beláň

Vydal **MATFYZPRESS**

vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty

University Karlovy

Ke Karlovu 3, 121 16 Praha2

jako svoji 17. publikaci.

Praha 1996

Vytisklo Reprografické středisko MFF UK

Malostranské nám. 25, 118 00 Praha 1

72 stran, 55 obrázků, 2 grafy

Sazba písmem Times New Roman CE

Vysázeno programem Microsoft Word 6.0

Vydání první

Náklad 600 výtisků

ISBN-80-85863-07-3