

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
UNIVERZITY KARLOVY
V PRAZE



Fyzikální korespondenční seminář
VIII. ročník
1994/95



MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
UNIVERZITY KARLOVY
V PRAZE

**Fyzikální
korespondenční
seminář**

VIII. ročník

1994/95

Lektoroval: Michal Fabinger

© **Mirek Beláň, Filip Münz, 1995**

© **MATFYZPRESS**

Úvod

Fyzikální korespondenční seminář (dále jen FKS), jehož osmý ročník se Vám dostává do rukou, patří tradičně k nejvýznamnějším fyzikálním aktivitám pořádaným MFF UK pro studenty středních škol. Řešením úloh FKS získají středoškoláci praxi v řešení fyzikálních problémů a zároveň hlubší náhled na jejich podstatu. Narozdíl od aktivit typu Fyzikální olympiády se organizátoři FKS soustřeďují především na rozvíjení fyzikálního myšlení, bez kterého je nemožné řešit fyzikální problémy tak, aby řešení měla reálný vztah ke světu. Proto úlohy FKS svou obtížností vysoko přesahují rámec základního středoškolského vzdělání, a tedy i požadavky při přijímacím řízení na fyzikální směry vysokých škol, MFF UK z toho nevyjímaje. Najdou se i úlohy, se kterými mají samotní studenti či učitelé na MFF UK problémy, což dokazuje to, že není jednoduché bádát nad problémy, které před nás příroda staví. To však neznamená, že to nemá smysl. Naopak!

Jak tedy funguje FKS? Šestkrát do roka dostanou řešitelé (a případní další zájemci, např. učitelé fyziky) zadání obsahující pět úloh a navíc jednu či dvě úlohy *Seriálu na pokračování* (SNP). (Úlohy jsou značeny římskou číslicí série a samotným pořadovým číslem v sérii, např. úloha III . 4 značí čtvrtou úlohu třetí série.) Po asi měsíci zašlou řešitelé svá řešení (nápady, postřehy) problémů, kterými se zabývali. Se zadáním dalších sérií dostanou zpět svá okomentovaná řešení a vzorová řešení opravených úloh. Úlohy jsou obodovány různým počtem bodů (podle obtížnosti) a podle počtu dosažených bodů sestavíme pořadí řešitelů, které posíláme spolu s další sérií.

Pro nejúspěšnější řešitele pořádáme dvakrát do roka týdenní soustředění v nějakém krásném zákoutí naší vlasti a na vítěze celého ročníku čeká zajímavá (fyzikální) cena. Rovněž řešitelům rozesíláme informace o možnostech studia fyziky, nejruznější nabídky fyzikálních aktivit (např. Univerzita mládeže, Kroužek fyziky), prostě cokoli fyzikálně podnětného dáváme dle svých možností navědomí. Na druhou stranu si uvědomujeme, že středoškolská výuka fyziky je vždy primární, a tak se snažíme spolupracovat i s učiteli fyziky. Tato publikace může sloužit jako zásobárna zajímavých fyzikálních problémů, vzhledem k obtížnosti úloh může napomoci udržovat čtenáře ve „fyzikální kondici“, *Seriál na pokračování* se snaží vhodně přiblížit téma, které je stále ještě v české literatuře těžko dostupné. A přitom je vše psáno středoškolsky přístupnou fyzikální řečí.

Náš korespondenční seminář není ojedinelou aktivitou takového druhu ve střední Evropě, existují korespondenční semináře matematiky a programování při MFF UK, FKS má své fyzikální příbuzné v Brně, Bratislavě a Košicích. Rozhodně si však nekonkurujeme, právě naopak – každý seminář nabízí trochu něco jiného, řešitelé si mohou vybrat z bohaté nabídky úloh a jsou i tací nadšenci, kteří úspěšně řeší několik seminářů najednou.

Velice rádi odpovíme na jakékoliv dotazy týkající se studia fyziky i samotných fyzikálních problémů, a to nejenom našim řešitelům. Jakýkoliv fyzikální nápad či problém, jakákoliv iniciativita či nabídka ke spolupráci je vítána na adrese:

FKS

KTF MFF UK

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

e-mail: munz@hp03.troja.mff.cuni.cz

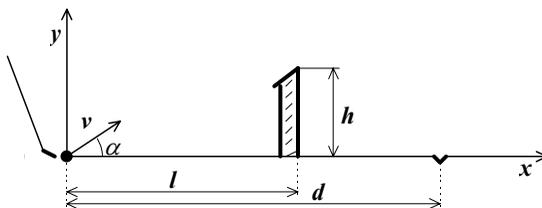
tel.: (02) 8576 2493 (sekretariát KTF)

Zadání

Úloha I. 1 ... *golf*

Hráč golfu řeší obtížný úkol. Musí se trefit do jamky ve vzdálenosti d a přitom přestřelit překážku výšky h . Překážka překáží ve vzdálenosti l (viz obr. 1). Jakou rychlostí v a pod jakým úhlem α musí ten nešťastník odpálit míček? Jak se změní řešení, stojí-li před hráčem překážka, jejíž přední strana je ve vzdálenosti l_1 a zadní v l_2 ?

Obr. 1



Úloha I. 2 ... *Mňága a Žďorop*

Mňága vyjíždí na kole rychlostí $15 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ z Postoloprta po přímé silnici do Kožuchova v osm hodin ráno a za jeho uchem se v tu chvíli probouzí pilná včela Žofka. Současně z cílové visky vzdálené 40 km jim naproti startuje Žďorop a nasazuje tempo $25 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Do okamžiku, než se oba potkají, musí Žofka, která je přeci jen **dvakrát** rychlejší než Mňága, plnit úkol spojovatelky – donese zprávu od Mňágy k Žďoropovi, otočí se a letí zpět. Kolik kilometrů takto nalétá do okamžiku setkání obou cyklistů, pokud

- je bezvětří,
- vane vítr od Kožuchova (podél silnice) o rychlosti $10 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$,
- vane vítr kolmo na silnici o stejné rychlosti $10 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$?

Úloha I. 3 ... *disky*

Franta vytáhl z vodní lázně dva stejné skleněné disky o průměru 10 cm a tloušťce 4 cm a přiložil je k sobě (souose) jejich zcela vyhlazenými podstavami. Mezi disky zůstala souvislá vrstvička vody o tloušťce $0,5 \text{ mm}$. Odhadněte (alespoň řádově) velikost síly, jakou musí vynaložit na odtržení disků od sebe, působí-li kolmo na jejich podstavu.

Poté disky osušil a znovu přiložil k sobě, přičemž k jejich dokonalému přilnutí mezi ně vložil list tenkého hedvábného papíru. Jakou silou je (řádově) třeba působit nyní?

Úloha I. 4 ... *setrvačnost*

V autobuse (jede z pouti a má zavřené nejen dveře, ale i okna) stojí cestující a drží na provázku svůj balónek plný helia. Autobus, který původně stál v klidu, se rozjíždí. Co se stane s balónkem? (Cestující je pevně spojen s autobusem, tj. dobře se drží.) Jakým směrem se balónek pohne? Vysvětlete souvislost se setrvačnou silou! Můžete si to také vyzkoušet.

Úloha I. 5 ... *bungee-jumping*

Zajisté jste slyšeli o novém druhu zábavy lidí, kteří si potřebují dokázat, jak (ne)snadné je překonat vlastní strach. Z vlastní vůle skočit z výšky třeba 50 m přivázan jen za nohy, není to lákavé? Vaším úkolem pro tentokrát bude laboratorně zkoumat dynamiku tohoto nového sportu (kdy se asi dostane do olympijských her?) a na základě pokusů domácíky provedených učinit závěry z toho plynoucí pro člověka přivázaného na takovém laně.

Nejprve si obstaráte kus gumy přiměřené délky. Pak si zajistíte vhodný držák a několik závaží, která budete pouštět z místa držáku, a můžete začít měřit:

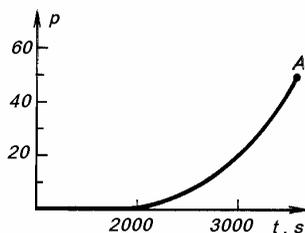
- závislost maximální hloubky h , do níž se závaží hmotnosti m klesne, na délce gumy l ,
- závislost hloubky h na hmotnosti závaží m pro dvě různé délky gumy l_1 a l_2 . Pozor abyste nepřekročili kritické hodnoty materiálu (viz následující bod)!
- jaká je kritická hmotnost m_k závaží, při němž se guma délky l přetrhne (tento úkol předpokládá, že máte dost experimentálního materiálu a máte též vhodnou gumu – zachováva pružné vlastnosti až do okamžiku přetržení).

Zkuste provést teoretický rozbor situace a podle něj převést vaše výsledky do lidských měřítek. Jakou gumu (z vašeho materiálu) byste doporučili člověku skákajícímu z výšky l ? Pro člověka visícího na takovém laně má značný význam maximální zrychlení na něj působící po čas letu. Pokuste se toto zrychlení určit na základě změřených výsledků.

Úloha II . 1 ... přistání kosmické sondy

Přistávací modul kosmické lodi se přibližuje k povrchu planety s konstantní rychlostí, přičemž předává na kosmickou loď údaje o tlaku atmosféry. Graf závislosti tlaku na čase je na obr. 2. Při přistání planety modul naměřil teplotu $T = 700$ K a tíhové zrychlení $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Určete rychlost v , kterou modul přistává, víte-li, že se atmosféra skládá z oxidu uhličitého. Určete teplotu T_h ve výšce $h = 12$ km nad povrchem planety.

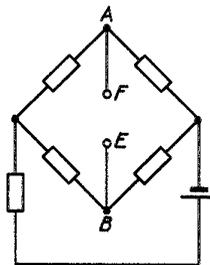
Obr. 2



Úloha II . 2 ... schémátka

Mezi body E a F schématu zobrazeného na obr. 3 je nejprve zapojen ideální voltmetr a poté ideální ampérmetr. Jejich údaje jsou rovny U_0 a I_0 . Určete velikost proudu I , který bude téci rezistorem R zapojeným mezi body E, F .

Obr. 3



Úloha II . 3 ... nehoda ve vakuu

Dva kosmonauti se nacházejí v otevřeném mezihvězdném prostoru. Neočekávaně dojde k přetržení přívodní hadice u jednoho z nich a následně k úniku veškerého vzduchu ze skafandru. Jeho přítel duchaplně připojí ventil ze svého skafandru na utržený konec hadice. Jenže ouha! Hadice je ucpaná a ke zprůchodnění trubice je třeba přetlaku Aleno 1,1 atm. Přitom standardní tlak udržovaný přístroji ve skafandru je roven 1 atm. Rozhodnou se k následujícímu kroku: Vypnou přívod vzduchu nepoškozeného skafandru a společně se vystaví velmi intenzivnímu záření blízké hvězdy, čímž se jejich teplota zvýší z původních 27°C na 107°C . Po vyrovnání tlaku rozpojí hadice a rychle se vrátí do stínu solárního článku, kde jejich teplota klesne k normálu. Jakého tlaku dosáhnou touto operací v poškozeném skafandru?

Pozn.: Komu se zdá tato příhoda příliš fantastická nebo málo vědecká, může stejnou úlohu počítat pro dvě identické nádoby spojené hadicí s jednosměrně propustnou klapkou.

Úloha II . 4 ... pavouk a moucha

Na povrchu skleněné koule je pavouk a moucha. Kde musí být moucha, aby ji pavouk uviděl? Počítejte s tím, že koule je větší než pavouk a moucha (dohromady), přičemž mnohokrát. Index lomu pro sklo je **1,43**.

Úloha II . 5 ... problém liftboye

Liftboy v mrakodrapu jsa perfekcionista si pověsil na stěnu svého výtahu přesné kyvadlové hodiny, aby viděl, kdy mu končí pracovní doba. Doba pohybu výtahu se zrychlením vzhůru a dolů je stejná. Zrychlení taktéž. Co myslíte, bude mít chlapec pracovní dobu delší, kratší nebo stejnou?

Úloha III . 1 ... zasněžená

Malý Bobeš přitáhl pod kopec sáňky. Hledí na jeho vrchol, který je o h metrů výše než on a vzdálený (vodorovně) l metrů. Těžké sáňky o hmotnosti m drhnou na čerstvém sněhu s koeficientem tření f . Přemýšlí, při jakém tvaru svahu by se dostal nahoru s vynaložením nejmenší práce. Co mu poradíte (dřív než tam zmrzne, filozof jeden)? Zkuste tuto práci pro zvolený tvar svahu také vypočítat.

Úloha III . 2 ... kostka

Nalezňte tvar čela vlny na hladině rybníka, do něhož jsme vhodili pravidelný hexaedr (tj. šestistěn, pro neznalé krychle) o hraně a tak, že dopadla na hladinu jednou svou stěnou. Jak bude tato vlnoplocha vypadat ve vzdálenosti r C a ?

Úloha III . 3 ... polytropa na zahřátí

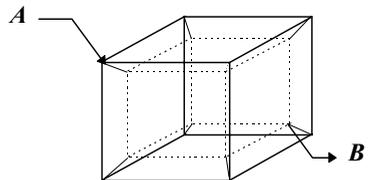
Pod pojmem polytropický rozumíme v termodynamice proces charakterizovaný rovnicí $pV^\alpha = \text{konst.}$, kde α je daný parametr. Pro vhodné α dostáváme např. izobarický ($\alpha = 0$), izotermický ($\alpha = 1$) nebo izochorický ($\alpha = \infty$) děj.

Mějme nejjednodušší případ ideálního jednoatomového plynu. Při jakém polytropickém ději (tj. pro jakou hodnotu α) se v něm zachovává

- počet srážek atomů v jednotce objemu,
- celkový počet srážek?

Úloha III . 4 ... odpor 4-rozměrné krychle

Představte si krychli ve čtyřrozměrném prostoru, jejíž hrany jsou tvořeny odpory R (pomůckou nechť vám je obr. 4, který zachycuje ekvivalentní zapojení ve třech dimenzích znázorněné na dvou-rozměrném papíře). Vaším úkolem je spočítat výsledný odpor mezi body na tělesové úhlopříčce (mezi levým horním předním vnějším rohem – na obrázku bod A – a pravým dolním zadním vnitřním rohem – bod B). Zdá-li se vám to příliš snadné, pokuste se zobecnit výsledek pro libovolnou hodnotu dimenze n (a případně určete k jaké hodnotě se jejich odpor blíží pro n rostoucí k ∞).

Obr. 4

Úloha III . 5 ... grant strýčka Skrblíka

Vaším milovaným strýčkem vám byl zadán úkol zjistit, zda jeho památeční rodinná lžička jest skutečně z ryzího hliníku. Vaše experimentální vybavení je však poněkud skromné: kromě uvedené lžice dostanete k dispozici závaží o známé hmotnosti, dlouhé pravítko, provázek a dva hřebíky, které můžete zatlouct do zárubně dveří. Navíc zde ještě stojí kbelík plný vody. Navrhnete, výpočty podložíte a hlavně provedte měření, při kterém co nejpřesněji s pomocí jmenovaných pomůcek určíte hustotu materiálu lžičky. Uskutečnete dostatečné množství měření a na základě alespoň nějakých kalkulací také odhadnete věrohodnost vámi obdrženého výsledku.

Nápověda: Pokuste se srovnat hmotnost lžice a závaží zavěšováním na provázek, který jste (s mírným průvisem) natáhli mezi zárubní dveří.

Úloha IV . 1 ... částice v magnetickém poli

Nabitá částice vstupuje do prostředí, ve kterém na ni působí odporová síla. Směr této síly je opačný, než je směr rychlosti částice, a její velikost je rychlosti přímo úměrná. Než se částice zastaví, urazí v prostředí dráhu $l_1 = 10$ cm. Je-li v prostředí navíc homogenní magnetické pole kolmé na směr rychlosti částice, pak se částice zastaví ve vzdálenosti $l_2 = 6$ cm od místa, kde do prostředí vstoupila. V jaké vzdálenosti l_3 od místa vstupu do prostředí se částice zastaví, když bude magnetické pole dvakrát menší?

Úloha IV . 2 ... jak asi táhne komín?

Vertikální roura výšky $h = 1$ m s plochou podstavy $S = 50$ cm² je z obou stran otevřená. V dolní části roury se nachází ohříváč o výkonu $N = 100$ W. Jaká bude rychlost proudění vzduchu v troubě? Lze předpokládat, že veškerý tepelný výkon ohříváče se spotřebuje na ohřátí vzduchu. Atmosférický tlak je $p_0 = 100$ kPa, teplota okolního vzduchu $t = 20^\circ\text{C}$. Molární tepelná kapacita vzduchu při konstantním objemu je $C_V = 2,5R$, kde R je plynová konstanta.

Úloha IV . 3 ... smyčky

V magnetickém poli jsme v rovině kolmé na směr magnetické indukce umístili smyčky následujících tvarů, jak je vidět na obr. 5, zhotovené z tenkého odporového drátu. Intenzita pole začne klesat konstantní rychlostí. Jaké proudy potečou v jednotlivých částech smyček?

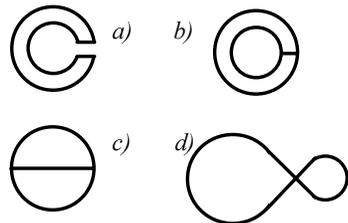
Úloha IV . 4 ... válec kontra zeď

Dřevěný válec o poloměru R a hmotnosti m se valil po podlaze rychlostí v do okamžiku, kdy se zarazil o zeď. O jaký úhel se ještě válec pootočí, než se úplně zastaví (viz obr. 6)? Koeficient tření mezi válcem a stěnou, resp. podlahou je μ .

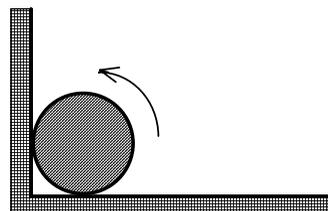
Úloha IV . 5 ... sférická vada čočky

Spojná čočka má mít tu vlastnost, že svazek paprsků jdoucích z nekonečna rovnoběžně s osou, se zobrazí do jednoho ohniska. Tak je tomu jen v ideálním případě paprsků jdoucích blízko osy.

Obr. 5



Obr. 6



Uvažujte reálnou čočku s jedním povrchem rovinným a jedním kulovým o poloměru R , její průměr jest D . V jakém bodě se protnou paprsky dopadající rovnoběžně s osou právě ve vzdálenosti x od osy? Jak velká je oblast těchto bodů na ose čočky? Řešte pro světlo dopadající ze zakulacené strany, případně i pro opačné nasměrování čočky.

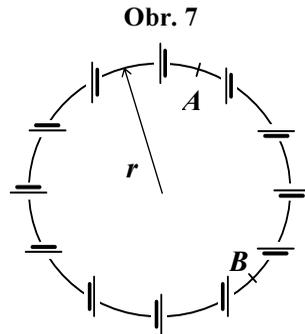
Úloha V. 1 ... vesmírná katastrofa

Tři planety o stejné hmotnosti $M = 10^{26}$ g jsou umístěny ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka o straně $l = 100$ Gm [gigametry]. Jelikož nemají počáteční rychlosti, nezbyvá jim než padat vstříc jisté záhubě. Určete, za jak dlouho se srazí (rozměry planetek zanedbejte vzhledem k jejich vzájemným vzdálenostem).

Úloha V. 2 ... obvod ze zdrojů

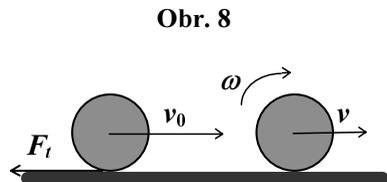
Mějme velmi jednoduchý obvod složený z n stejných ideálních zdrojů o napětí U_e sériově zapojených do kruhu o poloměru r . Dráty je spojující mají stejnou délku a měrný odpor ρ na jednotku délky (rozměry zdrojů zanedbejte vůči obvodu kružnice). Jaké bude napětí mezi bodem A uprostřed prvního a B uprostřed k -tého drátu?

Na obr. 7 je nakresleno zapojení konkrétně pro $n = 12$ a $k = 5$.



Úloha V. 3 ... Ondrova stavebnice

Malý Ondra je na svůj věk velice zvidavý chlapec a místo hraní si s autíčky studuje takřka fyzikálně svět. Ve své stavebnici našel dřevěnou kouli a válec o stejném průměru i ze stejného materiálu a jal se dělat pokusy. Vrhnuv kouli a válec (bez roztočení, viz obr. 8) rychlostí v_0 po podlaze a sledoval, na jaké rychlosti v se pohyb těles ustálí. Byl velice překvapen, když zjistil, že jedno z těles je rychlejší než druhé. Rozeberte teoreticky jeho „experimentální“ zjištění a určete konečné rychlosti těles. (Uvažujte pouze smykové tření s koeficientem μ , valivé tření zanedbejte.)



Úloha V. 4 ... kolik máme krve?

Jednou z metod měření objemu kapaliny, jejíž množství se obtížně měří standardními způsoby, je následující metoda: Pokusně osobě vpravíme do těla tekutinu o objemu $V_1 = 4$ cm³ obsahující radioaktivní atomy ^{24}Na a o celkové aktivitě $A_1 = 2500$ s⁻¹. Jelikož poločas rozpadu sodíku 24 je $T = 15$ hod, nemusíme se bát o zdraví měřené osoby. Po čase $t = 10$ hod odebereme vzorek krve o objemu $V_2 = 10$ cm³ a aktivitě $A_2 = 2$ s⁻¹. Jaké množství krve obsahuje náš pokusný „objekt“?

Pozn.: Pokud neznáte význam veličin psaných kurzívou, zkuste se podívat do nějaké základní učebnice jaderné fyziky.

Úloha V . 5 ... chladnutí kapalin

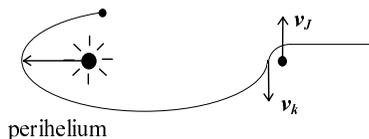
Ve fyzice se často zkoumají tzv. *relaxační procesy*, tj. postupné ustálení určité fyzikální veličiny na nějaké hodnotě. V termodynamice pod pojmem *relaxační doba* máme na mysli čas, za který nastane mezi sledovaným systémem a jeho okolím (s nějakou přesností danou chybou měření nebo fluktuacemi) termodynamická rovnováha. Relaxační doba se samozřejmě mění od procesu, který sledujeme – při vyrovnání tlaků je to asi 10^{-16} s, při různých chemických dějích až měsíce či roky.

Vaším úkolem bude sledovat rychlost chladnutí dvou či více kapalin (např. voda a olej) za stejných okolních podmínek. Aby se vaše práce více podobala skutečnému fyzikálnímu experimentu, proložte naměřenými hodnotami funkci $f(t) = Ae^{-Bt} + T_0$ a zkuste interpretovat vypočtené konstanty nebo alespoň odhadněte, na čem by mohly záviset. Pro ty, kdo neví, co je to lineární regrese, je určen krátký odstavce o této metodě v dodatku.

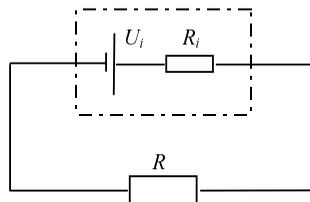
Úloha VI . 1 ... Jupiter a kometa

Kometární rodina Jupiteru vzniká následujícím způsobem (viz obr. 9). Kometa přilétá k Jupiteru z velké vzdálenosti s téměř nulovou počáteční rychlostí. Po opuštění Jupiterova gravitačního pole (sféry gravitačního vlivu Jupitera) má její rychlost (vzhledem ke Slunci) přesně opačný směr než rychlost Jupitera. Poté se pohybuje opět v gravitačním poli Slunce.

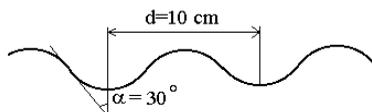
V jaké vzdálenosti od něj se bude nacházet perihelium dráhy komety a jaká je její oběžná doba (jaká je velikost velké poloosy dráhy komety)? Uvažujte, že Jupiter obíhá kolem Slunce po kružnici o poloměru $R = 5,2$ AU.

Obr. 9**Obr. 10****Úloha VI . 2 ... reálný zdroj**

Reálný zdroj elektrického napětí si můžeme namodelovat jako soustavu ideálního zdroje napětí U_i se sériově zapojeným odporem R_i (viz obr. 10). K tomuto zdroji je připojen spotřebič (zátěž) o odporu R . Nakreslete graf závislosti celkového výkonu, vnějšího výkonu (spotřeba v zátěži) a účinnosti obvodu (podílu těchto) na odporu spotřebiče. Zjistěte, při jakém odporu R jsou uvedené veličiny extrémální, a rozhodněte, kdy je vhodné příslušnou hodnotu R použít.

**Obr. 11****Úloha VI . 3 ... před plechem, za plechem**

K oblíbeným položkám v matfyzáckém folk-lóru patří tento zvyk. Zahlédne-li takové individuum dlouhou stěnu z vlnitého plechu (nebo jiného podobně tvarovaného materiálu), postaví se asi 5 m od ní a silně dupne. Ozve se (kromě obvyklého plesknutí) delší drnčivý zvuk, který postupně mění svou výšku.



Vysvětlíte, jak tento zvuk vzniká, a spočtete, jak se mění jeho frekvence s časem. Jaká je doba, po kterou zvuk slyší? Tvarování plechu je ukázáno na obr. 11.

Úloha VI. 4 ... *expoziční*

Začínající fotograf, znalec geometrické optiky, fotografoval s určitou expozicí průčelí domu ze vzdálenosti **100 m**. Potom přešel do vzdálenosti **50 m**, aby mohl udělat větší snímek. Domníval se (znaje přitom, že plocha domu se zvětší čtyřikrát), že musí expozici prodloužit také čtyřikrát. Doma zjistil, že první snímek se povedl perfektně, ale druhý, na kterém měla být původně i lepší dívka, se nevyvedl. Kromě evidentního důvodu, že to zapříčinila její oslnivá krása, uveďte ten méně podstatný.

Úloha VI. 5 ... *hustota vzduchu*

Pokuste se experimentálně určit hustotu vzduchu, pokud máte k dispozici balónek napuštěný plynem lehčím než vzduch. (Nevíme, jak je to s pout'ovým šílením v této době, jestliže neseženete vhodný plyn, např. vodík, zkuste použít horký vzduch – chyba měření bude ovšem ďábelská. Případně můžete měřit s plynem těžším vzduchu).

Seriál na pokračování

Předmluva

Za námět tohoto seriálu (narozdíl od loňského ročníku, kdy tématem seriálu byla zajímavá, ale přece jen příliš abstraktní speciální teorie relativity), jsme si zvolili problematiku, se kterou se asi musel setkat každý. Každý snad narazil na problém, k jehož obecnému – též lze říci analytickému – řešení jeho matematické znalosti nedostačovaly. Pro řadu úloh není obecné řešení vůbec možné a lze jen speciálním postupem získat numerický výsledek pro konkrétní zadání. V minulosti byla k řešení takových problémů vyvinuta spousta geometrických a mechanických pomůcek, dnes však většina z nich ustoupila daleko silnějším prostředkům výpočetní techniky. Domníváme se, že v současné době má většina z vás již vlastní počítač či alespoň programovatelnou kalkulačku nebo má k němu přístup ve škole (na každé střední škole se snad najde jedno „písíčko“, na kterém by vám váš profesor fyziky umožnil seriózní práci – není-li tomu tak, rádi se poučíme). Stejně tak si dovolíme předpokládat, že každý z vás měl možnost seznámit se s nějakým programovacím jazykem, ať už na své kalkulačce, či s obecně rozšířeným BASICem nebo PASCALem (když pomineme jazyky jako FORTRAN, C++ nebo ADA). I pro naprosté laiky pak můžeme doporučit pro numerické metody velice vhodný a u nás ojedinělý systém **FAMULUS**, jenž obsahuje vlastní programovací jazyk i dostatečné možnosti grafické prezentace výsledků a byl vyvinut na naší fakultě; jeho verze 3.1 je v současné době pro školy zdarma.

Sami se budeme snažit vyvarovat se preference nějakého programovacího jazyka a budeme klást důraz na principy činnosti algoritmů. Přesto bude nutné používat k jejich popisu jisté obecné formy syntaxe, kterou lze pak snadno převést do konkrétních jazyků.

V numerických řešeních pracujeme povětšinou jen s čísly, a proto budeme uvažovat pouze dva základní typy proměnných: *celočíslné* (spíše jen přirozená čísla pro indexaci) a *reálné* (s co možná největší přesností), které budeme označovat „písmem psacího stroje“ (např. I, J, x, t, Suma). Dále zavedeme (i vícerozměrná) *pole* čísel s indexy v hranatých závorkách (např. $\text{Vzda1}[I, J], \text{Rychlost}[I]$). Budeme používat běžné symboly pro aritmetické a logické operace a základní funkce.

Navíc budeme potřebovat označení pro podmínky a cykly – použijeme kurzívou psané termíny:

<p><i>Příklad podmínky:</i> pokud $x > 0$ potom $y = \log(x)$ jinak $y = 0$ konec</p> <p><i>Příklad cyklu:</i> <i>zacyklu</i></p> <p>$x = xD2$</p> <p><i>pokud</i> $x < 0,001$ <i>potom</i> <i>skonci</i> <i>konec</i></p> <p>$\text{Suma} = \text{Suma} + x$</p> <p><i>koncyklu.</i></p>

Kapitola 1

Námětem letošního SNP je výklad některých výpočetních metod pro řešení matematických zapeklitostí v nejrůznějších fyzikálních úlohách. Avšak úplné pojednání, dostatečně ilustrující i pro ty, kteří do „vyšší“ matematiky teprve pronikají, by zaplnilo mnohastrankovou knihu (např. [1]). My se však budeme muset trochu uskromnit. Ze dvou nejpoužíva-

nějších oblastí numerických metod si tedy zvolíme tu první, která se týká problémů spojených s řešením rovnic: od prostého hledání kořene přes minima a maxima funkcí až k řešení lineárních soustav rovnic. Druhou oblast, kterou je řešení vývojových úloh (od obyčejných diferenciálních rovnic po komplexní modelování), si raději necháme na některý další ročník SNP.

Kořen rovnice

Většinu úloh na hledání kořene, přestože jejich původ může být různý, lze zapsat v jednotné podobě, kdy na levé straně rovnítky stojí nějaká funkce jedné proměnné x , a napravo její hledaná hodnota, nejčastěji 0. Podobný tvar může dostat i úloha pro hledání extrému ($f'(x) = 0$ pro znalce derivací), dokonce budeme-li namísto s čísly pracovat s vektory, můžeme celou soustavu rovnic shrnout do zápisu $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$. Ale pozor, přes zdánlivou formální podobnost se metody řešení jmenovaných problémů dosti liší, ba dokonce u příbuzných úloh je třeba pečlivě zvažovat volbu té které metody řešení.

Za skutečnost, že jsme na počítači schopni řešit i dosti komplikované nelineární rovnice, musíme platit tím, že každé číslo lze zadat jen s konečnou přesností. Všechna racionální i iracionální čísla jsou zaokrouhlena na jistý počet desetinných míst a chyba tímto způsobená se při matematických operacích a výpočtech hodnot funkcí stále zvětšuje. Proto je vhodné uchovávat všechny vstupní údaje i mezivýsledky na co největší počet míst. Abychom potom mohli zaručit dostatečnou přesnost výsledku, je také třeba, aby byla úloha tzv. *dobře podmíněná*, to znamená, aby malé změny v zadaných hodnotách způsobily jen malé změny výsledků.

Společným prvkem všech metod je snaha co nejlépe se přiblížit přesnému řešení, které neumíme vyjádřit vzorcem. Každá obsahuje návod, jak z jistého odhadu řešení x_i dostaneme přesnější odhad x_{i+1} . Takovýto proces opakujeme, dokud hodnota nějakého kritéria, kterým se snažíme určit odchylku našeho a přesného řešení, nejčastěji rozdíl dvou následujících odhadů $|x_i - x_{i+1}|$, někdy třeba funkční hodnotu $f(x_i)$, neklesne (v absolutní hodnotě) pod stanovenou mez ε . Pro použitelnost metody je nyní rozhodující otázka, zda se sledovaná hodnota skutečně opakovaním kroků zmenšuje. Fakt, že po určitém počtu kroků se dostaneme pod libovolnou zvolenou hranici, se odborně nazývá *konvergence*. Při hodnocení metody nás kromě spolehlivosti konvergence zajímá také její rychlost, tj. jak rychle získáváme další platné cifry přesného řešení opakovaním daných kroků. U nejjednodušších metod roste lineárně, mocnější předpisy nám mohou třeba každým krokem počet platných cifer zdvojnásobit.

Požadavky rychlosti a spolehlivosti často stojí proti sobě. Metody slibující rychlé nalezení kořene mohou u některých funkcí zcela selhat. Buď se při opakování kroků ocitneme v kruhu, nebo nám dá tato metoda odhad naprosto mimo. Proto je záhodno vědět co nejvíce o průběhu uvažované funkce a co nejpřesněji odhadnout polohu kořene. Stanovíme-li interval, ve kterém má uvažovaná rovnice skutečně kořen, můžeme se k tomuto kořenu jakoukoliv spolehlivou metodou dostatečně přiblížit a v jeho okolí, kde se funkce chová způsobně, rychle zpřesnit výsledek nějakou mocnější metodou.

Vezměme si funkci $f(x)$, jejíž graf je tvořen jednou souvislou čarou – taková funkce se nazývá *spojitá* (např. polynomy jako $x^2 + 5x - 1$, nebo funkce $\sin x$). Ve většině metod, jež budeme popisovat, se omezíme právě na funkce, které jsou spojité všude až na několik předem známých bodů (jako je třeba $1D(x^2 - 1)$ nebo $\operatorname{tg} x$). Kořen rovnice $f(x) = 0$ hledáme v jistém intervalu (a, b) . Pokud platí, že $f(x)$ má v krajních bodech různá znaménka (to znamená $f(a) \cdot f(b) < 0$), musí v nějakém bodě tohoto intervalu protínat osu x . Budeme-li přibližovat body a, b tak, že tato nerovnost bude zachována, zůstane nám zaručeně alespoň

jeden kořen uvnitř intervalu. Tomuto postupu se říká tomu *separace kořene*. Dobrým úvodem k aplikaci nějaké metody je rozdělení celé inkriminované oblasti na množství malých intervalů, zjistit znaménka uvažované funkce v jejich krajních bodech a potom vzít ty z nich, kde je splněna podmínka $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Bisekce neboli půlení intervalu a metoda regula falsi

Jako první si ukážeme metodu nejjednodušší a nejpomalejší, ale také nejspolehlivější. Výchozí interval (x_1, x_2) nám separuje nějaký kořen rovnice $f(x) = 0$. Postup je zřejmý již z názvu metody. Zvolíme $x_3 = (x_1 + x_2)/2$ a v tomto bodě určíme hodnotu funkce f . Nyní z intervalů (x_1, x_3) a (x_3, x_2) vybereme ten, pro který je splněna podmínka $f(a) \cdot f(b) < 0$ (v něm alespoň jeden kořen leží), a pokračujeme dále v hledání bodů $x_4, x_5, x_6, \dots, x_i$ intervalem polovičním, čtvrtinovým, osminovým, ... Konvergence je dosti pomalá, na zpřesnění o jeden řád je třeba $\log_2 10 = 3,32\dots$ kroku, zato ale bezproblémová.

Ve vlastním výpočtu si nepotřebujeme pamatovat celou posloupnost x_1, x_2, x_3 , stačí nám bohatě tři body a, b, c a funkční hodnoty v nich f_a, f_b, f_c . K prvnímu programu, který nám provádí výše popsanou metodu, je potřeba několik poznámek. Funkce, jejíž kořen chceme nalézt, je označena jako `funkce()`, vstupní údaje (počáteční interval a přesnost) nám zprostředkuje procedura `zadání`. Od původního postupu se odchýlíme v jednom bodě: nebudeme chtít, aby (a, b) byl regulérní interval, tj. aby $a < b$, ale budeme požadovat $f_a < 0$ a $f_b > 0$, což nám usnadní další manipulaci s proměnnými (budeme přímo z f_c vědět, jestli bod c brát jako pravý nebo levý bod intervalu).

```

zadání (a, b, eps) {= kraje intervalu a mez přesnosti}
fa = funkce(a) :      fb = funkce(b)
pokud fa > 0 potom      pokud fb > 0      potom skonci*
                        {počáteční interval neseparuje kořen}
                        jinak      c = b
                                b = a
                                a = c
                                konec {podmínky 2}

konec {podmínky 1}
zaccyklu
  c = (a+b)/2
  fc = funkce(c)
  pokud abs(fc) < eps potom skonci konec
  pokud (fc < 0)      potom a = c
                    jinak b = c
  konec
koncyklu

```

Ve snaze zrychlit tuto metodu můžeme vzít v úvahu funkční hodnoty vypočtené v krajních bodech. Odhadneme-li průběh funkce v uvažovaném intervalu nejjednodušším způsobem, to je lineární závislostí, padne nám kořen do bodu

$$x_3 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}.$$

Jinými slovy spojíme úsečkou krajní body intervalu a její průsečík s osou x bereme za další bod. Pro tuto metodu existuje vžitě označení *regula falsi* („chybného předpokladu“ linearity zkoumané funkce).

* Příkaz `skonci` znamená ukončení běhu celého programu. Dvojtečka odděluje dva příkazy stejně jako nový řádek.

V uvedeném programu se příliš mnoho nezmění, kromě výpočtu nového bodu c je potřeba pohlídat to, aby se při předávání poloh bodů předaly i vypočtené funkční hodnoty (které nyní potřebujeme).

Zdá se, že nyní máme podstatně lepší odhad než při použití bisekce, ale lze se setkat s funkcemi, při kterých je uvedená konvergence velice pomalá, např. když na jedné straně od osy dosahuje podstatně menších absolutních hodnot. Potom je vhodné přejít zpět k půlení intervalu.

Úloha S. 1 (5 bodů)

Řešte oběma popsányými metodami (s přesností na 5 desetinných míst) následující problém. Skokan na můstku se odrazí z prkna rychlostí $V = 5 \text{ ms}^{-1}$ kolmo vzhůru v okamžiku, kdy je deska maximálně prohnutá směrem dolů ($a = 30 \text{ cm}$ pod rovnovážnou polohou). Za jak dlouho se opět s deskou srazí, pokud prkno kmitá s periodou $T = 0,5 \text{ s}$?

Srovnejte rychlost výpočtu v jednotlivých fázích (hrubé přibližování, dolaďování).

Kapitola 2

V kapitole 1 jsme poznali dvě nejjednodušší metody hledání kořene, přesněji řečeno postupy, jak z jistého odhadu polohy kořene dospět k odhadu přesnějšímu. Rychlost, s jakou se blížíme přesnému řešení, závisí na mnoha okolnostech, v obecném případě však lze zavést jisté číselné ohodnocení zvané *řád konvergence*. Označme si odchylku v i -tém kroku jako $\varepsilon_i = |x_i - \bar{x}|$ (maximální možná vzdálenost bodu našeho intervalu a přesného řešení \bar{x}).

V případě bisekce platí mezi odchylkami ve dvou následujících krocích $\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i/2$, takže u obecné metody lze psát $\varepsilon_{i+1} = \text{const} \cdot \varepsilon_i^\alpha$, kde právě α je řád konvergence. V případě prvních dvou metod je $\alpha = 1$, říkáme, že konvergují lineárně (metoda regula falsi sice často konverguje rychleji, ale v mnoha případech je stejně pomalá jako bisekce).

Metoda sečen a tečen

Abychom dostali rychlejší konvergenci než lineární, musíme se vzdát požadavku, že dva následující odhady v každém kroku budou oddělovat kořen. Tato podmínka nám sice dává jistotu, že metoda dojde k cíli, často má však za důsledek dosti těžkopádnou konvergenci. Zkusme tedy v posledně diskutované metodě vynechat podmínku separace a výsledek, který dostaneme ze vzorce

$$x_{i+1} = \frac{x_{i-1}f(x_i) - x_i f(x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})},$$

berme za další odhad bez ohledu na to, jestli nám interval (x_i, x_{i-1}) odděluje kořen či nikoli (tj. jestli platí $f(x_i) \cdot f(x_{i-1}) < 0$).

Takový postup se nazývá *metoda sečen* a konverguje k hledanému řešení (s výjimkou několika patologických případů) s řádem 1,618... Riziko, které s sebou tato metoda přináší, můžeme ilustrovat dvěma případy: první odpovídá situaci, kdy nám vypočtený bod padne někam daleko za původní hranice (takovoto případy lze snadno ohlídat); druhý jev je poněkud vzácnější, kdy se metoda ocitne v kruhu (body na sebe odkazují navzájem) – dosáhnout tohoto stavu přesně je téměř nemožné, ale i blízké situace značně zpomalují konvergenci. Můžeme si všimnout, že směr sečny, jsou-li body dostatečně blízko, vystihuje sklon grafu funkce se směrnici $\tan \beta$. Hledáme-li tento směr přesně v daném bodě x , musíme přejít od

sečen k tečně. Sklon tečny, resp. jeho tangenta, se pak rovná derivaci funkce v bodě x . Vy, kteří jste se s derivacemi ještě nesetkali, si takto můžete představit definici: derivace funkce f ($\tan \beta$ se pak stává směrnici tečny) v bodě x je:

$$f'(x) = \tan \beta \approx \frac{f(x^*) - f(x)}{x^* - x} \quad \text{pro dva blízké body } x \text{ a } x^*.$$

Známe-li derivaci naší funkce (kterou lze spočítat u naprosté většiny funkcí bez velkých problémů), můžeme namísto metody sečen volit postup následující: v daném bodě spočítáme derivaci a další bod zvolíme podle vzorce $x_i = x_i - f(x_i)Df'(x_i)$, tj. v místě, kde tečna protíná osu x . Tak dostáváme *metodu tečen* neboli *Newtonovu metodu*. Je jednodušší v tom, že k určení následujícího bodu stačí počítat jen s jedním namísto se dvěma body, zato je třeba znát průběh derivace dané funkce (a v některých bodech ani nemusí derivace funkce existovat – tam, kde neumíme sestavit tečnu ke grafu funkce). Tato metoda konverguje dokonce kvadraticky (řád konvergence je 2), ale skrývá tатаž nebezpečí jako metoda sečen. Neznáme-li předem derivaci funkce f , je zde možnost nalezení její hodnoty podle definice $f'(x)$: za bod x^* vezmeme $x + h$, kde h je dostatečně malé číslo, pak $f'(x) = (f(x+h) - f(x))/Dh$. To však poněkud zpomaluje výpočet a zatěžuje ho značnou chybou. Buď je h příliš malé, a pak hrozí dělení malým číslem, anebo naopak je přiblížení k tečně příliš hrubé. Zkušenost ukazuje, že místo tohoto postupu je vhodnější a v praxi rychlejší metoda sečen.

Zrychlení konvergence (Aitkinův proces)

Podle úvodních poznámek k této kapitole můžeme tvrdit, že poměr vzdáleností dvou po sobě následujících odhadů kořene od přesného řešení se pro zvyšující se počet kroků blíží nějaké limitní hodnotě γ – to platí přesně v případě, že řád konvergence metody je roven 1, ale postup účinkuje i při jiných metodách. V jistém přiblížení můžeme pro tři po sobě jdoucí odhady psát vztah

$$\frac{|x_i - \gamma|}{|x_{i-1} - \gamma|} = \frac{|x_{i+1} - \gamma|}{|x_i - \gamma|} \approx C,$$

přičemž rovnost platí tím lépe, čím je i vyšší (a γ je pak přesnějším odhadem kořene). Máme-li tři odhady kořene jako výsledky některé z popsanych metod, můžeme odtud vyjádřit odhad pro γ :

$$\gamma = \frac{x_{i-1}x_{i+1} - x_i^2}{x_{i-1} + x_{i+1} - 2x_i}.$$

Hodnotu γ pak můžeme vzít jako následující, $(i + 2)$. aproximaci kořene. Tento postup je vhodný zejména pro překonání nějakého obtížného, pomalu konvergujícího úseku, do kterého se dostala některá z výše uvedených metod. Lze ji však považovat i za samostatnou metodu hledání kořene.

Úloha S. 2 (5 bodů)

Upravte program uvedený v minulé kapitole z metody regula falsi na metodu sečen a zjistěte, jak se zrychlí konvergence metody použité na skokanův problém z úlohy S. 1. Ověřte, jak mnoho je nyní konvergence závislá na volbě výchozího bodu.

Pokuste se metodu zrychlit pomocí Aitkinova procesu: vždy po třech přiblíženích spočtených běžným způsobem proveďte extrapolaci k řešení γ . Jak se uvedený postup vyplácí při metodě regula-falsi a při metodě sečen?

Kapitola 3

Je načase, abychom se po dávce teorie věnovali praktickým výsledkům, ke kterým jste na základě předchozího výkladu měli dospět. Problém, jenž vám byl zadán, nebyl příliš komplikovaný. Šlo o složení dvou pohybů – letu skokana neboli svislého vrhu a harmonických kmitů desky můstku.

Poloha skokana se mění podle vztahu

$$h_s(t) = -A + Vt - \frac{1}{2}gt^2,$$

deska kmitající s periodou T se nachází ve výšce

$$h_d(t) = -A \cos(2\pi t/T).$$

Někdy jste řešení vztahovali k počáteční poloze skokana (tak, aby $h_s(0) = 0$); to však ve výsledku nehraje roli, neboť pro nás je podstatná vzájemná vzdálenost skokana a můstku

$$f(t) = h_s(t) - h_d(t) = Vt - \frac{1}{2}gt^2 - A + A \cos(2\pi t/T).$$

Úkolem bylo zjistit nejbližší bod různý od počátku, ve kterém dosáhne $f(t)$ hodnoty 0.

Zadané hodnoty jsou:

$$A = 0,3 \text{ m}, \quad v = 5 \text{ ms}^{-1}, \quad T = 0,5 \text{ s}, \quad g = 9,80665 \text{ ms}^{-2}$$

(s přesností na 5 desetinných míst – pokud bychom vzali $g = 10 \text{ ms}^{-2}$, dostali bychom snadno přesné řešení $t = 1 \text{ s}$).

Podstatná je volba počátečních mezí intervalu (a, b) , ve kterém hledáme kořen (tj. separace). Většina z vás se spokojila s odhadem „a dostatečně blízko 0 (třeba 0,001), b dost velké (např. 10)“, aby opravdu platilo $f(a) \cdot f(b) < 0$. Body omezující polohu intervalu však lze odhadnout poměrně přesně – čas, ve kterém skokan (resp. jeho nohy) proletí výškou $+A$, resp. $-A$ (při pohybu dolů) je

$$\left(v + \sqrt{v^2 - 4gA} \right) / g, \text{ resp. } 2v/g,$$

pro zadané hodnoty přibližně mezi 0,880 s a 1,020 s. V našem modelu jsme používali výše uvedeného nepřesného odhadu, neboť k tomu nepotřebujeme žádné fyzikální znalosti.

Dalším problémem se ukázala otázka „pětí platných cifer“. Program v podobě, jak jsme jej uvedli v druhé kapitole, používal jako kritérium přesnosti dosaženého řešení podmínku $\text{abs}(f(c)) < \text{eps}$, tj. funkční hodnota v posledním bodě výpočtu je v absolutní hodnotě menší než stanovená přesnost. Toto kritérium většina z vás ve výpočtu použila. Snadno si však představíme situaci, kdy přestože je funkční hodnota blízko 0, může být průsečík grafu funkce s osou ještě hodně daleko. Skutečným kritériem přesnosti dosaženého řešení je velikost intervalu (a, b) . To ovšem platí pouze u metody *bisekce* a *regula falsi*, kdy tento interval uzavírá hledaný kořen. U metod *sečen* a *tečen* můžeme chybu výsledku $|x_n - x_{\text{přes}}|$ odhadnout pomocí rozdílu dvou posledních výsledků $|x_n - x_{n-1}|$; v případě, že metoda rychle konverguje, se nedopustíme až takové nepřesnosti (u pomalých postupů, jakým může být *metoda regula falsi*, je toto kritérium dosti zavádějící).

Objevily se i námitky proti reálnosti zadání úlohy **S. 1** – proč by se měl skokan odrážet z dolní polohy můstku, což je pro něj ve snaze o co nejvyšší skok přeci nevýhodné. Je však jasné, že při odrazu působí na prkno značnou silou (podstatně větší, než je jeho tíha), a tedy prkno se prohne odpovídajícím způsobem, tj. dolů.

V úloze **S. 1** jste měli do popsaného algoritmu jen dosadit za *funkce* $(t) = f(t)$, případně upravit výraz pro c podle vzorce pro metodu *regula falsi*. Většina z vás sestavila správně potřebnou funkci, někteří připojili i výpisy programů či komentáře k možným změnám v uvedeném algoritmu. Hlavním úkolem ale bylo zjistit, k jaké hodnotě a po kolika krocích uvedené dvě metody dospějí. Mnozí se neobtěžovali s výpisem jednotlivých kroků a často ani počtu opakování; spokojili se s hodnocením rychlá či pomalá konvergence. Někteří

dokonce ani neuvedli výsledek, ke kterému dospěli, čímž ovšem poněkud zbytečně přišli o body.

V úloze **S. 2** sejevila situace obdobná. Ještě před konkrétními výsledky si zde uvedeme popis algoritmu, ke kterému jste měli dospět. Nejprve se jednalo o úpravu výpočtu pro metodu sečen, což znamenalo jiný vzorec pro c , zároveň však odpadlo testování, zda je hodnota vypočtená v bodě c kladná nebo záporná. Druhou úpravou bylo zavedení Aitkinova postupu, kdy po každém třetím kroku odhadneme další krok podle uvedeného vzorce (odpovídá místu, ke kterému by směřovala geometrická posloupnost započatá uvedenými třemi body). Zavedené pole $\text{Ait}[1..3]$ uchovává koeficienty pro tento výpočet.

```

fa = funkce(a)
fb = funkce(b)
c = b
Dil = 0

zacycycklu
  c = (b*fa - a*fb)/D(fa - fb)
  fc = funkce(c)
  Dil = Dil + 1                                {počet kroků modulo 3+1}
  Ait[Dil] = c
  pokud Dil = 3 potom c = (Ait[1]*Ait[3] - Ait[2]^2)/
                        D(Ait[1]+Ait[3] - 2*Ait[2])
                        Dil = 0

konec

pokud abs(c - b) < eps potom skonci konec
  a = b
  fa = fb
  b = c
  fb = fc
koncycklu

```

Tedy tedy konečně k výsledkům jednotlivých metod:

- **bisekce** $a = 0,001$; $b = 10$,
počet kroků: 24, výsledek: $1,018158 \pm 0,000001$.

U bisekce může být počáteční odhad dosti hrubý.

krok	c	fc
5	0,937591	2,899e-01
6	1,093839	-5,831e-01
7	1,015715	1,410e-02
8	1,054777	-2,496e-01
9	1,035246	-1,078e-01
10	1,025480	-4,423e-02
11	1,020598	-1,440e-02
12	1,018156	1,300e-05
13	1,019377	-7,154e-03
14	1,018767	-3,560e-03
15	1,018461	-1,771e-03

<i>krok</i>	<i>c</i>	<i>f c</i>
16	1,018309	- 8,780e-04
17	1,018233	- 4,320e-04
18	1,018194	- 2,090e-04
19	1,018175	- 9,800e-05
20	1,018166	- 4,200e-05
21	1,018161	- 1,400e-05
22	1,018159	- 1,000e-06
23	1,018157	6,000e-06
24	1,018158	3,000e-06

- **regula-falsi** $a = 0,001$; $b = 10$,
počet kroků: 59(!), výsledek: $1,018128 \pm 0,000009$.

Jak je vidět, v tomto případě je konvergence opravdu děsně pomalá. Pravý okraj intervalu zůstává konstantní a levý se velmi pomalu posouvá k cíli. Tedy i naše kritérium rozdílu staré a nové hodnoty je splněno ještě dost daleko od cíle – v tomto případě je třeba volit vyšší přesnost.

<i>krok</i>	<i>c</i>	<i>f c</i>
40	1,017473	3,986e-03
41	1,017636	3,042e-03
42	1,017760	2,321e-03
43	1,017855	1,770e-03
44	1,017927	1,349e-03
45	1,017982	1,028e-03
46	1,018024	7,840e-04
47	1,018056	5,970e-04
48	1,018081	4,550e-04
49	1,018099	3,470e-04
50	1,018113	2,640e-04
51	1,018124	2,010e-04
52	1,018132	1,530e-04
53	1,018139	1,170e-04
54	1,018143	8,900e-05
55	1,018147	6,800e-05
56	1,018150	5,200e-05
57	1,018152	3,900e-05
58	1,018153	3,000e-05
59	1,018155	2,300e-05

- **sečny** $a = 0,5$; $b = 5$,
počet kroků: 18, výsledek: $1,018128 \pm 0,000009$.

Podstatně lepší výsledek než v předchozím případě, i když několikrát jsme skončili hodně vedle. Zvláště dolaďování proběhlo neobvykle rychle a dobře se tato metoda vypořádala i s hrubým počátečním odhadem.

<i>krok</i>	<i>c</i>	<i>f c</i>
1	0,557996	1,187e-00
2	1,348345	- 2,572e-00
3	0,807597	3,151e-01
4	0,866617	3,189e-01
5	- 4,058746	- 1,011e02
6	0,851137	3,148e-01
7	0,835904	3,117e-01
8	- 0,714609	- 6,648e-00
9	0,766453	3,581e-01
10	0,690752	5,935e-01
11	0,881611	3,218e-01
12	1,107614	- 7,126e-01
13	0,951917	2,632e-01
14	0,993912	1,247e-01
15	1,031731	- 8,451e-02
16	1,016455	9,681e-03
17	1,018025	5,950e-04
18	1,018128	- 5,000e-06

- **regula falsi s Aitkinovým procesem** $a = 0,5;$ $b = 5,$
počet kroků: 22, výsledek: $1,018156 \pm 0,000002.$

Dosáhli jsme dostatečného urychlení s rizikem, že jsme se několikrát ocitli mimo interval.

<i>krok</i>	<i>c</i>	<i>f c</i>
6	0,870753	3,200e-01
7	0,884250	3,221e-01
8	- 0,917824	- 8,866e+00
9	0,821068	3,116e-01
10	0,762020	3,663e-01
11	0,695374	5,738e-01
12	1,279905	- 2,212e+00
13	0,815781	3,125e-01
14	0,873241	3,205e-01
15	0,924713	3,062e-01
16	1,367190	- 2,659e+00
17	0,970411	2,141e-01
18	0,999982	9,676e-02
19	1,012876	3,005e-02
20	1,022848	- 2,799e-02
21	1,018039	6,950e-04
22	1,018156	1,500e-05

- **sečny s Aitkinovým procesem** $a = 0,5;$ $b = 5,$
počet kroků: 11, výsledek: $1,018156 \pm 0,000002.$

Zatím nejrychlejší metoda (popravdě to bylo v tomto případě spíše štěstí...).

<i>krok</i>	<i>c</i>	<i>f_c</i>
1	0,558000	1,187e00
2	0,611386	9,752e-01
3	0,857085	3,165e-01
4	0,543181	1,226e00
5	0,966309	2,266e-01
6	1,062218	-3,085e-01
7	1,006921	6,204e-02
8	1,027143	-5,469e-02
9	1,017669	2,852e-03
10	1,018138	1,170e-04
11	1,018159	-2,763e-07

Úloha S. 3 (2 body)

Vezměte poslední popisovanou metodu tečen neboli Newtonovu, která určuje následující bod podle vzorce $c = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$ – pro ty neznalé derivování uvádíme pro skokanův případ $f(t) = -g \cdot t + v - 2\pi ADT \cdot \sin(2\pi tDT)$. Řešte touto metodou zadanou úlohu a ověřte rychlost konvergence jak pro přesný odhad počátečního intervalu (0,88 ; 1,02), tak pro hrubý odhad (0 ; 10).

Úloha S. 4 (3 body)

Zjistěte, jak závisí přesnost dosaženého výsledku na počtu kroků u všech popsanych metod (bisekce, regula falsi, metoda sečen a tečen), tedy ověřte, zda je zpřesňování lineární, kvadratické, či jiné. Je tato vlastnost ovlivněna volbou počátečního intervalu?

Kapitola 4

Jak bylo poznamenáno v minulé kapitole, Newtonova metoda je schopna konvergovat velice rychle, ale je třeba mít dostatečně dobrý počáteční odhad, jinak není úspěch jistý. Navíc musíme znát kromě funkčních hodnot i derivace v každém bodě. Často však o zkoumané funkci známe velmi málo a výpočet derivace může být dost nejistý a pracný. Proto si uvedeme ještě jednu jednoduchou metodu nazývanou *prostá iterace*.

Tak, jako jsme mohli každou úlohu převést do tvaru $f(x) = 0$, můžeme tento požadavek změnit na tvar $g(x) = x$. Pokud nás nenapadne nic lepšího, můžeme tedy postupovat prostě tak, že novou hodnotu x_{n+1} dostaneme prostým výpočtem hodnoty této funkce g v bodě x_n . Tento postup povede k cíli (tj. metoda bude konvergovat) za podmínky, kterou formuluje tzv. *Banachova věta o kontrakci*:

Na jistém intervalu $I = \langle a, b \rangle$ nechť je funkce $g(x)$ spojitá, zobrazuje interval do sebe (tj. pro $x \in I$ je opět $g(x) \in I$) a navíc je zde tzv. *kontraktivní*, tj. pro každé x a y z intervalu I platí

$$(*) \quad |g(x) - g(y)| < q |x - y| \quad \text{pro nějaké } 0 < q \leq 1.$$

Pak existuje v I (jediné) řešení $g(\lambda) = \lambda$ a posloupnost $\{x_n\}$ daná předpisem $x_{n+1} = g(x_n)$ k němu konverguje.

Důkaz přenecháme matematikům (věta platí dokonce obecně v různých vícerozměrných metrických prostorech). Podstatné pro nás je dosáhnout toho, aby byly podmínky věty splněny, tj. aby na dostatečném okolí přesného řešení platila kontraktivita. To je ekvivalentní podmínce, že derivace $g'(x)$, což je vlastně limita výrazu $(g(x) - g(y))D(x - y)$ pro y se blížíci k x , byla na celém intervalu (v absolutní hodnotě) menší než 1. Toho lze dosáhnout vhodným zavedením funkce $g(x) -$ vycházíme-li původně z podmínky ve tvaru $f(x) = 0$, lze volit $g(x) = f(x)k + x$ a parametrem k můžeme měnit i derivaci výsledné funkce. V našem problému se skokanem funkce $f(x)$ v okolí hledaného řešení klesá, derivace je záporná, takže volíme k jako malé kladné číslo.

Také je pro nás zajímavé další tvrzení věty, že chyba k -té iterace je

$$|x_k - \lambda| \leq \frac{q}{1-q} |x_k - x_{k-1}|,$$

máme tedy souvislost mezi skutečnou chybou a naším odhadem z rozdílu následujících iterací, který jsme používali např. v metodě tečen. Dosadíme-li si ve výrazu (*) za y kořen λ , snadno ověříme z nerovnosti $|g(x) - \lambda| < q|x - \lambda|$, že tato metoda konverguje lineárně (s poměrem q). Nabízí se pak (podobně jako v minulých metodách) použít Aitkinův proces, který (až na výjimečné případy) zvýší rychlost konvergence na kvadratickou. Abychom uvedli věci na pravou míru, je třeba poznamenat, že teprve nyní je použití tohoto procesu zcela oprávněné – pouze v případě, že se naše řada blíží k řešení monotónně, tj. precizněji ($x - \lambda$) nemění znaménko, lze zaručit spolehlivé chování vzorce pro Aitkinovo urychlení. V předchozích metodách totiž mohla iterace přeskočit z jedné strany kořene na druhou a potom jsme často dostali extrapolací odhad i mimo původní interval. To, že jsme nezdřídka dosáhli dobrého urychlení, bylo dáno jak vhodným průběhem zkoumané funkce, tak i pozitivním vlivem Aitkinova procesu na narušení příliš pomalé a jednotvárné konvergence, např. u metody regula-falsi. Nyní již však dává Aitkinův vzorec vždy spolehlivé výsledky zejména v blízkosti řešení.

Program s použitím této metody vznikne triviální úpravou (spíše zjednodušením) předchozích, takže ho nebudeme uvádět.

Věnujme se raději ještě chvíli problému naznačeném v úvodu seriálu. Máme více rovnic (obecně n) obsahujících také n neznámých proměnných x^1, \dots, x^n . Společné řešení těchto rovnic pak hledáme jako n -tici čísel (x^1, \dots, x^n) , kterou můžeme chápat i jako vektor \vec{x} o n složkách a soustavu rovnic psát jako $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$ (\vec{f} jako vektor znamená, že první rovnicí je složka $f_1(\vec{x}) = 0$, druhá $f_2(\vec{x}) = 0$ atd.). To nám pomůže rozhodnout, jak jsme blízko přesnému řešení – velikost vektoru $\|\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}\|$, stejně jako $\|\vec{x}_k - \vec{x}_{\text{pres}}\|$, se musí blížit 0. Problém je ovšem s použitím některých metod – např. u metody sečen nebo regula falsi nám z výchozích bodů \vec{a} a \vec{b} dá každá rovnice f_i jiný průsečík s $\vec{0}$. Nejsnazší je vyjít z právě popsané metody prosté iterace. Převědeme funkce f_i na g_i , pro které by mělo platit $\vec{g}(\vec{x}) = \vec{x}$, a předpokládejme, že jsou splněny podmínky kontraktivnosti jako v prvním případě: $\|\vec{g}(\vec{x}) - \vec{g}(\vec{y})\| < q\|\vec{x} - \vec{y}\|$. Potom naše metoda spolehlivě konverguje k cíli.

Ilustrujme si to na příkladu dvou rovnic o dvou neznámých: $r(x, y) = 0$ a $s(x, y) = 0$. Převědeme na požadovaný tvar např. $u(x, y) = r(x, y) + x$, $v(x, y) = s(x, y) + y$, případně zvolíme vhodné koeficienty u r a s . Požadovanou přesnost výsledku budeme srovnávat s výrazem

$$\|\vec{x}_k - \vec{x}_{k+1}\| = \sqrt{(x_k - x_{k+1})^2 + (y_k - y_{k+1})^2}.$$

Pár slov k řešení minulých dvou úloh. V první šlo o snadnou variaci na téma rozebírané minule, věnujme se tedy raději druhé z nich, ve které jste měli analyzovat výsledky dosažené v předchozích metodách v závislosti na dosažené přesnosti. Někteří z řešitelů se o něco takového pokoušeli již v minulých úlohách (možná jim nebylo jasné, co se od nich žádá). Uveďme napřed strohé výsledky úlohy S . 4:

- *metoda bisekce:*

hrubý počáteční interval (0,1 ; 10)			jemný počáteční interval (0,8 ; 1,02)		
číslo kroku	řád chyby	dosažená hodnota	číslo kroku	řád chyby	dosažená hodnota
7	1	1,05477695312500	1	1	0,98500000000000
10	2	1,02059760742187	4	2	1,01562500000000
14	3	1,01785105285644	8	3	1,01808593750000
17	4	1,01811807899475	11	4	1,01812011718750
20	5	1,01812284731864	14	5	1,01812438964843
24	6	1,01812731762230	18	6	1,01812732696533
27	7	1,01812742937989	21	7	1,01812742710113
30	8	1,01812744334959	24	8	1,01812744796276
34	9	1,01812744422270	28	9	1,01812744405120
37	10	1,01812744425907	31	10	1,01812744421418
40	11	1,01812744423634	34	11	1,01812744423456
44	12	1,01812744423435	38	12	1,01812744423430
47	13	1,01812744423410	41	13	1,01812744423408
50	14	1,01812744423410	44	14	1,01812744423411
54	15	1,01812744423411	47	15	1,01812744423411
57	16	1,01812744423411	51	16	1,01812744423411
60	17	1,01812744423411	54	17	1,01812744423411
64	18	1,01812744423411	57	18	1,01812744423411

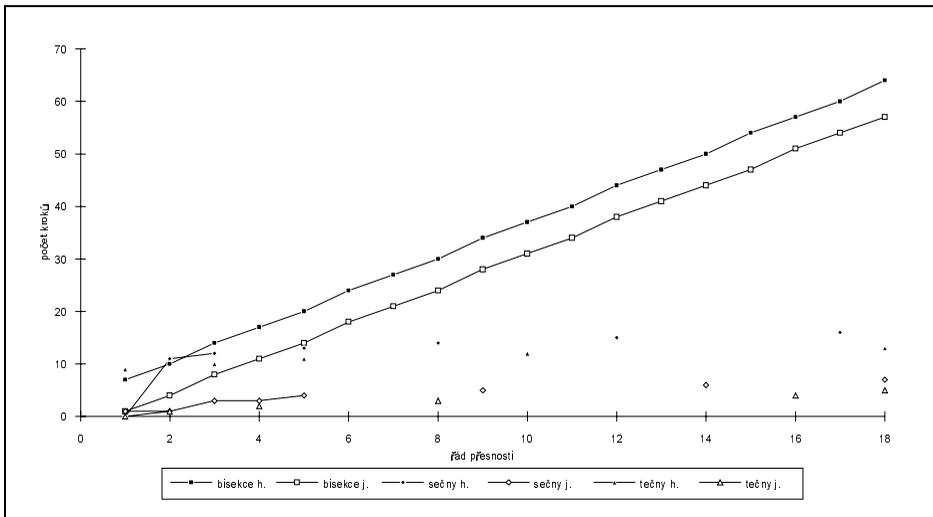
- *metoda sečen:*

hrubý počáteční interval (0,1 ; 10)			jemný počáteční interval (0,8 ; 1,02)		
číslo kroku	řád chyby	dosažená hodnota	číslo kroku	řád chyby	dosažená hodnota
1	1	0,52740834753989	1	1	1,02242032120419
11	2	1,01839659910820	1	2	1,02242032120419
12	3	1,01812275921560	3	3	1,01812630869317
13	5	1,01812743819779	3	4	1,01812630869317
14	8	1,01812744423424	4	5	1,01812744454176
15	12	1,01812744423411	5	9	1,01812744423410
16	17	1,01812744423411	6	14	1,01812744423411
17	28	1,01812744423411	7	18	1,01812744423411
17	58	1,01812744423411	9	58	1,01812744423411

- *metoda tečen:*

hrubý počáteční odhad (5 ; 0)			jemný počáteční odhad (1 ; 0)		
číslo kroku	řád chyby	dosažená hodnota	číslo kroku	řád chyby	dosažená hodnota
9	1	1,01888631247197	0	1	1,02007489078427
10	3	1,01813018171798	1	2	1,01814523547248
11	5	1,01812744427003	2	4	1,01812744575125
12	10	1,01812744423411	3	8	1,01812744423411
13	18	1,01812744423411	4	16	1,01812744423411
			5	18	1,01812744423411

Graf 1 – znázorňuje obsah předchozích tabulek



Metoda regula-falsi není zde zahrnuta; jak bylo poznamenáno dříve, konverguje v našem případě velmi pomalu (hůře než bisekce), dokud nedosáhne dostatečného přiblížení k hledanému řešení. Proto by ležela někde vysoko nad vnesenými čarami (viz graf 1).

Jak je nejlépe patrné z grafického znázornění, metoda bisekce je krásně lineární, u druhých dvou metod není těžké proložit získanou závislostí parabolu (abychom tento předpoklad ověřili, museli bychom počítat do podstatně vyšších řádů přesnosti, na což nám nestačují výpočetní prostředky). Přitom volba počátečního odhadu se projeví jen několika kroky navíc, tj. posunem grafu směrem vzhůru.

Úloha S. 5 (obyčejná – 3 body)

Sestavte program pro iterační metodu a zvolte vhodnou konstantu k pro funkci g , abyste dostali vhodný interval okolo hodnoty 1 splňující kontraktivnost. Ověřte lineární konvergenci a zkuste zjistit míru zrychlení při užití Aitkinova procesu.

Úloha S. 6 (prémiová pro náročné – zvláštní dotace 5 bodů)

Chceme-li demonstrovat metodu řešení soustavy rovnic na našem skokanovi, budeme muset přidat další podmínku: dejme tomu, že první dopad na prkno se mu zdál příliš tvrdý; rozhodl se tedy rozkývat prkno natolik (změnit amplitudu kmitů), aby druhá srážka s prknem proběhla se zanedbatelnou vzájemnou rychlostí. Tedy jak hodnota $Funkce$, tak $Derivace$ (uvedená v minulém díle) byly v okamžik srážky rovny nule. Vaším úkolem je najít potřebnou amplitudu A_n a dobu druhého skoku T_n (odráží se opět dole...).

Kapitola 5

V závěru minulé kapitoly jsme se pustili do rozboru problémů spojených s řešením soustavy více (navzájem provázaných) rovnic. Ač se to zdá být podivné, narazíme na ně i při řešení obyčejných algebraických rovnic, tj. takových, které lze zapsat ve tvaru polynomu $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$. Běžnými postupy pro numerická řešení nalezneme u polynomů jen jejich reálné kořeny (ty odpovídají bodům, v nichž protíná graf funkce osu x). V mnoha případech nám ale jde o to získat všechny kořeny (kterých má polynom n -tého řádu obecně n), i ty, které byly v dřívějších dobách považovány za absurdní, jako např. řešení rovnice $x^2 + 1 = 0$, jímž je $\sqrt{-1}$. Ti zkušenější z vás už budou vědět, že každý obecný kořen lze zapsat jako kombinaci $a + bi$, kde a, b jsou reálná čísla a i zmiňovaná absurdní odmocnina. Takové řešení lze pak zakreslit jako bod $[a, b]$ v tzv. komplexní rovině, jejíž součástí je i množina reálných čísel $[a, 0]$. Proto se můžeme zabývat těmito čísly jako dvourozměrnými vektory a postupovat dle metod naznačených v minulé kapitole. Násobení komplexních čísel funguje stejně jako vektorový součin:

$$[a, b] * [c, d] = [ac - bd, ad + bc].$$

Logicky plyne ze zápisu: $(a + bi)(c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$, neb $i^2 = -1$.

Pak můžeme počítat mocniny $(a + bi)^n$ a konečně i hodnoty polynomu ve všech bodech komplexní roviny. Výsledkem je ovšem opět komplexní číslo nebo chcete-li, vektor v rovině. (Vynést komplexní graf by v tomto případě tedy vyžadovalo 4 dimenze.) Protože však programovací jazyky většinou neovládají manipulace s komplexními čísly, musíme si příslušné algoritmy napsat sami. K výpočtu použijeme velmi efektivního algoritmu nazývaného Hornerovo schéma. Koeficienty polynomu jsou zadány v poli $a[i]$ a s pomocí dalších polí $b[i]$, $c[i]$, $d[i]$ a $e[i]$ určíme hodnotu polynomu v bodě $[g, h]$ i její derivaci (výsledkem jsou komplexní čísla $[b, d]$ a $[c, e]$). Pro jednodušší implementaci jsou pole indexována v opačném pořadí, $a[0]$ je koeficient u nejvyšší mocniny.

```

b0 = a0
d0 = 0
i = 1
zaccyklu
  b[i] = b[i-1]*g - e[i-1]*h + a[i]
  d[i] = d[i-1]*g + b[i-1]*h
  i = i+1
pokud i > n skonci
koncyklu
c0 = a0
e0 = 0
i = 1
zaccyklu

```

```

c[i] = c[i-1]*g - e[i-1]*h + b[i]
e[i] = e[i-1]*g + c[i-1]*h + d[i]
i = i+1
pokud i > n-1 skonci
koncyklu

```

Nášim cílem je najít takový bod $[g, h]$, aby absolutní hodnota funkce v tomto bodě (případně rozdíl dvou následujících kroků) $\| [b, d] \| = \sqrt{b^2 + d^2}$ byla menší než zadaná přesnost ε . K tomu můžeme zvolit metodu prosté iterace, popsanou v minulém díle, nebo Newtonovu metodu tečen (když se nám podařilo spočítat derivaci). V úloze uvedené na závěr můžete použít metodu dle vašeho názoru nejvýhodnější. V metodě tečen používáme vzorec $x_{i+1} = x_i + f(x)Df'(x)$, což je nyní podíl komplexních čísel, ten se spočítá jako

$$[a, b]D[c, d] = [a, b]*[c, d]D(c^2 + d^2).$$

Pokud máme určit opravdu všechny kořeny, musíme součet $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a$ rozložit na součin $a_n (x - x_1) (x - x_2) \dots (x - x_n)$, kde x_i je nějaký kořen (může se i opakovat). Abychom měli opravdu univerzální algoritmus, musíme po nalezení kořene a vydělit polynom $P(x)$ výrazem $(x - a)$, tj. nalézt takový polynom $Q(x)$, aby $P(x) = (x - a)Q(x)$. Tento polynom však bude mít už obecně komplexní koeficienty, což výpočet zkomplikuje. Pokuste se (v souvislosti se závěrečnou úlohou) sepsat algoritmus na dělení polynomu výrazem $(x - a)$; pokud neuspějete, převedte alespoň předchozí program na operace s komplexními koeficienty polynomu.

Nyní něco k minulým úlohám. V úloze **S. 5** jste měli aplikovat již známé pokusy na poslední předvedenou metodu prosté iterace. Výsledky našich výpočtů uvádí následující tabulka:

číslo kroku	řád chyby	dosažená hodnota	číslo kroku	řád chyby	dosažená hodnota
0	2	1,00965000000000	0	2	1,00965000000000
3	3	1,01745698709774	3	4	1,01819505277977
6	4	1,01807869455275	6	8	1,01812744802958
9	5	1,01812392306805	9	11	1,01812744424061
11	6	1,01812683372319	22	12	1,01812744423363
14	7	1,01812740015987	103	13	1,01812744423417
17	8	1,01812744105230			
22	10	1,01812744419428			
27	12	1,01812744423361			
32	14	1,01812744423410			
38	16	1,01812744423411			
43	18	1,01812744423411			

Počáteční hodnota 1 byla volena blízko řešení, aby zaručeně ležela uvnitř kontraktivního intervalu. Snadno se přesvědčíme, že pro hodnoty vyšší jak 3 se po několika krocích dostaneme k obrovským číslům. Z tabulky je patrné, jak dobře je splněna lineární závislost mezi řádem dosažené přesnosti a počtem provedených kroků.

Použití Aitkinova procesu dosti urychlí tuto jednotvárnou konvergenci – při každém jeho užití je dosaženo zpřesnění o několik řádů. Po dosažení dvanácti řádů se však, zřejmě vli-

vem zaokrouhlovacích chyb, zpřesňování téměř zastavilo. V tomto okamžiku (chceme-li mít ještě lepší přesnost), je samozřejmě nejvhodnější použít metodu tečen, která bude velmi efektivní a dost spolehlivá.

Řešením druhé, premiové úlohy **S. 6** se budeme zabývat až příště. Na závěr vás čeká ještě poslední úloha. Nebudeme se již trápit fyzikální motivací, takže krátce:

Úloha S. 7 (5 bodů)

Napište (a zašlete) program, který určí všechny kořeny polynomu. S jeho pomocí naleznete čtyři řešení rovnice $x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 4x + 3 = 0$.

Kapitola 6

Úloha S. 5 se zabývala metodou prosté iterace. Řešitelé (kterých, pravda, nebylo mnoho) se často zabývali otázkou, pro jaké k ve vyjádření funkce $g(x) = f(x)k + x$ je konvergence nejrychlejší. Protože je to otázka zajímavá a i pro další problémy poučná, věnujme se jí trochu více. Z podmínky kontraktivnosti $|g'(x)| = |f'(x)k + 1| < 1$ pro všechny body x v námi zvoleném intervalu plyne, že k musí ležet v intervalu ohraničeném body 0 a $-2f'_{\max}$, což je maximum derivace na daném intervalu. Přitom musíme požadovat, aby byla fce monotónní, tj. derivace neměnila znaménko. V našem případě při přesném omezení kořene $(0,88 ; 1,02)$ zde fce $f(x)$ klesá, maximum derivace je v pravém krajním bodě zhruba 5,9. Přitom čím je derivace $g'(x)$ menší, tím rychleji spějeme k cíli – optimální hodnota je tedy $k = -1Df'_{\max}$, jak dokazuje i „experimentální“ srovnání rychlostí konvergence pro různá k . S menší hodnotou k se k cíli přibližujeme „opatrněji“, tj. pomalu, ale s jistou konvergencí.

Úloha S. 6 (problémová) se týkala otázky více rovnic (v našem případě sice šlo dosazením převést na rovnici jedinou a tu pak řešit známými metodami, ale obecně tomu tak být nemusí). Podle předchozího vzoru nebyl problém napsat soustavu iteračních rovnic pro fci $f(x)$ a její derivaci. Mohli jsme (hledáme čas dopadu \times a amplitudu A) volit např. tuto kombinaci:

$$\times = -(A - V \times + G \times^2 D^2 - A \cos(2 \pi i D T \times)) * K + \times$$

$$A = (V - G \times - A \sin(2 \pi i D T \times)) * 2 \pi i D T * J + A$$

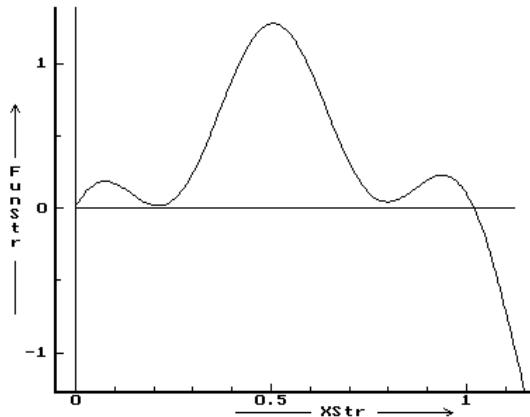
Parametry K a J (analogicky parametr k v předcházejícím příkladu) volíme raději malé (spíš než o rychlost nám jde o spolehlivost). Podstatná je ale volba znamének před závorkami – musíme je volit podle znamének derivace funkce na okolí kořene. To znamená, že musíme mít již jistou představu o chování funkce a nalézt takové okolí předpokládaného kořene, kde je fce monotónní. V našem případě činil počáteční odhad $\times = 0,20$ a $A = 0,45$. Pro přesnost výsledku máme buď podmínku $|f(x)|^2 + |f'(x)|^2 < \varepsilon$ nebo sledujeme rozdíl hodnot spočtený ve dvou následujících krocích. Po několika set krocích jsme pak dospěli k výsledku $\times = 0,20500$ a $A = 0,44403$.

Uspokojení touto přesností si zobrazíme, jak se mění v čase vzdálenost skokana a desky. Tato kontrola je nutná, neboť se může stát, že se skokan k desce blíží zespodu (což pochopitelně není přípustné). Jak ukazuje graf 2, v našem případě je vše v pořádku a navíc nám napovídá ještě jedno řešení v okolí $\times = 0,79$.

Při aplikaci nových počátečních podmínek musíme ale změnit obě znaménka před závorkami – při všech jiných volbách nedostaneme kontraktivnost a řešení nám „ujede“.

Další řešení tedy má hodnotu $x = 0,87819$ a $A = 0,7418$. Podíváme-li se však na situaci podrobněji, zjistíme, že jsme skokanův problém s tvrdostí dopadu vyřešili poněkud svérázně: prkno dostihlo skokana ještě během jeho letu vzhůru, jenom ho „lízlo“ a zůstalo pod ním. K podobné situaci došlo při letu dolů a nakonec skokan dopadl na desku tvrdě jako předtím. Nicméně podmínky úlohy byly splněny, a proto ti řešitelé, kteří dospěli k podobným výsledkům, byli náležitě odměněni.

Graf 2



Zbývá nám poslední **úloha S . 7**, kterou k našemu zklamání nikdo nevyřešil celou až do konce. Pouze jeden z vás dostal nějaké body za řešení problémů, které zde byly zadány před sestavením celého algoritmu.

Řešení prvního z nich (nebylo ho vlastně k výpočtu zapotřebí) bylo jednoduché: k úpravě Hornerova schématu pro polynomy s komplexními koeficienty stačilo přidat v šestém řádku jeden sčítanec `a_imag[i]`. Pro úsporu paměti přepíšeme celý algoritmus tak, abychom vystačili se dvěma vstupními poli koeficientů `a[i]` a `b[i]` (reálná a imaginární část); výsledkem je hodnota funkce `[c, d]` a derivace `[e, f]`.

```

c0 = a[0]
d0 = b[0]
e0 = a[0]
f0 = b[0]
zaocyklu
  c = c0*x-d0*y+a[j]
  d = d0*x+c0*y+b[j]
  c0 = c
  d0 = d
  pokud j < n potom
    e = e0*x-f0*y+c
    f = f0*x+e0*y+d
    e0 = e
    f0 = f
  konec
  j = j+1
  pokud j > n potom skonci konec
koncyklu

```

Dalším problémem bylo snížení stupně polynomu v případě, že známe jeden kořen a , tj. vydělením našeho polynomu výrazem $(x - a)$. Opět z důvodu jednoduchosti algoritmu máme indexy v opačném pořadí – v daném okamžiku pro polynom $(n - m)$ -tého stupně jsou nenulové od m -té do poslední n -té pozice. Nalezený komplexní kořen a má hodnotu $[x, y]$. Vlastní výpočet je relativně jednoduchý, méně zkušeným čtenářům však doporučujeme promyslet si činnost algoritmu a ověřit zpětně správnost získaných koeficientů.

```
k = m
```

```

a1 = a[k-1]
b1 = b[k-1]
a[k-1] = 0
b[k-1] = 0
zacyklu
  a0 = a[k]
  b0 = b[k]
  a[k] = a[k-1]*x - b[k-1]*y + a1
  b[k] = b[k-1]*x + a[k-1]*y + b1
  a1 = a0
  b1 = b0
      k = k + 1
  pokud k > n potom skonci konec
koncyklu

```

Nyní již můžeme sestavit celý algoritmus. Používáme Newtonovu metodu „zpomalenou“ faktorem 20 tak, že při kroku neskočíme přímo do předpovězeného místa kořene, ale jen se posuneme o malý kus v tomto směru. Takto se metoda podobá iterační s „automatickou“ volbou znaménka koeficientů. Přesto je stabilita činnosti algoritmu problematická – jelikož nemáme žádné počáteční informace o kořenech, volíme počáteční polohu náhodně s očekáváním, že k některému z nich dokonvergujeme. Možná vás překvapí, že zde jsou dvě podmínky na opuštění smyčky – splnění první z nich však neznamená nalezení kořene, ale fakt, že jmenovatel v následujících výpočtech je příliš malý a došlo by k „ústředu“, proto raději začneme hledat znovu na jiném místě.

```

zacyklu
  {zde je volána procedura s Hornerovým schematem}
  pokud (e^2 + f^2) < feps potom {spec} skonci konec
    x = x0 - (c*e-d*f)D20D(e*e + f*f)
    y = y0 - (c*f+d*e)D20D(e*e + f*f)
  pokud sqrt((x-x0)^2 + (y-y0)^2) < eps potom skonci konec
    x0 = x
    y0 = y
koncyklu

```

Takto tedy, i když často po velmi dlouhé době, neboť rychlost konvergence je s retardací velmi malá a ke kořenům se často dostáváme po dlouhých spirálách, získáme výsledky

$$-1,3898 \pm 2,1885 i;$$

$$0,38969 \pm 5,4258 i.$$

Využili jsme faktu z algebry, že je-li kořenem číslo $a + bi$, je jím i komplexně sdružené $a - bi$ (to se potvrdilo i na získaných výsledcích; zde jsou uvedeny jejich průměrné hodnoty).

Tolik tedy k poslední úloze SNP osmého ročníku. Ti, kteří dospěli až sem (a řešili alespoň některé zadané problémy), se doufám přesvědčili, že i suchopárná řešení matematických rovnic v sobě skrývají nemalou dávku dobrodružství při překonávání záudných úskalí a hledání nejlepších cest k jejich řešení. I na „jednoduchých“ příkladech (vzhledem k úlohám, které dnes řeší největší počítače) jsme mohli ukázat, kdy jsou které metody vhodnější a kdy je třeba vyrovnávat se i s prvkem náhody.

Řešení

Úloha I. 1 ... golf (4 body)

Vztahy vyjadřující okamžitou rychlost či polohu hmotného bodu vrženého šikmo vzhůru jsou dobře známé, nás zajímá jen vyjádření polohy míčku:

$$x = v_0 t \cos \varphi, \quad y = v_0 t \sin \varphi - \frac{gt^2}{2}.$$

Z tohoto parametrického vyjádření trajektorie snadno odvodíme explicitní závislost $y = y(x)$ vyloučením parametru t :

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \varphi}.$$

Tento vztah především použijeme v dalším řešení.

a) víme, že míček má dopadnout do důlku,

$$y = 0 \text{ pro } x = d \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{gd}{2v_0^2 \cos^2 \varphi}. \text{ Po jednoduché úpravě dostáváme } v_0^2 = \frac{gd}{\sin 2\varphi}.$$

b) míček musí také přeletět překážku,

$$y > h \text{ pro } x = l \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi > \frac{h}{l} \frac{d}{d-l}.$$

Vztahy pro počáteční rychlost v_0 a elevační úhel φ jsou řešením našeho problému.

Druhou část úlohy snadno zodpovíme, podíváme-li se na určení elevačního úhlu. V zadání nebylo řečeno, jak vysoká je přední stěna překážky, automaticky se předpokládalo, že bude vysoká také h . Za předpokladu, že překážka bude mít v kolmém řezu tvar čtyřúhelníka o stranách $h_1, h_2, l_2 - l_1$, stačí, aby elevační úhel byl

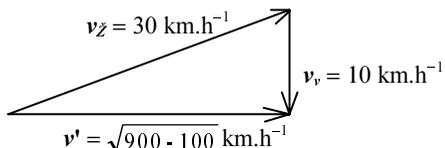
$$\operatorname{tg} \varphi > \max_{i=1,2} \left(\frac{h_i}{l_i} \frac{d}{d-l_i} \right).$$

Úloha byla schválně zadána tak, jak před naším golfařem vyplynula během golfování. Proto se musím ohradit proti tomu, že zadání nebylo jasně formulované, naopak bylo na vás, jakou si zvolíte dráhu míčku. Pokud jste někdy viděli golf, je vám asi jasné, že výše zmíněné řešení by moc nefungovalo (míček by z důlku vyskočil). Je tedy zapotřebí vzít v potaz koeficient tření míčku (co myslíte, valivého či smykového?) po povrchu hřiště (tráva, beton), koeficient útlumu při dopadu míčku atd. a dělat příslušné modely lépe vystihující danou skutečnost. Fyzika tkví už v tom, jaký model zvolíte, proto není vhodné tento model přesně v zadání stanovovat.

Úloha I. 2 ... Mňága a Žďorp (5 bodů)

Ve všech třech případech se Mňága a Žďorp potkají za dobu $t = sD(v_M + v_Z) = 1$ h, kde v_M a v_Z jsou rychlosti Mňágy a Žďorpa ($v_M = 15 \text{ km.h}^{-1}$, $v_Z = 25 \text{ km.h}^{-1}$). V případě a) je rychlost Žofky vzhledem k silnici 30 km.h^{-1} , a tak za hodinu nalétá 30 km . Případ c) je obdobný, jenom rychlost Žofky vzhledem k silnici je jiná. Včel-

Obr. 12



ku totiž neustále strhává vítr, takže aby letěla podél silnice, musí v soustavě spjaté s větrem letět „našikmo“, jak je vidět na obr. 12. Rychlost Žofky vůči silnici je tedy $10 \cdot \sqrt{8}$ km.h⁻¹, takže včelka za hodinu nalétá $10 \cdot \sqrt{8}$ km.

Nejsložitější je část *b*), neboť letí-li Žofka od Postoloprty, má rychlost $v_1 = 20$ km.h⁻¹, letí-li pak od Kožuchova, má rychlost $v_2 = 40$ km.h⁻¹. Spočteme nejprve její průměrnou rychlost na úseku Mňága-Žďorop-Mňága. Žofka dorazí k Žďoropu za dobu $t_1 = lD(v_1 + v_2)$, kde l je vzdálenost Mňága-Žďorop v okamžiku odletu Žofky od Mňágy. Mňága za tuto dobu urazí dráhu $l_M = v_M t_1$. Žofka dorazí nazpět k Mňágovi za dobu $t_2 = (v_1 t_1 - l_M)D(v_2 + v_M)$. Průměrná rychlost na tomto úseku $v_p = (2v_1 v_2 + v_1 v_M - v_2 v_M)D(v_1 + v_2)$, číselně $v_p = 130D6$ km.h⁻¹. Jak jsme mohli očekávat, průměrná rychlost Žofky nezávisí na počáteční vzdálenosti mezi Mňágou a Žďorpem, takže musí být rovna celkové průměrné rychlosti, protože celkovou trajektorii včelky můžeme složit z těchto úseků. Žofka pak v případě *b*) urazí vzdálenost $d = 130D6$ km.h⁻¹. Mnozí z vás vyjádřili dráhu včelky ve tvaru nekonečné řady, jejíž součet pak počítali numericky, což není tak náročné jako přímé sečtení řady.

Úloha I. 3 ... *disky* (4 body)

Označení:

- t – tloušťka vrstvy vody
- d – průměr disku
- σ – povrchové napětí vody

A) *Mezi diský je voda.*

V tomto případě voda mezi diský vytvoří jistý meniskus, jehož tvar je parabolický (teoretické odvození viz literatura). Pro malé poloměry křivosti se parabola běžně aproximuje kružnicí.

Síla, působící proti odtržení, má svůj původ v tlaku (resp. podtlaku), který vytváří meniskus vody mezi válci. Jeho velikost je nepřímo úměrná poloměru zakřivení r . Z toho plyne, že největší bude při nejmenším r , a poněvadž r se s odtrháváním zvětšuje, bude největší na počátku odtrhávání. Můžeme tedy položit $r = tD2$.

Jelikož $d < C r$, můžeme tlak počítat jako od válcové plochy (kapilára – část koule – $2\sigma Dr$, mezi deskami – část válce – σDr).

$$p = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \cos \alpha, \text{ kde } r_1 \text{ a } r_2 \text{ jsou poloměry křivosti dvou na sebe kolmých řezů.}$$

$$p = \sigma \left(\frac{1}{r} - \frac{2}{d} \right) \cos \alpha \approx \frac{\sigma}{r}.$$

Disk má plochu $S = \pi d^2 / 4$. Pro odtržení je třeba působit na oba diský silou

$$F = pS \approx 2,3 \text{ N.}$$

Pro zajímavost odhadneme vzdálenost, o kterou je třeba oba diský k odtržení oddálit. Rozdělením kapaliny na každý disk zvlášť se zvětší její povrch o $2S$, energie o $\sigma \cdot 2S$. Tato změna musí být rovna vykonané práci $W = Fs$ – odtud dostaneme $s \approx t$. Obě diský se definitivně oddělí při vzdálenosti $2t$.

B) *Mezi diský je hedvábný papír.*

Jak již bylo v zadání naznačeno, v tomto případě přilnou diský k sobě tak, že se mezi ně nedostane vzduch, takže nemůže působit ani atmosférický tlak z této strany. Důsledkem tohoto je, že síla na odtržení musí překonávat atmosférický tlak.

Na oba diský je třeba působit silou $F = p_a S = 800 \text{ N}$.

V případě *A*) atmosférický tlak působí z obou stran, neboť působí z boku na vodní meniskus (tlak se šíří všemi směry) a tedy i z vnitřní strany disků.

Poznámka: Prosim pochopte, že vzorec $F = \sigma l$ je hezký, ale platí jen v některých speciálních případech. Obecně platí vzorec $E = \sigma S$, který vychází z definice.

Úloha I. 4 ... setrvačnost (5 bodů)

Autobus se rozjíždí se zrychlením a vpřed. V rozjíždějícím se autobuse působí na všechno uvnitř setrvačná síla (ve směru zpětném). Tato síla působí na vše, podobně jako síla gravitační.

Balónek plný helia se ve vzduchu vznáší, je nadlehčován podle známého Archimédova principu – uvolňuje místo dole (ve směru gravitačního zrychlení) vzduchu, který má větší hustotu než balónek. Kdyby nebyl připevněn na šňůrce, uletěl by vzhůru. Ze zcela stejného důvodu se balónek při rozjíždění autobusu tlačí dopředu (opačně než působí setrvačné zrychlení – následek Archimédova zákona). Tolik kvalitativní řešení, které jsme chtěli VIDĚT!

Uvážíme-li, že balónek se tlačí vždy proti působícímu zrychlení, můžeme při rozjíždění autobusu složit zrychlení gravitační se setrvačným a víme, že balónek se bude tlčit proti této výslednici (tj. nahoru a dopředu). Můžeme také určit přesnou polohu, kterou zaujme. Natáhne totiž provázek, který ho drží, ve směru opačném ke směru výslednice zrychlení. Balónek na provázku se odkloní vpřed o $\varphi = \arctg(a/Dg)$. Tolik kvantitativní řešení, což jste NEMUSELI!

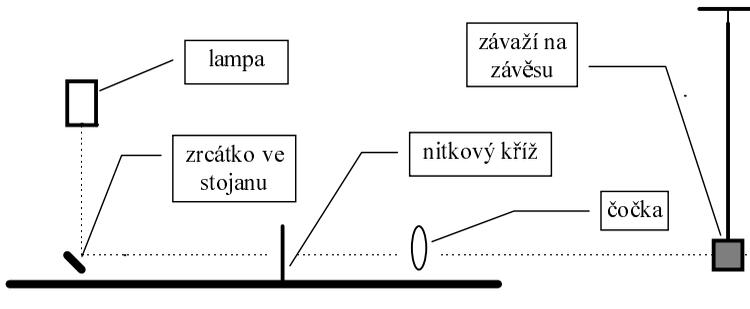
Úloha I. 5 ... bungee-jumping (5 bodů)

Komentáře k bodům a), b):

Především, úloha byla experimentální, což někteří řešitelé zřejmě nepostřehli a zkoušeli odvozovat „experimentální“ výsledky z přiblížení gumového vlákna coby lineárního harmonického oscilátoru, aniž by si však vůbec uvědomili meze použitelnosti tohoto přístupu. Tedy vězte, že guma se vesměs nechová v celé oblasti pružných deformací stejně jako pružinka. Prověření tohoto tvrzení bych přenechal vaší experimentální erudici, abyste z této úlohy nevyšli tak lehce. Jiným, kteří skutečně nějaká měření provedli, ale zachovali se k plodům své práce více nežli macešsky, bych zase doporučil více se na své výsledky spolehnout a pro evidentně nelineární závislost prodloužení na hmotnosti tvrdošijně nepředpokládat, že guma se bude chovat stejně lineárně jako pružina. Můžete si, ex post, provést následující srovnávací měření: v posledním bodě komentářů k řešení je odvozen vztah (3) pro maximální hloubku poklesu závaží hmotnosti m při lineárním chování gumy o tuhosti k . Měření k provedete snadno a celkem přesně staticky a srovnáním teoretické předpovědi plynoucí z výše popsaného a z vašich experimentálních výsledků zjistíte, nakolik je ve vašem případě oprávněná lineární aproximace.

Co se týká samotného měření v bodech *a*) a *b*), shledal jsem problematičtější odměřování maximální hloubky vzhledem k jeho možné nepřesnosti. Řešení, jaké jsem nakonec použil, je popsáno na obrázku. Měřil jsem doma, v improvizovaných podmínkách, takže tomu odpovídaly i použité pomůcky. Jako zdroj světla jsem nasadil stolní lampičku stíněnou kartónovým filtrem se šterbinou. Obvyčné zrcátko bylo upevněno ve stolku sestaveném ze stavebnice *Merkur*, ke kterému byl připevněn úhloměr kvůli přesnému (v rámci možnosti) seřízení přístroje, nitkový kříž byl vyroben z kreslicí čtvrtky a nití a nastaven za zrcátko tak, aby vzdálenosti. Nevýhodou tohoto uspořádání je nutnost manipulovat se závěsem, protože optika zůstává po seřízení pevná. Tato nevýhoda je částečně odstraněna pevným společným závěsem pro měřidlo i gumu. Další věci jsou pak již zřejmé z obr. 13.

Obr. 13



Ad c)

Odhad maximálního zrychlení nebyla jednoduchá věc, pokud jste předem neuvažovali pouze lineární pružnost (tolikrát zmiňovaný harmonický oscilátor). To jste vesměs udělali, ale chyběla z toho plynoucí základní věc: na základě tohoto předpokladu a změřených vlastností gumy určit minimální mohutnost vašeho lana. Zřejmě šlo o to určit z vašich křivek, kde že se guma chová (pro jaká m , l , potažmo průřez) jako pružinka o tuhosti k . Máte-li mez lineárního chování a pracujete nyní pro gumové lano, které se pro člověka hmotnosti m chová jako pružinka, lze vydedukovat toto maximální zrychlení snadno a mnozí z vás to také udělali. Pro ilustraci tedy postup přes energetické úvahy, o kterém jsem dodatečně zjistil, že byl skutečně použit jedním z vás.

Na těleso působí tíhová síla G a síla pružnosti gumového vlákna F_p (viz obr. 14). Od nich je odvozeno zrychlení z hlediska inerciální soustavy spjaté s vnějším pozorovatelem, tedy ne s tím nešťastníkem na konci lana. Hledáme-li extrémní hodnoty zrychlení, pak je zřejmé, že extrémem bude buď zrychlení v průběhu volného pádu, nebo zrychlení v bodě obratu závaží. To uvidíte, jakmile si napíšete druhý Newtonův zákon pro těleso na konci lana,

$$(1) \quad ma = mg - k(x - x_0) \quad \text{pro } x > x_0.$$

V bodě obratu je zrychlení nutně záporné vzhledem k naší orientaci osy x , z čehož plyne podmínka

$$(2) \quad mgDk + x < x_0.$$

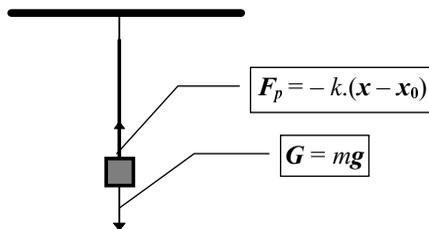
Pro bod obratu současně platí, že rychlost člověka je v něm nulová, tedy kinetická energie je nulová. Pokud předpokládáme, že onen nešťastník na konci našeho lana začíná skok z klidu, tedy bez vertikální složky počáteční rychlosti, platí zřejmě

$$(3) \quad mv^2D2 = mgx \quad \text{pro volný pád.}$$

Kinetická energie člověka odpovídá práci vykonané tíhovým polem, během brždění gumovým lanem zřejmě dojde k její „akumulaci“ v podobě potenciální energie pružnosti lana. Tedy $mgx = kD2.(x - x_0)^2$.

Řešením odpovídající kvadratické rovnice dostaneme dva kořeny. Ten, který má pro nás smysl určuje podmínka (2):

Obr. 14



$$(4) \quad x = x_0 + \frac{mg}{k} + \frac{mg}{k} \sqrt{\frac{2k}{mg} x_0 + 1}.$$

Pro zrychlení snadno obdržíme dosazením do rovnice (1)

$$a = -g \sqrt{\frac{2k}{mg} x_0 + 1}.$$

Toto vše ovšem platí pro statický průřez lana S C S_{MEZNI} při daném x , m s tolerancí určenou volbou S a přesností změřeného k . Pokud vaše guma vykazovala jinou závislost nežli lineární, můžete provést zcela analogické úvahy, jen je třeba dát si pozor, kde končí oblast pružnosti a začíná oblast nevratných deformací, pro něž se nezachovává mechanická energie. Myslím, že bychom mohli tomu chudákovi na konci lana dát větší šanci na přežití a do těchto oblastí deformace se nepouštět!

Úloha II . 1 ... přistání kosmické sondy (4 body)

Označme p tlak atmosféry a ρ hustotu atmosféry ve výšce h nad povrchem planety. Necht' dp je malá změna tlaku zapříčiněná malou změnou výšky h : $dp = -\rho g dh$.

Ze stavové rovnice je vyjádříme tlak atmosféry

$$p = \frac{\rho}{M_m} RT.$$

Dále víme, že $dh = -v dt$, kde v je ona rychlost, kterou sonda přistává. Z těchto tří vztahů už lze jednoduše vyjádřit

$$(*) \quad v = \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} \frac{RT}{M_m g}.$$

T a g známe z informací, které zjistila sonda na povrchu planety, a hodnotu $1/p \cdot dp/dt$ lze vyčíst z daného grafu, neboť dp/dt – derivaci zaznamenané funkce je možno změřit jako směrnici tečny ke grafu a hledaná hodnota pak odpovídá délce vyznačeného úseku v grafu (viz obr. 15).

$$\text{Tedy } \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{750} \text{ s}^{-1} \text{ a odtud } v = 17,6 \text{ m.s}^{-1}.$$

Z rovnice (*) lze vyjádřit

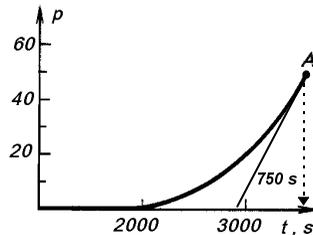
$$T = g \left(p \frac{dt}{dp} \right) \frac{M_m v}{R}.$$

Je třeba zjistit hodnotu $p \frac{dt}{dp}$ pro výšku $h' = 12$ km. Z grafu odečteme celkovou dobu pohybu sondy $t = 3580$ s. Sonda se pohybuje konstantní rychlostí, ve výšce h' bude v čase

$$t' = t - \frac{h'}{v} = \left(3580 - \frac{12000}{17,6} \right) \text{ s} \approx 2900 \text{ s}.$$

Pro tento čas z grafu odečteme $p \frac{dt}{dp} = 583$ s a odtud $T' = 540$ K.

Obr. 15

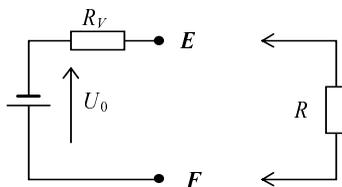


Úloha II . 2 ... schémátka (5 bodů)

Vzhledem k tomu, že obvod obsahuje pouze lineární součástky, je možno celé schéma překreslit (viz obr. 16). Zdroj má napětí U (napětí naměřené naprázdno) a $R_V = U D I$, I je proud nakrátko – mezi body E a F . Když teď připojíme mezi E a F odpor R , bude jím protékat proud I , zjevně daný vztahem

$$I = \frac{U_0}{R + R_V} = \frac{U_0}{R + \frac{U_0}{I_0}} = \frac{U_0 I_0}{U_0 + R I_0}.$$

Takto, víceméně, řešila úlohu většina z vás. Můj obdiv si zasloužila Marta Bednářová, která úlohu řešila klasicky, tj. za použití Kirchhoffových zákonů.

Obr. 16**Úloha II . 3 ... nehoda ve vakuu (5 bodů)**

Většina řešitelů zajistě postřehla, že formulace této úlohy byla jistou nadsázkou, která měla zpestit jinak většinou řádní zadání fyzikálních problémů. Pravda, objevily se časté námitky proti „realnosti“ takové scény („jak můžou vydržet teplotu přes 100°C...“ a „když zvládnou to, jak se na nich podepíší ostatní účinky záření tak blízké hvězdy...“ a „neexploduje náhodou lidský organismus ve vakuu?...“). Berte to jako autorskou licenci, tak často povolovanou tvůrcům sci-fi a hororů, a zaměřme se na zdůrazněný fyzikální problém: bude tlak vzduchu ve druhém skafandru po zákroku dostatečný k přežití?

Než přistoupíme k řešení, definujme si situaci: Máme dva totožné skafandry (až na přírodní šňůru) s objemem vzduchu V mezi tělem a vnější vrstvou. Vzduch použitý k jejich plnění budeme považovat za ideální plyn, což, jak většina z vás věděla, znamená splnění jednoduchého vztahu mezi teplotou T (udané ovšem v kelvinech), tlakem p a objemem V , tzv. stavové rovnice, $pV = nRT$ (n je počet molů látky v uvažovaném objemu a R je univerzální plynová konstanta). Počáteční teplotu a tlak v dobrém skafandru budeme značit nečárkovanými veličinami, látkové množství n plynu se zachovává během celé operace.

Jak již bývá zvykem, i tato úloha umožňovala více interpretací. Značná část řešitelů tento problém odhalila a náležitě prodiskutovala a byla za to povětšinou odměněna přiměřeným bonusem. Mnozí z vás se ale nechali svést, a dospěli tak k řešení poněkud jiného problému, než bylo námi zamýšleno.

Šlo o otázku, zda potřebný přetlak $\Delta p = 1,1$ atm dostahuje k trvalému vyfouknutí nějaké překážky ve spojovací hadici či je pouze nutný k dočasnému zprůchodnění jistého příškrceného místa.

První varianta činí úlohu dosti triviální: přetlaku Δp dosáhnou kosmonauti už při teplotě 57°C a následně po uvolnění ucpaného místa dojde k vyrovnání tlaků v obou skafandrech. Nezávisle na dalším průběhu operace se tlak ve skafandrech po ochlazení na původní teplotu bude rovnat

$$p'' = \frac{nRT}{2V} = \frac{p}{2}, \text{ tedy } 0,5 \text{ atm, což by mělo na přežití stačit.}$$

Jsou tu ovšem dvě námitky, které vadí uvedeným úvahám na kráse. Jednak, proč žhavit kosmonauty na takové teploty, když k dosažení cíle stačí celkem „snesitelných“ necelých šedesát stupňů. Druhak, po zprůchodnění trubice je přeci nejpřirozenější spustit fungující přívod jednoho skafandru a doplnit vzduch u obou na normální tlak 1 atm. To naznačuje, že tato verze nebude ta pravá.

Ve skutečnosti má operace proběhnout jinak. Po překročení teploty 57°C začne pronikat plyn do prázdného skafandru. Jedná se sice o expanzi, ale nikoli adiabatickou, neboť se zde

nekoná žádná práce – plyn se rozpíná do vakua. Zahřívání je dostatečně intenzivní, a proto se i plyn ve druhém skafandru rychle ohřeje na příslušnou teplotu $T' = 380$ K. Zanedlouho se dosáhne rovnováhy, kdy plyn v prvním skafandru má tlak právě o Δp vyšší než v tom druhém a v obou je příslušná teplota T' .

Podmínky této rovnováhy lze zapsat následujícími rovnicemi

$$\frac{n'RT'}{V} = p' = p'' + \Delta p = \frac{(n - n')RT'}{V} + \Delta p \quad \Rightarrow \quad n' = \frac{n}{2} \left(1 + \frac{\Delta p T'}{p T'} \right),$$

kde n' je množství látky, co zbylo v prvním skafandru, p' je jeho tlak při teplotě T' a p'' je odpovídající tlak v druhém skafandru.

Plyn v obou skafandrech je poté ochlazen na teplotu $T = 300$ K. Tlak vzduchu v prvním poklesne na konečnou hodnotu

$$p''' = \frac{p}{2} \left(1 + \frac{\Delta p T'}{p T'} \right), \text{ v druhém na } p^{iv} = \frac{p}{2} \left(1 - \frac{\Delta p T'}{p T'} \right) = 6600 \text{ Pa}.$$

Tento tlak odpovídá zemské atmosféře ve výšce 19 km, což je daleko nad hranicí 6–7 km se snesitelným tlakem mezi 40–50 kPa.

Vzhledem k dvoji možné interpretaci úlohy nebylo ani hodnocení jednoznačné. Značná část řešitelů se spokojila s prvním, poměrně jednoduchým řešením. Je smutné, že ani tak závažná otázka, jakou je přežití kosmonautů, je nedonutila, aby zvážili oba odlišné případy. I mezi výsledky těch řešitelů, kteří se zabývali druhou verzí úlohy, se objevily rozdíly způsobené především odlišným pojetím expanze (mnozí ji považovali za adiabatickou). Jistým bonusem byli ohodnoceni ti, kteří zvážili a prodiskutovali všechny možné okolnosti této nehody. Naopak překvapivě mnoho z vás nedokázalo napsat konečný vztah v obecném tvaru, tj. v řeči proměnných p , T , T' a Δp , ale dosazovalo průběžně mezivýsledky, což i při přesnosti vyčíslení na pět či více platných míst znamená zbytečnou kumulaci chyb. Z pozice opravovatelů bychom vás tedy chtěli vybidnout, abyste své výsledky uváděli v co možná nejobecnějším tvaru (bude-li to ve vašich silách).

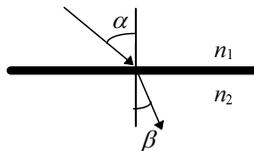
Úloha II.4 ... pavouk a moucha (5 bodů)

Tato úloha byla jednoduchá, ale přesto nemnoho z vás ji vyřešilo důsledně a precizně. Vzhledem k tomu, že v zadání bylo dáno, že velikost pavouka i velikost mouchy jsou zanedbatelné oproti poloměru koule, bral jsem za řešení postačující k získání plného počtu bodů úvahu o viditelnosti mouchy přes kouli. K jejímu provedení stačilo vyšetřit chování mezního paprsku, který je pavouk ještě schopen zachytit. Ten odpovídá takovému paprsku, jenž (dle Snellova zákona lomu) ještě může vystoupit z prostředí opticky hustšího, v našem případě skla, do prostředí opticky řidšího, to jest vzduchu. Snellův zákon má tvar

$$(1) \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}, \text{ jak je vidět z obr. 17.}$$

Vzhledem k tomu, že index lomu vzduchu je s naší přesností roven jedné a index lomu skla byl dán hodnotou $n \approx 1,43$, je tím dána úloha fyzikálně jednoznačně a zbytek je geometrie.

Obr. 17



Tedy tedy k té geometrii. Jelikož jsme zanedbali rozměry pavouka a mouchy, redukovali jsme je vlastně na body na kouli a právě tyto dva body a střed koule nám určují rovinu, ve které budeme pracovat. Vše je vidět na obr. 18.

Nyní je již zřejmé, že pro mezní hodnotu úhlu β můžeme ze zákona (1) psát

$$(2) \quad \beta = \arcsin \frac{1}{n}$$

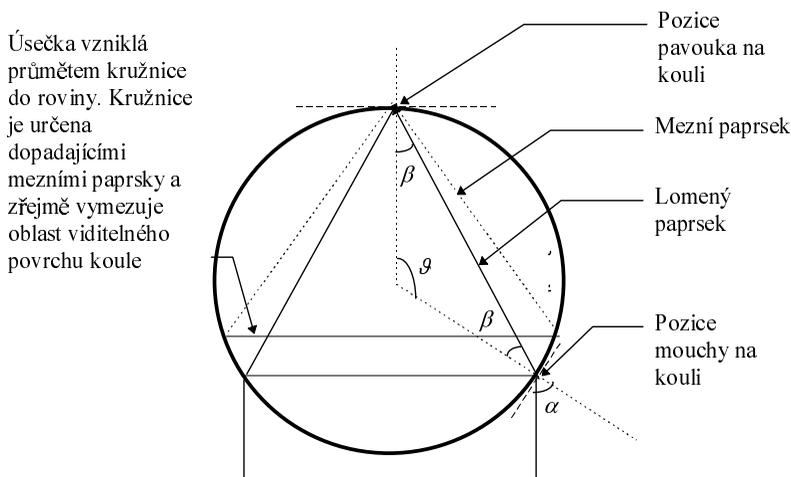
a pro úhel ϑ vytínající příslušný oblouk kružnice v rovině řezu

$$(3) \quad \vartheta = \pi - 2 \cdot \arcsin \frac{1}{n},$$

vzdálenost moucha-pavouk na sféře musí být tedy větší nežli $d = r\vartheta$, aby byla moucha pro pavouka viditelná. Pro naši hodnotu indexu lomu skla snadno dopočteme, že $\beta \approx \pi/4$, a pro nás z toho plyne, že moucha je pro pavouka viditelná zhruba na odvrácené polokouli.

Tím je hotovo standardní řešení. Zajímavější je ovšem uvažovat, že moucha i pavouk mají nějaké výšky h_1, h_2 a pro ně najít řešení této úlohy jakožto pro dva parametry. Nebudu je zde však pro jejich složitost uvádět.

Obr. 18



Úloha II . 5 ... *problém líftboye* (4 body)

Kupodivu největší problém vám činilo rozmyslet si, co vlastně máte počítat. Pracovní doba odměřená hodinami znamená, jak dlouho podle údaje na ciferníku kyvadlových hodin bude líftboy pracovat. Ukáží-li hodiny konec pracovní doby dříve (jdou rychleji), má ji náš perfekcionista kratší.

To, že jdou hodiny rychleji, zase znamená, že počet tiků (kmitů kyvadla) za jednotku času je větší než v klidu. Počítat v tomto případě s relativistickými efekty je značně nemístné. Ať už se speciálními (při zrychlení se nejedná o inerciální soustavu) či s obecnými (ano, OTR lze použít na neinerciální soustavy, ale používá se až při extrémních hodnotách gravitačního pole či zrychlení – což vskutku není případ reálného výtahu). Pokud bylo napsáno v úvodu k celému semináři, že úlohy jsou řešitelné středoškolskými znalostmi fyziky, byla

to pravda (a nesmějte se tolik!). Takže je sice hezké, že se někteří z vás nebojí na(o)psat vzorec z OTR, ale nejdřív by ten příklad mohli spočítat tak, jak měl být.

Chod hodin je určen periodou kyvadla. Můžeme ho pokládat za fyzické,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgr}},$$

nebo za matematické,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Důležitá je závislost na zrychlení – ostatní faktory se v tomto případě nemění. Zanedbání provedené při odvození tohoto vzorce (malé kmity) je také oprávněné. Nejde nám o číselný výsledek, ale o kvalitativní odhad a člen reprezentovaný uvedeným vzorcem je určující. Zrychlení se mění dvěma způsoby. Působením setrvačné síly při rozjezdu či brzdění výtahu (v dolní části pohybu vždy $g + a$ a v horní naopak $g - a$). A jak někteří správně podotkli, také změnou výšky nad Zemí. V tomto případě lze uvažovat vliv vzdálenosti od Země na tíhové zrychlení celé, nejen na gravitační část. Můžeme však tuto nepatrnou změnu zanedbat (stěžovala by zbytečně výpočet), případně diskutovat její vliv (viz níže).

Pro počet kmitů kyvadla za stejnou dobu v klidu a při cestě výtahem tedy platí

$$n_0 = (t_1 + t_2 + t_3) \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}},$$

$$n = t_1 \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g+a}{l}} + t_2 \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} + t_3 \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g-a}{l}},$$

kde jsme pro jednoduchost použili vzorec pro periodu matematického kyvadla. Dejme tomu, že v případě fyzikálního jsou všechny neměnné faktory (délka kyvadla, moment setrvačnosti, hmotnost) zahrnuty do zde uvedené délky kyvadla l . Časy t_1 a t_3 jsou ze zadání stejné, část rovnoměrného pohybu (t_2) přispívá k oběma údajům stejně – nemusíme ji tedy uvažovat. Celý problém se redukuje na určení správného znaménka nerovnosti

$$n_0 \neq n, \quad 2\sqrt{g} \neq \sqrt{g+a} + \sqrt{g-a},$$

což lze dělat například pomocí Taylorova rozvoje (pokud to umíme) nebo prostými ekvivalentními úpravami. Pouze při umocňování je třeba si dát pozor na nezápornost obou stran. Nakonec dojdeme k výsledku

$$0 \neq -a^2 \Rightarrow 0 > -a^2 \Rightarrow n_0 > n.$$

Vidíme, že za stejnou dobu ukáží hodiny ve výtahu menší čas – pracovní dobu bude mít liftboy delší.

Vrátíme se ke změně tíhového zrychlení – se stoupající výškou klesá, perioda kmitů roste a jejich počet ubývá – byly-li hodiny seřizeny na úroveň přízemí, ve vyšších polohách jdou pomaleji a pracovní doba bude ještě o něco delší.

Některým vyšel správný výsledek i při pouhém porovnání klidové periody a průměrné periody za dobu pohybu výtahu, ale za to vděčí jen konkrétnímu tvaru závislosti. Obecně totiž neplatí matematická ekvivalence

$$a + b > c \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{c}.$$

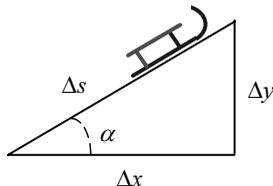
To jen na vysvětlenou, proč jsem jim nedal víc jak 50% bodů, fakt si myslím, že tenhle příklad byl dost jednoduchý a vyžadoval spíše zdravý rozum než nějaké pokročilé znalosti.

Úloha III . 1 ... zasněžená (5 bodů)

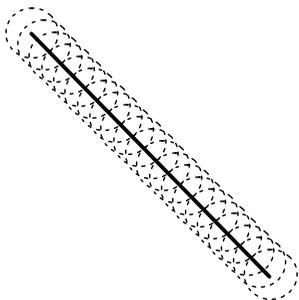
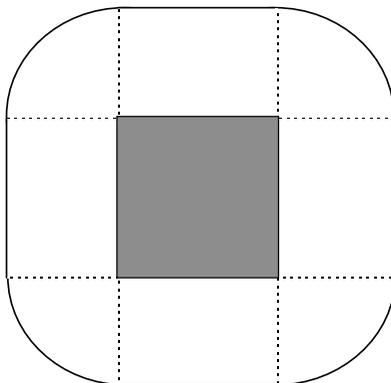
Uvažujme nejprve element dráhy Δs (viz obr. 19). Průmět síly F do směru pohybu je zřejmě $F = mgf \cos\alpha + mg \sin\alpha$. Element práce ΔW vykonané podél této dráhy je pak $\Delta W = F\Delta s$, neboli v našem případě máme $\Delta W = (mgf \cos\alpha + mg \sin\alpha)\Delta s$.

Jelikož $\cos\alpha = \Delta x/\Delta s$ a $\sin\alpha = \Delta y/\Delta s$, dostáváme $\Delta W = mgf\Delta x + mg\Delta y$. Po sečtení všech příspěvků $W = mgfx + mgy$. Práce potřebná na vytažení sánek nezávisí na tvaru kopce, jak většina z vás správně uvedla.

Nejčastější chybou bylo nesprávné použití vztahu $W = Fs$, který platí pouze tehdy, má-li síla F stejný směr jako dráha s . Obecně platí $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = Fs \cos\beta$, kde β je úhel mezi vektory F a s .

Obr. 19**Úloha III . 2 ... kostka (3 body)**

Po vhození hexaedru do vody se vzniklé vlnění šíří podle Huygensova(-Fresnelova) principu. Znamená to, že chceme-li znát novou vlnoplochu, zkonstruujeme ji jako vnější tečnou obálku tzv. elementárních vlnoploch. Tyto mají kruhový tvar a vycházejí ze všech bodů vlnoplochy staré (situaci ilustruje obr. 20). Vlnoplocha po vhození hexaedru bude tedy vypadat asi jako na obr. 21. Z obrázku je také patrné, jak bude vlnoplocha vypadat ve velké vzdálenosti – bude se blížit kružnici.

Obr. 20**Obr. 21**

Skutečný obrázek situace je poněkud složitější. Z experimentu bychom zjistili, že kruhový tvar vlnoplochy zpozorujeme mnohem dříve, než by odpovídalo naší představě. Část vlnoplochy vzniklá od hrany bude pochopitelně mnohem výraznější než část vzniklá od vrcholu, elementární vlnoplochy se tedy budou šířit převážně od „hranové“ části vlnoplochy. Proto i amplituda vln šířících se od hran bude větší a tím i jejich rychlost, neboť rychlost vln závisí na amplitudě, což jsme v našem řešení neuvažovali.

Úloha III . 3 ... polytropa na zahřátí (5 bodů)

Nejprve stanovíme závislost počtu srážek N_S za jednotku času na stavových veličinách p , V a T . Jedna částice se za jednotku času srazí průměrně x krát, přičemž $x = vDl$, kde v je střední rychlost atomu a l je střední délka dráhy mezi srážkami (tzv. střední volná dráha). Střední rychlost v závisí pouze na teplotě T a je úměrná \sqrt{T} ($v \sim \sqrt{T}$). Střední volnou dráhu spočteme za zjednodušujícího předpokladu, že všechny ostatní atomy stojí. Bude-li průměr atomu D , potom se srazí s první částicí, jejíž střed bude ve válci s podstavou o poloměru D a s osou ve směru pohybu atomu. Střední volná dráha je taková výška válce, při níž se v něm nachází právě jedna částice, neboli $n\pi D^2 = 1$, kde n je počet atomů v jednotce objemu. Pro počet srážek částice x tak dostáváme

$$x = \pi v D^2 n = (\pi v D^2 N) DV,$$

kde N je celkový počet atomů a V celkový objem plynu. Pokud bychom chtěli započítat pohyb ostatních atomů, museli bychom místo střední rychlosti atomu v uvažovat střední vzájemnou rychlost mezi částicemi, což by se nakonec projevilo pro náš účel nepodstatným faktorem $\sqrt{2}$.

Mezi celkovým počtem srážek N_S a počtem srážek jedné částice x platí jednoduchý vztah $N_S = 0,5 Nx$ (máme N částic, z nichž každá se za jednotku času srazí x krát, faktor 0,5 je tam proto, abychom nezapočítávali srážku dvakrát). Jestliže počet částic N zůstává během děje konstantní, dostáváme pro závislost celkového počtu srážek N_S na stavových veličinách $N_S \sim \sqrt{TDV}$.

Má-li se zachovávat celkový počet srážek, pak $\sqrt{TDV} = K_1$, takže $T = K_1^2 V^2$. Po dosazení do stavové rovnice $pV = K_2 K_1^2 V^2$ obdržíme $pV^{-1} = K_3$, kde K_1, K_2, K_3 jsou nějaké konstanty. V případě *b)* je tedy $\alpha = -1$.

Počet srážek v jednotce objemu je zřejmě $N_S DV \sim \sqrt{TDV^2}$. Obdobným postupem dostaneme $\sqrt{TDV^2} = L_1$; $T = L_1^2 V^4$; $pV = L_2 L_1^2 V^4$; $pV^{-3} = L_3$, kde L_1, L_2, L_3 jsou opět konstanty. V případě *a)* vyšlo $\alpha = -3$.

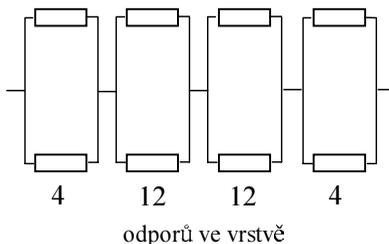
Spousta z vás uvažovala, že tlak je úměrný počtu srážek N_S . Tato přímá souvislost existuje pouze pro počet narážů částic na stěnu. Počet těchto srážek je však při běžných podmínkách zanedbatelný vůči počtu srážek mezi atomy.

Úloha III . 4 ... odpor 4-rozměrné krychle (5 bodů)

Odpor čtyřrozměrné krychle byl pro vás snadnějším úkolem, než jsem čekal. Téměř všichni jste jej určili správně a většina z vás se pokusila s větším či menším úspěchem výsledkem zobecnit na n rozměrů. Nyní již ke správnému řešení.

Čtyřrozměrnou krychli je možno vzhledem k symetrii úlohy překreslit do ekvivalentního zapojení podle obr. 22, neboť příslušné vrcholy jsou na stejné hladině potenciálu. V i -té vrstvě je m_i odporů a každým teče proud IDm_i , úbytek napětí na dané vrstvě je $RIDm_i$. Celkový odpor proto bude (vrstev máme $n = \text{dimenze prostoru}$)

$$R_{\text{celk}} = R \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i}.$$

Obr. 22

Jediným úkolem zůstává určení m_i . Následující způsob řešení se vyskytoval nejčastěji. Mějme n -rozměrný prostor, pravouhlou soustavu souřadnou. Vrcholy krychle leží v bodech se souřadnicemi $(0,0,\dots,0)$ až $(1,1,\dots,1)$ (zápis souřadnice bodu může obsahovat pouze 1 nebo 0). Definujme vzdálenost vrcholu od počátku jako minimální počet hran, přes které musíme projít. Pro počet v_d vrcholů vzdálených d od počátku platí vztah $v_d = \binom{n}{d}$. Z vrcholu ve vzdálenosti d vede $(n-d)$ odporů k vrcholům ve vzdálenosti $d+1$. Počet odporů v i -té vrstvě (mezi vrcholy vzdálené i a $i+1$ od počátku) je proto dán vztahem $m_i = (n-d) \cdot \binom{n}{d}$. Celkový odpor bude

$$R_{\text{celk}} = R \sum_{d=0}^{n-1} \left((n-d) \binom{n}{d} \right)^{-1}.$$

Pro $n=4$ dostáváme $R_{\text{celk}} = D \cdot R$ a třeba pro $n=5$ máme $R_{\text{celk}} = {}^8D_{15} \cdot R$. Pro velká n tato řada konverguje jako $R_{\text{celk}} = 2RDn$, což znamená, že pro $n \rightarrow \infty$: $R \rightarrow 0$.

Úloha III . 5 ... grant strýčka Skrblika (6 bodů)

Tuto úlohu vypracovalo asi 20 řešitelů, z toho asi 1D stále neví, co to znamená experimentální úloha! Jestliže navrhnete řešení, ale experiment, ať již z jakéhokoliv důvodu neprovedete, nemůžete bohužel dostat více než 1D možných bodů. Ale zpět k příkladu, celkem nám došly čtyři způsoby řešení:

A) Prvním (nevyužívalo se zde napovězeného prověšeného provázku, ale to nebylo nutností) bylo řešení pomocí páky vytvořené z pravítka. Na jedné straně zavěšena lžice, na druhé závaží. Posouváním po pravítku se hledala rovnováha. Celé nejdříve ve vzduchu, poté s ponořenou lžicí ve vodě. Zde problém nebyl.

B) Druhou metodou bylo přivázání provázku k jednomu hřebíku a přehození přes druhý jako kladku, viz obr. 23. Jeden z předmětů pak byl navázán na konci provázku, druhý zavěšen na úseku mezi hřebíky. Soustava se vyrovnala tak, že rozklad tíhové síly od m_L vyrovnalo závaží m_Z . Totéž pak pro jedno ze závaží ponořené ve vodě. Zde bylo jednodušší posunout závaží m_Z do středu (jistě zjednodušení silového rozkladu). Problémem bylo jistě tření mezi provázkem a hřebíkem, které jste řešili mazáním provázku či použitím kolečka. I výsledky této metody vycházely v mezích normy.

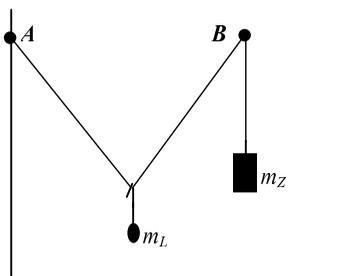
C) Třetí (oproti ostatním asi nejméně přesnou) metodou bylo měření prodloužení nitě při zavěšení závaží známé hmotnosti a lžice ve vzduchu a ve vodě (dle Hookova zákona). Bohužel hliníková lžice není dostatečně těžká, aby toto prodloužení bylo rozumně měřitelné, z čehož plynula značná chyba měření.

D) Čtvrtou a poslední metodou byla tzv. metoda „nitkových vážek“. Zde si řada řešitelů s tímto zařízením nepohrála a měřila zbytečně mnoho parametrů, potili se se silovými rozklady atp. Proto tuto metodu blíže rozebereme.

Vycházelo se z provázku prověšeného mezi hřebíky. Na provázek se zavěsila lžice a závaží o známé hmotnosti, jak je vidět na obr. 24.

Nyní se posuvalo závažím (či lžicí, či obojím) tak, aby se provázek mezi lžicí a závažím (CD) stal vodorovným (rovnoběžným s EF). Blíže viz obr. 25.

Obr. 23



Úhly α a β určíme ze vztahů

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{x}{h} = \frac{F_1}{F_{gz}}, \quad \operatorname{tg}(\beta) = \frac{y}{h} = \frac{F_1}{F_{gL}},$$

po úpravě $\frac{y}{\operatorname{tg}(\beta)} = \frac{x}{\operatorname{tg}(\alpha)}$, a tedy $y \cdot F_{gL} = x \cdot F_{gz}$.

Odtud dostáváme $m_L = \frac{x}{y} m_Z$.

Nyní ponoříme lžici do vody a opět vyrovnáme podle obr. 25 a dosadíme do tvaru

$$x' \cdot F'_{gz} = y' \cdot F'_{gL}; \quad F'_{gL} = F_{gL} - V\rho_{H_2O}g$$

$$F'_{gL} = gV(\rho_{Al} - \rho_{H_2O}); \quad V = \frac{m_L}{\rho_{Al}}$$

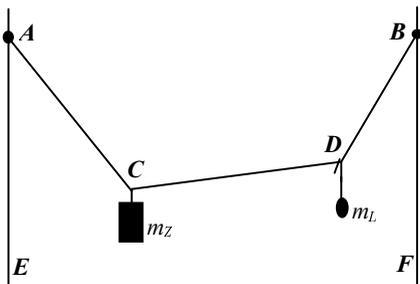
$$F'_{gL} = \frac{g \cdot m_L}{\rho_{Al}} \cdot (\rho_{Al} - \rho_{H_2O})$$

Po dosazení: $\rho_{Al} = \frac{x \cdot y}{xy' - x'y} \rho_{H_2O}$.

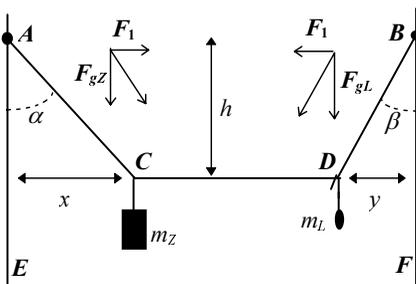
Všechny veličiny x, y, x', y' lze jednoduše a přesně změřit.

Závěr: Jak je vidět, u těchto metod bylo možné dotáhnout řešení do tvaru, kde nefiguroval objem lžice, který část řešitelů zjišťovala ponořováním lžice do kbelíku a měřením změny úrovně hladiny. To je při poměru objemů lžice a kbelíku metoda značně nepřesná (avšak pravděpodobně jediná možná). Bylo lepší vyhnout se měření objemu lžice úpravou na tvar, kde se objem V nevyskytoval.

Obr. 24



Obr. 25



$$|AE| = |BF|$$

Úloha IV. 1 ... částice v magnetickém poli (5 bodů)

V magnetickém poli na částici působí dvě síly: třecí $F_t = kv$ proti směru pohybu a Lorenzova (síla elmag. pole) $F_l = qv \times B$ kolmo na rychlost částice. Působící síla je rovna změně hybnosti za čas, tedy v obou případech je změna rychlosti úměrná právě rychlosti částice. Vezmeme-li malý časový interval Δt , můžeme tyto vztahy zapsat. Ve směru pohybu $\Delta v \Delta t = F_t \Delta t = kv \Delta t$, kolmo na něj $\Delta v \Delta t = qB \Delta t \cdot v \Delta t$.

vektory změny rychlosti a změny polohy je takový, že vždycky svírají konstantní úhel a poměr jejich délek je $\sqrt{k^2 + q^2 B^2} / m$. Platí-li to pro všechny malé změny, platí to i pro jejich součet, celkovou změnu polohy a rychlosti. Celková změna v je rovna vektoru rychlosti na počátku, je tak stejná pro všechny tři případy. Pro velikosti celkového posunutí částice v brzdícím prostředí dostáváme

$$l_1 k / m = l_2 \sqrt{k^2 + q^2 B^2} / m = l_3 \sqrt{k^2 + q^2 (B/2)^2} / m.$$

Odtud bez problémů vyloučíme neznámé konstanty a dostaneme pro l_3 výsledek

$$l_3 = 2l_2 / \sqrt{1 + 3(l_2/l_1)^2} = 8,3 \text{ m.}$$

Úloha IV. 2 ... jak asi táhne komín? (6 bodů)

Je jasné, že ohřev vzduchu vede ke zmenšení jeho hustoty a aerostatická síla jej začne zvedat, čímž vznikne v rouři tah. Nejprve vypočteme hustotu ρ ohřátého vzduchu na vrchním konci trubky, pak za jednotku času projde kolem ohříváče n molů látky,

$$(1) \quad n = \frac{S\rho v}{M_m},$$

kde M_m je molární hmotnost vzduchu, S průřez roury a v rychlost vzduchu na konci roury. Tomuto množství látky je dodáno teplo N , takže se jeho teplota zvětší o Δt :

$$(2) \quad N = nc_p \Delta t,$$

kde c_p je molární tepelná kapacita vzduchu při konstantním tlaku. Většina z vás považovala ohřev za izochorický děj, a proto ve vztahu (2) místo c_p psala c_V . Vzhledem k tomu, že plyn není uzavřen v žádné nádobě (tj. může se volně rozpínat), bude ohřev spíše dějem izobarickým. Mezi c_p a c_V platí tzv. Mayerův vztah

$$(3) \quad c_p = c_V + R.$$

Z rovnic (1) a (2) dostáváme pro Δt

$$(4) \quad \Delta t = \frac{NM_m}{c_p \rho S v}.$$

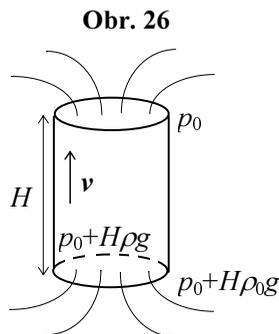
Vzhledem k izobaričnosti děje dále platí $\rho_0 t = \rho(t + \Delta t)$, kde ρ_0 je hustota okolního vzduchu. Za předpokladu $\Delta t \ll t$ A 1 lze psát

$$(5) \quad \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} = \frac{\Delta t}{t} \approx \frac{\Delta t}{t + \Delta t}.$$

Proudění ideální kapaliny podél proudnice popisuje Bernoulliho rovnice, jejíž aplikací pro náš příklad dostáváme (viz obr. 26)

$$(6) \quad \frac{1}{2} \rho v^2 + p_0 + H\rho g = p_0 + H\rho_0 g.$$

Přitom jsme předpokládali, že hustota vzduchu je v trubici konstantní ($p = p_0 + H\rho g$) a že rychlost vzduchu v okolí spodního okraje roury je zanedbatelná vůči rychlosti vzduchu v rouři. Rovnici (6) upravíme na tvar



$$(7) \quad v^2 = 2gH \frac{\rho_0 - \rho}{\rho}.$$

Použijeme-li (4) a (5), máme

$$v^2 \approx 2gH \frac{\Delta t}{t + \Delta t} = \frac{2gHN}{c_p} \frac{M_m}{\rho_0 t S v}$$

a použijeme-li stavovou rovnici ideálního plynu, obdržíme

$$v^3 = \frac{2gHN}{c_p} \frac{M_m}{\rho_0 t S} = \frac{2gHNR}{\sqrt{2} R p_0 S} = \frac{4}{7} \frac{gHN}{p_0 S}.$$

Kromě stavové rovnice $p_0 = \rho_0 RT$ jsme použili také to, že molární teplo za stálého objemu je $c_V = \frac{5}{2} D_2 R$, neboť c_V je dáno vnitřní energií plynu. (Vzduch tvoří převážně dvouatomové molekuly, takže počet stupňů volnosti je 5.) Výsledek:

$$v = \sqrt[3]{\frac{4}{7} \frac{NHg}{p_0 S}} \approx 1 \text{ ms}^{-1}.$$

V průběhu řešení jsme učinili mnoho zjednodušujících předpokladů. Například že proudění v rouře je laminární, že nedochází ke tření mezi vzduchem a stěnami roury, že vzduch se moc neohřeje ($\Delta T \ll t$), že hustota vzduchu v rouře je konstantní, atd. Avšak nejzávažnější předpoklad je, že vzduch má v okolí spodního okraje rychlost mnohem menší, než je rychlost vzduchu v trubici. Navíc Bernoulliho rovnice ve tvaru (6) popisuje pohyb nestlačitelné tekutiny, proto by bylo vhodnější použít Poiseuillův zákon popisující proudění reálné tekutiny v trubici.

Úloha IV . 3 ... smyčky (4 body)

Jak jste správně zjistili, budou indukované proudy konstantní s časem, protože i změna magnetické indukce \mathbf{B} s časem je konstantní.

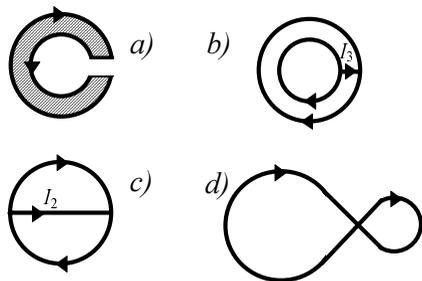
V případě a) jde o obyčejnou smyčku, kde plocha je určena vyšrafovanou částí a proud musí být všude stejný (nemá se kde hromadit).

V případě b) je dobré nejprve uvážit, jak bude velký proud I . Kdyby byl nenulový, přecházel by náboj z vnitřní na vnější smyčku a tam by se někde hromadil, proud I musí být tedy nulový. Jestliže spojkou neteče proud, můžeme ji v dalším neuvažovat. Pak zbývají jen dvě obyčejné kruhové smyčky, ve kterých budou proudy souhlasně orientovány, ale nebudou stejné.

Případ c) je symetrický – když se díváme svrchu nebo zespoda, musíme vidět totéž, což splňuje jen případ $I_2 = 0$. Střední propojku můžeme pak vynechat a máme opět obyčejnou kruhovou smyčku.

Smyčka d) je samozřejmě uprostřed spojena vodičivě a můžeme obdobným postupem jako v b) s přeléváním náboje z jedné smyčky do druhé ukázat, že proud mezi nimi je nulový. Obě smyčky se pak chovají jako samostatné. Tato smyčka mohla být ovšem interpretována

Obr. 27



i jinak – bez vodivého spojení v místě překřížení. Je-li plocha levé části větší než té pravé, bude proud téct ve směru odpovídajícím šipce vlevo.

Úloha IV . 4 ... válec kontra zed' (3 body)

Síla smykového tření je, jak všichni víme, úměrná velikosti normálové složky síly F_n působící na styčnou plochu, $F_t = \mu F_n$. Existuje tzv. Amontonsův zákon (takových pojmenovaných vět je), podle kterého je třecí síla nezávislá na velikosti plochy styku obou těles, přičemž součinitel úměrnosti na F_n nezávisí. Pro malé rychlosti a rozumné povrchy nastává pak suché tření (Coulombovo), kdy koeficient μ nezávisí na rychlosti smýkání. Tento předpoklad evidentně nespňují nejrůznější hladké povrchy (snad jste již uklouzli na vyleštěném podlaze) a z materiálů umělé hmoty.

Předpokládejme, že náš dřevěný válec vykazuje Coulombické tření se stěnou a podložkou a otáčí se přijatelnou rychlostí. Pokud naše situace nastala nárazem na stěnu válce, rotujícího po podložce, měl by být dostatečně hmotný na to, aby setrvačná síla překonala impuls nárazu, jinak by válec odskočil a bůhví, jakou rychlostí by se točil. Chci zdůraznit, že děláme značné množství předpokladů, kterými omezujeme platnost našeho modelu. (Některé předpoklady jsou zřejmé a ani je neříkáme, třeba že nefouká víchřice, či není zemětřesení. Je ale důležité uvědomit si, že pro umělohmotný válec pohybující se proti trampolíně náš model neplatí.)

Úloha byla velice snadná, za předpokladu, že jste zvážili správně dvě hlavní skutečnosti. Především bylo zapotřebí dobře zakreslit působící síly (viz obr. 28), a pak správně použít Newtonův zákon pro tuhé těleso: je-li hmotný střed tuhého tělesa v klidu, pak výslednice vnějších sil působících na těleso je nulová. Většina řešitelů špatně interpretovala sílu F_{n2} ; podle nich je síla dána časovou změnou hybnosti, jenže hybnosti posuvného pohybu před nárazem. Že tomu tak není usoudíme snadno z toho, že stejnou situaci jako je na obrázku dostaneme, když roztočíme válec a pak jej přiložíme ke stěně libovolně pomalu. Ze zákona zachování hybnosti a momentu hybnosti plyne, že energie posuvného pohybu byla zcela pohlcena během srážky (změnila se na vnitřní teplo) a energie otáčivého pohybu během srážky se nezměnila (ale po nárazu začalo okamžitě působit tření).

Rovnováhu sil dává vektorový vzorec $\mathbf{G} - \mathbf{F}_{n1} + \mathbf{F}_{t1} - \mathbf{F}_{n2} + \mathbf{F}_{t2} = \mathbf{0}$. (\mathbf{F}_{n1} a \mathbf{F}_{n2} jsou síly, jimiž působí těleso na podložku). Jelikož je problém dvourozměrný, představuje tento vztah dvě rovnice. Zároveň víme, že $F_{t1} = \mu F_{n1}$ a $F_{t2} = \mu F_{n2}$. Dostáváme tak soustavu rovnic

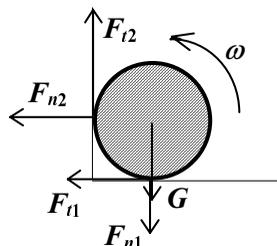
$$F_{t1} = \frac{F_{t2}}{\mu}, \quad G - F_{t2} = \frac{F_{t1}}{\mu}.$$

Rozřešíme-li tuto soustavu, získáme velikosti třecích sil

$$F_{t1} = \frac{mg}{\mu^2 + 1} \mu, \quad F_{t2} = \frac{mg}{\mu^2 + 1} \mu^2.$$

Celkový moment sil je $M = (F_{t1} + F_{t2})R$, kde R je poloměr válce; moment sil je samozřejmě brán vzhledem k ose otáčení, která nám prochází těžištěm. Zároveň je $M = J\varepsilon$, kde ε je úhlové zrychlení. Pro rovnoměrný otáčivý pohyb platí analogické kinetické rovnice jako pro posuvný:

Obr. 28



$$\frac{1}{2} mR^2 \varepsilon = \frac{mg(1+\mu)\mu}{1+\mu^2} R, \quad \varphi = \frac{1}{2} \varepsilon t^2, \quad \omega = \varepsilon t = \frac{v}{R} \Rightarrow \varphi = \frac{v^2}{4Rg} \frac{(1+\mu^2)}{(1+\mu)\mu}.$$

K tomuto vztahu snadno dojdeme použitím zákona zachování energie, neboť konstantnost třecích sil dá jednoduchý výraz pro práci

$$\frac{1}{2} J\omega^2 = \frac{1}{4} mv^2 = (F_{f1} + F_{f2})R\varphi$$

Nakonec se s vámi podělím o originální řešení jednoho z vás, které je z matematického hlediska triviální a dalo by se říci zbytečné, zato je velice fyzikální v přístupu k problému. Pro znalce: jedná se v podstatě o numerické řešení iterací soustavy rovnic uvedených výše.

Třetí síla F_{f1} je dána tíhovou silou mg a jako taková je normálovou silou F_2 , která zase dává sílu F_{f2} . Jenomže tato síla nadzvedává těleso, čili ji musíme od tíhové síly odečíst, abychom dostali normálovou F_1 . V důsledku toho se zase poopraví F_{f2} , kterou zase odečteme od tíhové síly, abychom dostali F_1 . Matematicky shrnu toto iterování takto:

$$F_{f1} = \frac{F_{f2}}{\mu}, \quad F = G - F_{f2} = \frac{F_{f1}}{\mu}, \quad \Rightarrow \quad \mu F = F_{f1},$$

$$(1) \quad F_{f2} = G\mu \rightarrow F_{f1} = G\mu^2 \rightarrow F = G - G\mu^2 = G(1 - \mu^2),$$

$$(2) \quad F_{f2} = G\mu(1 - \mu^2) \rightarrow F_{f1} = G\mu^2(1 - \mu^2) \rightarrow F = G - G(1 - \mu^2)\mu^2 = G(1 - \mu^2 + \mu^4).$$

V (n) -tém kroku dostaneme součet prvních n členů geometrické posloupnosti.

$$(n) \quad F_{f2} = G\mu(1 - \mu^2 + \mu^4 - \mu^6 + \dots + (-1)^{n-1} \mu^{2(n-1)}),$$

$$F_{f1} = G\mu^2(1 - \mu^2 + \mu^4 - \mu^6 + \dots + (-1)^{n-1} \mu^{2(n-1)}),$$

$$F = G(1 - \mu^2 + \mu^4 - \mu^6 + \dots + (-1)^n \mu^{2n}).$$

V limitě $n \rightarrow \infty$ obdržíme součet geometrické řady, který pro všechny tři síly bude stejný, s kvocientem $Q = -\mu^2$, a tak získáme výsledek uvedený výše. Jelikož $|\mu| < 1$, je tento postup korektní i matematicky.

Úloha IV . 5 ... *sférická vada* (4 body)

Sférická vada čočky spočívá v odchylce hodnot skutečné ohniskové vzdálenosti a ohniskové vzdálenosti f pro paprsky blízké ose (axiální paprsky), spočtené podle vztahu

$$(1) \quad f = \frac{R}{n-1},$$

kde n je relativní index lomu skla. Tloušťku čočky lze zanedbat s ohledem na to, že její vliv na nepřesnost vztahu (1) nezkoumáme, a na to, že s rostoucím x její velikost klesá. Lze tedy psát $x = x'$. Napišeme Snellův zákon pro lomy v bodech **C** a **D** (viz obr. 29):

$$(2) \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n \quad \frac{\sin \gamma}{\sin \varepsilon} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \varepsilon} = \frac{1}{n}.$$

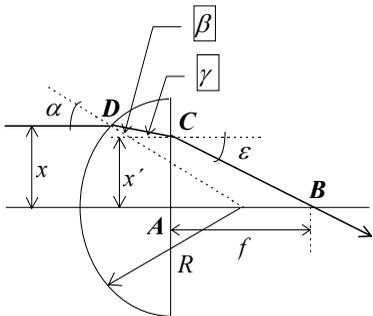
Z obrázku je také vidět, že $\sin \alpha = xDR$. Po dosazení do (2) dostaneme

$$(3) \quad \sin \varepsilon = \frac{x}{R} \left[n \sqrt{1 - \left(\frac{x}{Rn}\right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} \right].$$

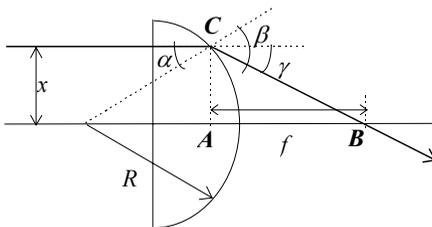
Ohniskovou vzdálenost f určíme z trojúhelníka ABC :

$$(4) \quad f = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \varepsilon}}{\sin \varepsilon} x.$$

Obr. 29



Obr. 30



Provedeme-li zanedbání $x \ll R$, dostaneme ze vztahů (3) a (4) vzorec (1).

Obdobně budeme postupovat v případě, že paprsek dopadá kolmo na rovinnou stranu čočky, jak je tomu na obr. 30.

$$(5) \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{n}.$$

Z trojúhelníku ABC a s uvážením vztahu $\sin \alpha = x/DR$ získáme výsledek

$$(6) \quad \sin \gamma = \frac{x}{R} n \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} - \frac{x}{R} \sqrt{1 - \left(\frac{nx}{R}\right)^2},$$

$$(7) \quad f = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \gamma}}{\sin \gamma} x.$$

Provedeme-li opět zanedbání $x \ll R$, dostaneme ze vztahů (6) a (7) vzorec (1).

Intervaly hodnot ohniskové vzdálenosti uvažované pro sférickou vadu čočky je třeba určit z maxim a minim funkcí (3), (4) a (6), (7) v závislosti na x . Vzhledem k složitosti funkcí je asi nejjednodušší vykreslení funkce počítačem.

Rozšířením úlohy může být započítání tloušťky čočky a pečlivěji tak vyšetřovat ohniskové vzdálenosti. Zjistíme, že chyba vzniklá sférickou vadou a nenulovostí tloušťky čočky se navzájem „doplňují“ svou velikostí. Lze to zjistit už jen výpočtem několika hodnot pro konkrétní zanedbatelnou tu či onu chybu a pro konkrétní hodnoty.

Úloha V. 1 ... vesmírná katastrofa (5 bodů)

Planetky mají stejné hmotnosti, jsou umístěny ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka a nemají počáteční rychlosti. Z těchto podmínek plyne, že při pohybu planetek zůstane tvar rovnostranného trojúhelníka zachován. Označíme-li délku strany trojúhelníka x , bude veli-

kost síly F působící na planetku $F = 2\cos 30^\circ \cdot \kappa M^2 D x^2$. Mezi vzdáleností r planetky od těžiště a stranou trojúhelníka platí vztah $r = {}^2D_3 \cdot \sqrt[3]{D_2 x} = xD\sqrt{3}$. Po dosazení do vztahu pro sílu F dostaneme

$$F = \kappa M^2 D (\sqrt{3} r^2).$$

Pohyb planetky je stejný, jako pohyb v radiálním gravitačním poli vyvolaném tělesem o hmotnosti $m = MD\sqrt{3}$ pevně umístěném v těžišti. Tato situace je podobná jako v případě Slunce a planet. Slunce sice není pevně umístěné, ale jeho hmotnost vůči hmotnosti planet je tak velká, že se vzhledem k těžišti prakticky nehýbe. Nebo si můžeme uvědomit, že v pevném gravitačním poli nezávisí pohyb tělesa na jeho hmotnosti. Proto planetku o hmotnosti M můžeme nahradit tělesem o hmotnosti $\mu A m$. V tomto případě můžeme „uvolnit“ centrální těleso od těžiště. Opět je to situace obdobná jako v naší Sluneční soustavě, což nás opravňuje k použití III. Keplerova zákona.

Volný pád tělesa si můžeme představit jako pohyb po velmi protáhlé elipse s pericentrem v těžišti trojúhelníka a s apocentrem v počáteční poloze planetky. Velká poloosa této elipsy je $a_1 = lD(2\sqrt{3})$. V Keplerově zákoně však vystupuje ještě doba oběhu T_2 a velká poloosa dráhy a_2 dalšího tělesa. Představme si planetku, která obíhá kolem centra po kružnici o poloměru $\rho = a_2$. Dostředivé zrychlení $a_d = v^2 D \rho$ je rovno gravitačnímu $a_g = \kappa m D \rho^2$. Rychlost tělesa v je

$$v = \sqrt{\kappa m / \rho}.$$

Oběžná doba pak je $T_2 = 2\pi \rho D v = 2\pi \sqrt{\rho^3 / \kappa m}$. Z III. Keplerova zákona pro naši planetku dostáváme

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l^3}{24\kappa m \sqrt{3}}}.$$

Doba pádu T planetky je polovinou doby oběhu T po pomyslné elipse

$$T = \pi \sqrt{l^3 / (24\kappa M)}. \text{ Číselně: } T = 7,85 \cdot 10^9 \text{ s} = 249 \text{ let.}$$

Úloha V. 2 ... obvod ze zdrojů (3 body)

A) Obvod je rotačně symetrický vůči svému středu. Z toho vyplývá, že středy vodičů mají stejný potenciál. Proto je rozdíl potenciálů mezi libovolnými dvěma středy vodičů nulový.

B) Daný obvod můžeme ekvivalentně překreslit (viz obr. 31), což odpovídá tomu, že jsme dané dva středy spojili drátem o konečném odporu R' . Bude-li proud I_3 nulový, je rozdíl potenciálů mezi body A a B také nulový, v opačném případě by protékal nějaký proud. První a druhý Kirchhoffův zákon dají tři rovnice pro tři neznámé proudy.

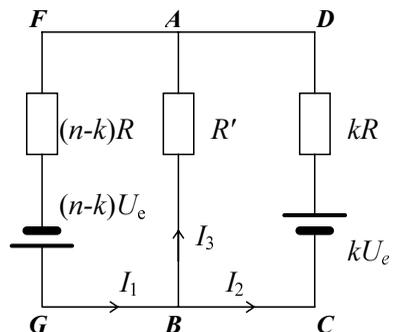
$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$(n-k)U_e = (n-k)RI_1 + R'I_3$$

$$kU_e = kRI_2 - R'I_3$$

Řešením těchto rovnic získáme $I_3 = 0$. Q. E. D.

Obr. 31



Úloha V . 3 ... Ondrova stavebnice (6 bodů)

Jakmile těleso (koule nebo válec) dopadne na zem, začne na něj působit odporová síla a to tak dlouho, dokud se bude smýkat po podložce, dokud nenabude obyčejného valivého pohybu s úhlovou frekvencí $\omega = vr$, kde v je konečná rychlost (zanedbáváme valivé tření) a r poloměr tělesa. Pro malé rychlosti je splněno, že třecí síla nezávisí na rychlosti, je přímo úměrná tlaku na podložku, tedy $F = \mu mg$, kde m je hmotnost tělesa, μ součinitel smykového tření a g tíhové zrychlení. Zároveň zde působí moment třecí síly M , který roztáčí těleso kolem jeho těžiště, $M = \mu mgr$. Nyní můžeme napsat s použitím II. Newtonova zákona pohybové rovnice posuvného a otáčivého pohybu (a a ε jsou zrychlení posuvného a otáčivého pohybu, t čas a J moment setrvačnosti):

$$(1) \quad v = v_0 - at \Rightarrow \omega r = v_0 - \mu g t,$$

$$(2) \quad \omega = \varepsilon t = \frac{M}{J} t \Rightarrow \omega = \frac{\mu g m r}{J} t.$$

Z těchto dvou rovnic můžeme spočítat neznámé čas t i frekvenci ω :

$$(3) \quad \omega = \frac{m v_0 r}{m r^2 + J}, \quad t = \frac{J}{J + m r^2} \frac{v_0}{\mu g}.$$

Odtud již snadno nalezneme vzorec pro konečnou rychlost posuvného pohybu tělesa, bude-li se jednat o homogenní válec ($J_v = D_2 m r^2$) a kouli ($J_k = D_5 m r^2$),

$$(4) \quad v_v = \frac{2}{3} v_0, \quad v_k = \frac{5}{7} v_0.$$

Porovnáním dvou zlomků snadno nalezneme, že rychlost koule bude větší o $D_2 v_0$.

V případě, že bychom uvažovali závislost třecí síly F na rychlosti (a tím také na čase), museli bychom modifikovat naše pohybové rovnice takto:

$$(1') \quad \omega r = v_0 - \int_0^t \frac{F}{m} dt,$$

$$(2') \quad \omega = 0 + \int_0^t \frac{Fr}{J} dt.$$

Integrály v těchto rovnicích mají tento význam:

Za malý čas dt se sníží rychlost o $dv = -F D m \cdot dt$ a zároveň vzroste úhlová rychlost o kousek $d\omega = Fr D J \cdot dt$. Takový problém znamená řešit soustavu dvou diferenciálních rovnic 1. řádu s počátečními podmínkami $v(0) = v_0$ a $\omega(0) = 0$. Tato soustava je natolik triviální, že kupodivu jejím řešením obdržíme výsledek (3), ať je závislost $F(v)$ jakákoliv.

Úloha V . 4 ... kolik máme krve? (3 body)

Aktivita radioaktivního vzorku je definována jako počet úbytků částic za jednotku času,

$$A = - \frac{\Delta N}{\Delta t}.$$

Je zřejmé, že takto definovaná aktivita je přímo úměrná počtu částic v daném čase, tedy $A = \lambda N$, kde λ je rozpadová konstanta. Úvaha, že úbytek částic za jednotku času je přímo úměrný počtu částic ($-\Delta N = \lambda N \Delta t$), potom vede na zákon radioaktivního rozpadu (integraci rovnice v limitě $\Delta t \rightarrow 0$).

$$N = N_0 \exp(-\lambda t).$$

Pro aktivitu vzorku pak máme $A = A_0 \exp(-\lambda t)$.

Vpravíme-li do těla pokusné osoby radioaktivní vzorek o aktivitě A_1 , bude tělo za čas t vykazovat aktivitu $A = A_1 \exp(-\lambda t)$. Tato doba musí být dostatečná na to, aby se radioaktivní látka rovnoměrně promísila s krví. Potom bude platit, že v objemu V_2 odebrané krve je $NVDV_2$ částic, kde V je celkový objem krve. Odtud již snadno dostaneme

$$V = V_2 \frac{A_1}{A_2} \exp(-\lambda t).$$

Poslední nástrahou bylo správně interpretovat poločas rozpadu, chytil se na to jen jeden z vás (λ není $1DT$, to by byl čas, za který dostaneme jednu e-tinu vzorku).

$$N_0/2 = N_0 \exp(-\lambda T) \Rightarrow \lambda = \ln 2 / T.$$

Výsledek tedy je: $V = V_2 \frac{A_1}{A_2} 2^{-\frac{t}{T}}$. Číselně spočteme $V = 7,9$ l.

Velice se mi líbilo, jak jste se všichni snažili zdůvodnit nepřiměřenost výsledku lidskému tělu. Ve skutečnosti můj záměr byl právě opačný, ale omylem jsem přehodil hodnoty objemů V_1 a V_2 , potom by číselný výsledek vyšel méně nežli poloviční a odpovědi by bylo, že pokusnou osobou byl malý či nedospělý jedinec. Přiznejme si, že jestli něco doktoři takhle měří, mají tam nějaké poloempirické vzorce s n konstantami započítávajícími látkovou výměnu a bůhví co ještě. Jen někteří z vás si všimli, že měření aktivity musí být hodně nepřesné v tak malých hodnotách, jako bylo A_2 . Při přesnosti měření aktivity na $0,5 \text{ s}^{-1}$ je výsledek s chybou (8 ± 2) l. Tohle je dobré fyzikální zdůvodnění a vůbec zpochybnění našeho výsledku v daných hodnotách.

Úloha V. 5 ... *chlazení kapalín* (8 bodů)

Bylo zajímavé sledovat rozložení názorů na průběh tak zajímavého jevu, jako je samovolné ochlazování kapaliny. Rozdělili jste se totiž na dvě skupiny: jedné vyšlo rychlejší ochlazování vody a druhé rostlinného oleje (je také zajímavé, že nikdo nepoužil olej minerální ani neprováděl srovnávací měření pro různé druhy oleje). Popíšete tedy experiment, který jsem prováděl sám, rozeberu jeho výsledky, ale nerozdělím experimenty na „správné“ a „špatné“, protože experiment vychází vždy dobře, je jen otázkou, co z něj plyne. Zkuste sami vymyslet, proč vám ten který pokus vyšel zrovna tak, jak vyšel.

Při sestavování experimentu jsem dbal toho, aby použité zařízení bylo pokud možno dostupné na každé trochu slušné střední škole. Od katedry didaktiky fyziky jsem si zapůjčil teplotní kontrolor s odporovým čidlem používaný k demonstračním účelům, ponorný ohříváč se stojanem a XY-zapisovač, na který jsem dvěma vodiči přivedl signál z teploměrného čidla. To vše tvoří registrační a pomocnou část vybavení. Při chlazení kapaliny hraje roli samozřejmě mnoho vnějších faktorů v uspořádání experimentu a uplatňuje se vícero mechanismů odvodu tepla, mou snahou bylo potlačit co nejvíce náhodné vnější faktory a dosáhnout tak co nejlépe definovaných podmínek po celou dobu měření i při jeho opakování. Toho jsem dosáhl tím, že dané množství kapaliny, v mém případě vždy 1D_2 kg, jsem ohřál ponorným vařičem v termosce, do které jsem do dané hloubky (vždy stejné) ponořil robustní skleněnou tyčinku s teploměrným čidlem a termosku zakrytoval kvůli odvodu tepla odpařováním. Pak jsem na zapisovači označil bod počátku měření s danou teplotou odečtenou na teploměru a nechal zapisovač pracovat. Pro představu o rychlosti – válec zapisovače odvíjel papír rychlostí 3 cmDhod po dobu asi 30-ti hodin na jedno měření, přičemž data, z nichž jsou vykresleny křivky ve zde uvedených grafech (viz graf 3 a, b), jsou získána ze dvou měření na každou křivku. Chybí zde pouze nepříliš zajímavá koncová část křivky, která byla

navíc zatížena značnou relativní chybou danou malou citlivostí zapisovače a nepřesností teploměru a střední část křivky pro vodu, což nastalo výpadkem teploměru.

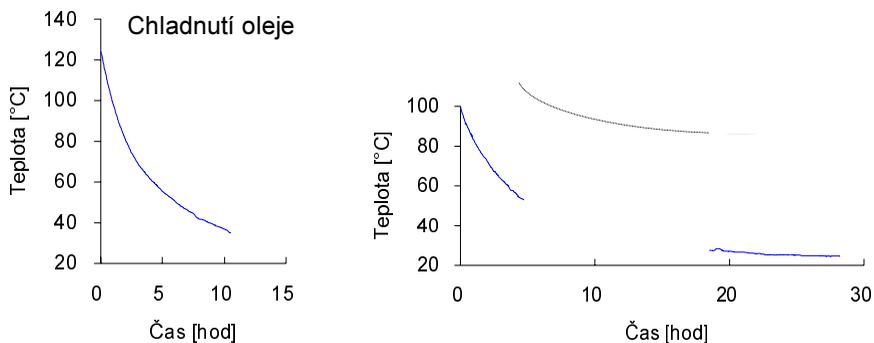
Data ukazují velmi dobrou korelaci výsledků s předpokládanou exponenciální závislostí. Z grafů je vidět, že v takto uspořádaném experimentu chladne rychleji rostlinný olej (v našem případě slunečnicový Vegetol), nežli voda. Výsledky zpracování hodnot jsou v příložené tabulce). Pokojová teplota byla $T = 23,2^{\circ}\text{C}$.

Přepočtené závislosti pak mají tvar:

$$\text{Voda: } T = 76,7 \exp(-0,047 \cdot t) ^{\circ}\text{C} + T$$

$$\text{Olej: } T = 105,9 \exp(-0,117 \cdot t) ^{\circ}\text{C} + T$$

Graf 3 a, b



S pomocí termosky se nám podařilo „odfiltrvat“ špatně definované procesy probíhající při chladnutí např. v tenké skleněné nádobě, zaplatili jsme za to řádově delší dobou experimentu. Zajímavým řešením potlačujícím vypařování a dávajícím do souvislosti povrchové jevy při pokusu s vodou a s olejem, bylo nalití tenkého filmu oleje na volnou hladinu vody před započítáním ohřevu.

Ted' k tomu, jak jste se s experimentem vyrovnali vy. Velice hezké bylo řešení J. Kolořenče, který část výsledků naměřil pomocí soupravy ISES, což bych doporučil i ostatním (pokud k ní máte přístup). Jinak každý z vás ví, jaké přednosti a nedostatky měla jím použitá metoda. Celkově jsem ale postrádal detailnější rozbor výsledků a odhad chyb způsobených experimentálním uspořádáním a bylo jen málo pokusů o vysvětlení toho, proč se ta kapalina chová tak, jak se chová.

Tab. A – Koeficienty regrese závislosti $\ln(T - T_0) = a \ln(t) + b$

	a [$\ln(\text{hod})^{-1} \ln(^{\circ}\text{C})$]	b [$\ln(^{\circ}\text{C})$]	koef. kor.
Voda	$-0,0473 \pm 0,0005$	$4,3 \pm 0,1$	95,6%
Olej	$-0,117 \pm 0,001$	$4,66 \pm 0,07$	96,3%

Některí z vás si všimli toho, že zadání pokračuje povídáním o čemsi, co se jmenuje lineární regrese (viz dodatek, str. 60). Ba co více, našli se i tací, kteří se nebáli tohoto „zvířete“ použít ke zpracování výsledků. Zde se ukázala jistá potřeba praxe, protože se objevovala téměř nesmyslná numerata na n desetinných míst (kde n je velké přirozené číslo) na straně jedné a absence údajů (jako je např. koeficient korelace) na straně druhé. To je ale jen otázka praxe a rutiny, tu získáte jenom dalšími experimenty. Proto doufám, že se příště u experimentálních úloh sejdeme zase.

Nakonec přece jenom vysvětlení, proč voda chladne pomaleji než olej. Stačí si uvědomit, že o tom, jak rychle se bude nějaká těleso ohřívat či ochlazovat, rozhoduje jeho *tepelná kapacita*. Čím je tepelná kapacita tělesa vyšší, tím pomaleji bude chladnout nebo se ohřívat. Pokud umíte již zacházet s derivacemi, tak časová změna teploty je dána rovnicí

$$mcdT = \Phi dt,$$

kde T je teplota tělesa, Φ je tepelný tok (pro chlazení je Φ záporné, pro ohřev kladné), m je hmotnost tělesa a c zmíněná tepelná kapacita. Řešením této diferenciální rovnice obdržíme

$$T(t) = T(0) \exp\left(\frac{\Phi}{mc} T\right).$$

V našem případě chlazení je Φ (a tedy i celý exponent) záporné. Budeme-li srovnávat chlazení dvou látek o stejné hmotnosti, zahřátých na stejnou počáteční teplotu $T(0)$ za stejných podmínek (tj. Φ je u obou látek stejné), pak pomaleji bude chladnout látka s vyšší tepelnou kapacitou. Φ je obecně funkcí teploty, v dobře izolovaných soustavách můžeme předpokládat, že Φ je konstanta daná vlastnostmi nádoby.

Úloha VI. 1 ... *Jupiter a kometa* (5 bodů)

Pád komety z nekonečna, kde měla původně nulovou rychlost, lze rozdělit na tři etapy:

- 1) pohyb v gravitačním poli Slunce až do okamžiku vstupu do sféry vlivu Jupitera,
- 2) pohyb ve sféře vlivu Jupitera,
- 3) opět pohyb v gravitačním poli Slunce.

Sféra vlivu Jupitera je oblast, ve které převažuje gravitační působení Jupitera nad působením Slunce. Budeme předpokládat, že poloměr této sféry je velmi malý vůči vzdálenosti R Jupitera od Slunce (ve skutečnosti má oblast, kde je gravitační síla Jupitera větší než gravitační síla Slunce, poloměr asi 0,17 AU). Dále si situaci zjednodušíme tím, že v oblasti sféry vlivu Jupitera zanedbáme vliv Slunce a naopak mimo tuto sféru zase zanedbáme gravitační působení Jupitera.

Rozeberme si teď pohyb komety v jednotlivých úsecích.

Ad 1) Ze zákona zachování energie (ZZE) plyne, že rychlost v_1 vzhledem ke Slunci, s níž kometa vstupuje do sféry vlivu Jupitera, je rovna $v_1 = \sqrt{2\kappa M_S/R}$. Rychlost Jupitera v_J vzhledem ke Slunci vypočteme z rovnosti dostředivého a gravitačního zrychlení,

$$v_J^2/R = \kappa M_S/R^2 \Rightarrow v_J = \sqrt{\kappa M_S/R}.$$

Rychlosti v_1 a v_J svírají pravý úhel, a tak z Pythagorovy věty dostáváme pro rychlost komety \tilde{v}_1 vzhledem k Jupiteru při vstupu do sféry vlivu Jupitera vztah

$$\tilde{v}_1 = \sqrt{3\kappa M_S/R}, \text{ kde } M_S \text{ je hmotnost Slunce.}$$

Ad 2) Ze ZZE plyne, že rychlost komety \tilde{v}_2 , se kterou opouští sféru vlivu Jupitera, vzhledem k Jupiteru má velikost stejnou jako \tilde{v}_1 . Ze zadání je zřejmé, že tato rychlost v_2 vzhledem ke Slunci má velikost

$$v_2 = \tilde{v}_1 - v = (\sqrt{3} - 1) \sqrt{\kappa M_S / R}.$$

Ad 3) Ze zadání je v_2 kolmé na průvodič, což může nastat jen v aféliu nebo periheliu. Je-li však je rychlost komety menší než kruhová rychlost, odpovídá poloha, kde kometa opustila sféru vlivu Jupitera, aféliu: $v_a = v_2$ a $r_a = R$. Vzdálenost r_p perihelia od Slunce vypočteme ze ZZE a z II. Keplerova zákona. Jak jsem se již zmínil, pro afélium a perihelium platí, že průvodič je kolmý na směr rychlosti. Plocha S , kterou průvodič opíše za malý časový úsek t , pak je $S = r_a v_a t D2 = r_p v_p t D2$, kde v_p je rychlost v periheliu. Celkem tedy máme dvě rovnice pro dvě neznámé r_p a v_p :

$$\text{II. Keplerův zákon} \quad r_a v_a = r_p v_p,$$

$$\text{ZZE} \quad \frac{1}{2} v_a^2 - \frac{\kappa M_S}{r_a} = \frac{1}{2} v_p^2 - \frac{\kappa M_S}{r_p}.$$

Z těchto rovnic hravě vypočteme $r_p = R \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$, číselně $r_p = 1,9$ AU.

Velikost velké poloosy a dráhy komety je rovna $a = (r + r_p) D2$, číselně $a = 3,55$ AU. Do- bu oběhu komety T pak spočteme z III. Keplerova zákona: $T = 6,7$ let.

Úloha VI. 2 ... reálný zdroj (4 body)

A) Celkový výkon (I je proud v obvodu):

$$P_C = U_i I = \frac{U_i^2}{R + R_i} = \frac{U_i^2}{R_i} \frac{1}{1 + R/R_i} = A \frac{1}{1+t}; \quad A = \frac{U_i^2}{R_i}; \quad t = \frac{R}{R_i}.$$

B) Výkon na zátěži (U_Z je napětí na zátěži):

$$P_Z = U_Z I = I^2 R = \frac{U_i^2}{(R + R_i)^2} R = \frac{U_i^2}{R_i} \frac{R}{R_i} \frac{1}{(1 + R/R_i)^2} = \frac{A}{4} \frac{4t}{(1+t)^2}.$$

C) Účinnost (přímo z definice):

$$\eta = \frac{P_Z}{P_C} \frac{R}{R + R_i} = \frac{t}{1+t}.$$

Parametr t je bezrozměrný. Funkční závislosti celkového výkonu na zátěži a účinnosti obvodu jsou zakresleny v grafech (viz graf 4 a 5).

Diskuse:

Ad A) Celkový výkon je maximální při $t = 0$ ($t < 0$ samozřejmě není možné), tj. $R = 0$, což je cítit při zkratu, že?

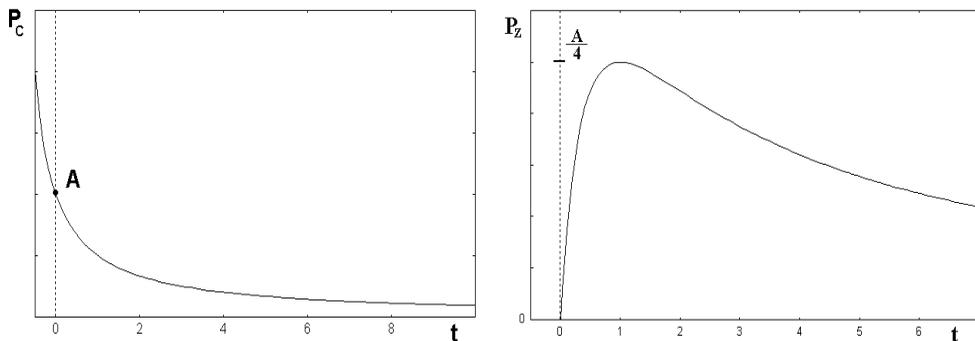
Ad B) Maximum funkce snadno zjistíme zderivováním. Pro nezalce tohoto účinného nástroje při vyšetřování průběhu funkcí uvedme následující odůvodnění. P_Z nabude svého maxima, když bude funkce $(1+t)^2 D t$ minimální. Tato funkce není nic jiného než součet hyperboly $1Dt$ a lineární funkce $2+t$. Snadno nahlédnete, že ať děláte, co děláte, je funkce $1Dt + t$ minimální jen pro hodnotu $t = 1$, tj. $R = R_i$. Výkon P_Z potom dosahuje hodnoty $AD4$.

Ad C) Opět kromě derivování můžeme uvést toto odůvodnění. (Nezapomeňte, že stále pracujeme na intervalu $t \in (0, \infty)$!) Účinnost bude maximální, když funkce $1 + 1Dt$ (obyčejná posunutá hyperbola) bude minimální, to je právě při $t \rightarrow \infty$ a naopak hyperbola nabývá maximum při $t \rightarrow 0$. Účinnost pak je monotónně rostoucí funkcí asymptoticky se blížíci hodnotě $\eta = 1$.

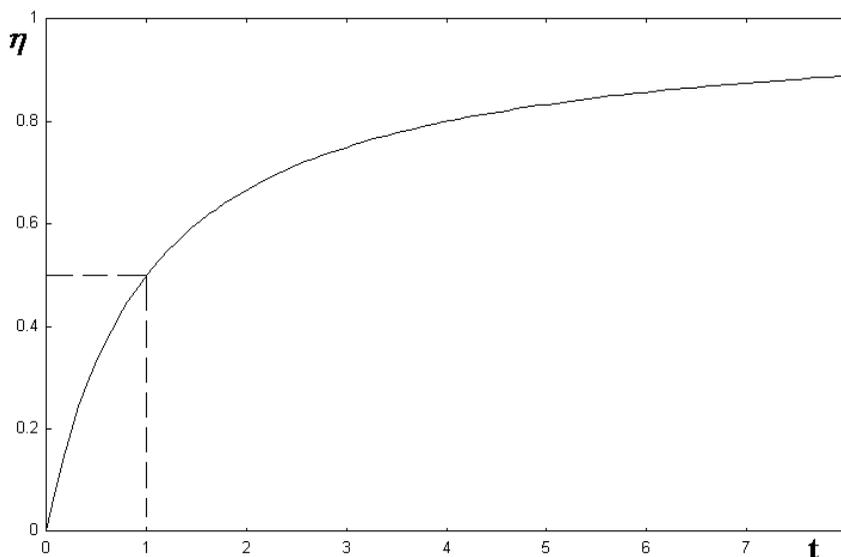
Co je tedy nejvýhodnější? Jak snadno zjistíte při pohledu na grafy, nemá smysl uvažovat o oblasti $t < 1$, neboť stejný výkon při vyšší účinnosti dosáhneme i při $t > 1$. Na druhou

stranu s rostoucím odporem zátěže roste sice účinnost obvodu, ale zároveň klesá výkon na zátěži i výkon obvodu. Nejlepší je skutečně pohybovat se v oblasti $t \in (1,3)$. Účinnost je potom $\eta \in ({}^1D_2, {}^3D_4)$ a výkon $P_Z \in (A \cdot {}^1D_4, A \cdot {}^3D_{16})$.

Graf 4



Graf 5



Úloha VI. 3 ... před plechem, za plechem (5 bodů)

Úloha měla překvapivě málo řešitelů a pouze jediný z nich, Jindřich Koloreň, dospěl ke konečnému výsledku. Přitom úloha byla jednoduchá, vystačili jste se znalostmi šíření signálu a Pythagorovou větou.

V nejjednodušší představě je zvuk dán sérií rázů vzniklých odrazem jednoho krátkého dupnutí od různých míst plochy. V jednom řešení se objevila idea vlastních kmitů plechu – můžeme však předpokládat, že energie předaná vzduchem plechu je dost malá a rychle se utlumí (narozdíl od okenních tabulek, které vězí v pružném tmele). Dále lze prohlásit, že k odrazu zpět k matfyzákovi dojde jen v případě, že odrážející plocha je kolmá na směr dopadu. Tento směr podle našeho obrázku svírá s „rovinou“ plechu úhel $\varphi = \arctg lDs$.

Vzdálenost s lze brát rovno nd pro dostatečně velká n , kdy zanedbáváme rozdíl mezi středem a obvodem oblouku plechu (max. $dD2$). Je-li vrcholový úhel těchto oblouků 120° , je $\varphi_{\min} = 30^\circ$, tedy poslední v sérii úderů bude mít pořadové číslo

$$n_{\max} = lD(d \operatorname{tg} \varphi_{\min}) = \sqrt{3}lDd.$$

Problém je v tom, že pro každé n jsou dvě místa nastavená pod příslušným úhlem, jedno patří konvexní a jedno konkávní části. Tedy jde o sadu dvojic úderů, které pro n_{\max} splynou v jeden. V počáteční fázi jsou však odrazy obou druhů vůči sobě postaveny tak, že vychází frekvence rovna dvojnásobku frekvence jednotlivých sérií. Pro nás je zajímavá spíš než tato oblast (která leží mimo rozsah slyšitelný uchem) koncová část – zde jsou dvojice již blízko sebe a frekvence odpovídá případu odrazů jediného druhu (tj. se vzdáleností následujících odrazových ploch d).

Pak n -tý odraz dojde zpět k matfyzákovi za dobu $t_n = 2(l^2 + n^2 d^2)^{1/2} Dv$. Interval mezi následujícími příchody odražené vlny pro nás ale znamená periodu slyšeného zvuku:

$$T(n) = (t_{n+1} - t_n), \text{ resp. jeho frekvence } f(n) = 1D(t_{n+1} - t_n).$$

Okamžik t_{n+1} si můžeme vyjádřit nejen pomocí n , ale i t_n :

$$t_{n+1} = 2(l^2 + n^2 d^2 + 2nd^2 + d^2)^{1/2} Dv = (t_n^2 v^2 + 4d^2 + 4d(t_n^2 v^2 - l^2)^{1/2})^{1/2} Dv.$$

Po dosazení pak dostáváme explicitní závislost frekvence na čase t ,

$$f(t) = vD((t^2 v^2 + 4d^2 + 4d(t^2 v^2 - l^2)^{1/2})^{1/2} - tv).$$

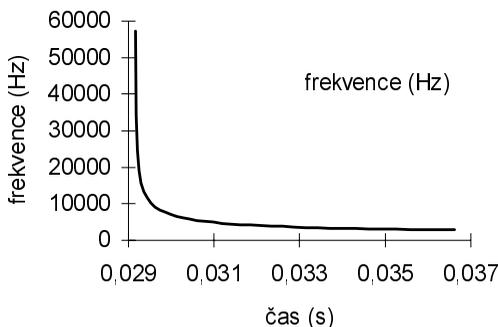
Pro velká t by bylo možné zanedbat l vůči tv a dostáváme logické dolní omezení klesající funkce rovno vDd , přičemž v počátečních fázích lze očekávat i podstatně vyšší frekvence (diskutované dvě série odrazů). Průběh této fce je na přiloženém grafu 6.

Celková doba ozvěny je zřejmě dle vypočteného n_{\max} rovna

$$t_{\max} - t = 2(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_{\min})^{1/2} lDv - 2lDv = 2lDv = 3,0 \cdot 10^{-2} \text{ s}.$$

Ovšem matfyzák jsa vybaven pouze svým uchem, vnímá jen část ležící pod prahem slyšitelnosti (asi 16 kHz), změna s tím spojená je asi desetitisícina sekundy.

Graf 6



Úloha VI. 4 ... expozice (4 body)

To, jak se povede každá fotografie, záleží na několika faktorech. Clona objektivu určuje, jak velký svazek paprsků od každého bodu před námi se zobrazí na dané místo filmu v ohniskové rovině objektivu (v ideálním případě by to měl být bod). Expozice je v podstatě doba, po kterou necháme dopadat světlo na film, můžeme předpokládat, že míra zčernání negativního filmu je přímo úměrná expozici. V naší úloze záleží pouze na tom, jak se změní intenzita I světla dopadající na celkovou plochu filmu σ , tzv. osvětlení $E = I\Delta\sigma$. Většina z vás správně vysoudila, že toto osvětlení se se vzdáleností od fotografovaného objektu nemění za předpokladu, že objekt je rovnoměrně nasvícen. Objasněme si tento závěr poněkud podrobněji.

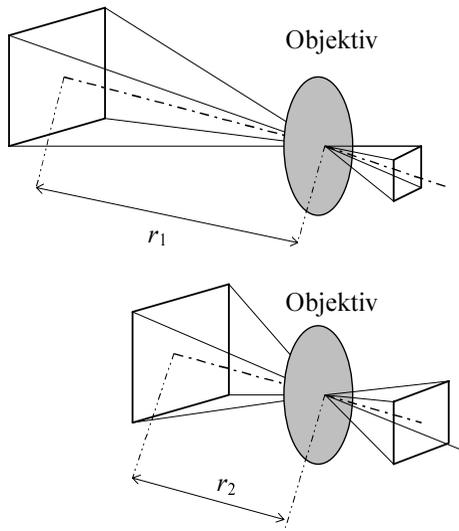
Každá elementární ploška domu září do poloprostoru před sebou stejné množství energie za jednotku času (výkon) P a to izotropně (na každý elementární prostorový úhel případně stejně). Toto je předpoklad naší úlohy, je splněn pro drsné povrchy, které dopadající světlo dobře rozptylují. Zrcadlo, či nějaký vyleštěný plech tento předpoklad nesplňují. Intenzita světla I dopadající na jednotku plochy za jednotku času ve vzdálenosti r potom je

$$I = \frac{P}{2\pi r^2} = \frac{I_0}{r^2}, \text{ ubývá tedy se čtvercem vzdálenosti.}$$

Fotograf zabírá stále stejný prostorový úhel (nemění parametry svého přístroje). Prostorový úhel 1 steradián je definován tak, že na jednotkové kulové ploše vytkne plochu o obsahu 1 m^2 . V našich vzdálenostech bereme obsah kulového vrchlíku přibližně shodný s obsahem plochy S ve vzdálenosti r . Fotograf zabírající prostorový úhel Ω tak vymezí na objektu ve vzdálenosti r plochu o obsahu $S = \Omega r^2$. (Kontrola: plný prostorový úhel je 4π , obsah kulové plochy je skutečně $4\pi r^2$.) Odtud plyne, že v poloviční vzdálenosti se plocha zabíraného okolí zmenší čtyřikrát. Jak je vidět na obr. 32, plocha domu se v poloviční vzdálenosti zobrazí na čtyřikrát větší plochu filmu, ale zároveň celková intenzita světla odražená od domu (součet intenzit od jednotlivých elementárních plošek), kterou je schopen objektiv pohltnout, vzroste také čtyřikrát. Fotograf expozici měnit neměl.

Úloha VI. 5 ... hustota vzduchu (8 bodů)

Ach jo. Vy jste tomu dali. Experimentální úloha je zaměřena na to, abyste si prověřili své teoretické znalosti a uplatnili je v praxi. Experimentovat je od slova experiment, zkouška, pokus. Není cílem přiblížit se co nejvíce tabulkovým hodnotám za každou cenu, ale spíše si něco zkusit. Experimentální fyzika není obor ryze fyzikální, většinou je potřeba použít i zna-

Obr. 32

lostí z jiných oborů – chemie, elektronika... Navíc, není třeba objevovat objevené, od toho je literatura. Ale dost lamentací. Jak tedy mělo řešení úlohy vypadat?

Všichni, kdož poslali řešení, měli jeden společný nápad. Napustit balónek plynem lehčím vzduchu (např. vodík, helium, methan) a ze změřené vztlakové síly určit hustotu vzduchu. Vztlakovou sílu můžeme určit třeba takto. Na váhu dáme závaží o hmotnosti M_0 , např. 100 g. K závaží připevníme balónek s plynem. Jelikož na balónek působí vztlaková síla, naměříme hmotnost závaží M . Rozdíl $M_0 - M$ určuje spolu s hmotností balónku m vztlakovou sílu F_{vz} . Máme tedy rovnováhu síly gravitační a vztlakové

$$F_{vz} = V(\rho_{vz} - \rho_{pl})g = (m - M_0 - M_1)g,$$

kde g je gravitační zrychlení, ρ_l hustota použitého plynu a ρ_{vz} hustota vzduchu, V je objem balónku. Úpravou dostaneme pro hledanou hustotu vzduchu

$$\rho_{vz} = \frac{m + M_0 - M_1}{V} + \rho_{pl}.$$

Neznámými zde zůstávají objem balónku V a hustota použitého plynu ρ_{pl} . Pokud použijeme obyčejný balónek (žádná zvířátka či jiné komplikované tvary), můžeme tvar balónku aproximovat např. koulí nebo rotačním elipsoidem. Ale co hustota ρ_{pl} ? Zde jsou dvě možnosti. Buď použijeme tabulky, kde jsou uvedeny hodnoty hustot plynů většinou pro teplotu 0°C a tlak 101 325 Pa. Anebo si můžeme hustotu plynu odhadnout. Jak? Je známo, že 1 kmol ideálního plynu zabírá za normálních podmínek objem 22,4 krychlového metru. Molární hmotnost souvisí s „normální“ hmotností vztahem $m = nM_m$, kde n je počet molů a M_m molekulová hmotnost. Například pro vodík H je přibližně $M_m = 2,013 \text{ kgDkmol}$, a tak pro hustotu máme

$$\rho_{H_2} = \frac{m}{V} = \frac{M_m}{V_m} = \frac{2,013 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}}{22,4 \text{ m}^3 \cdot \text{kmol}^{-1}} = 0,0899 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3},$$

přičemž tabulková hodnota je stejná. Větší odchylky nastanou zejména pro víceatomové molekuly. Poněvadž objem balónku budeme v nejlepším případě aproximovat, stačí na určení hustoty vzduchu použít podobný odhad hustoty použitého plynu ρ_{pl} .

V experimentální fyzice bývá zvykem alespoň velice zhruba odhadnout, jak velká bude měřená veličina, a tím třeba i zvolit patřičnou metodu. Víme, že vzduch se skládá ze 78% z dusíku a asi z 21% z kyslíku. Zbylé 1% přisoudíme oxidu uhličitému. Hustoty dusíku, kyslíku a oxidu uhličitého určíme výše popsáním postupem a dostaneme

$$\rho_{N_2} = 1,25 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \quad \rho_{O_2} = 1,43 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \quad \rho_{CO_2} = 1,96 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

a pro hustotu vzduchu

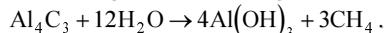
$$\rho_{vz} = 0,78\rho_{N_2} + 0,21\rho_{O_2} + 0,01\rho_{CO_2} = 1,23 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Pro měření hustoty vzduchu se nejlépe hodí plyny s co nejmenší hustotou, tj. vodík, helium nebo methan. Vodík lze v malém množství vyrobit elektrolyzou vody, popř. některou z chemických reakcí, např. $Zn + 2HCl \rightarrow ZnCl_2 + H_2$. Helium lze v „polních“ podmínkách získat jen velice těžko. Methan se vyskytuje asi z 80% v zemním plynu. V laboratoři se dá vyrobit dvěma způsoby:

a) zahříváním směsi octanu sodného s hydroxidem sodným,



b) nebo působením vody na karbid hlinitý,



Při práci s vodíkem a methanem je třeba být velice opatrný, neboť oba plyny tvoří se vzduchem silně výbušné směsi!!!!!!

Další metoda, jak určit hustotu vzduchu, je popsána v knize **Brož, Jaromír a kol.: Základy fyzikálních měření I, SPN 1983, strana 103**. Je založena na platnosti Bunsenova zákona. Je daleko univerzálnější než výše uvedená, neboť neklade omezení na použitý plyn. Hustotu vzduchu tak můžeme určit třeba srovnáním s chlorem, který má asi $3\times$ větší hustotu než vzduch. Pokud byste chtěli tuto metodu vyzkoušet dodatečně, stačí vám k tomu např. láhev od Dobré vody, kterou zbavíte dna a do uzávěru vyvrtáte (či jinak uděláte) malinkou díрку. Čím menší, tím lepší. Díрку zalepíte modelínou nebo kvalitní lepicí páskou. Láhev pak ponoříte do větší nádoby s vodou (např. 5-ti litrové sklenice od okurek). V láhvi v3ak zůstal vzduch, a tak hladina vody uvnitř láhve bude nižší než vně láhve. Nyní díрку otevřete a změřte čas t_1 , za který se hladina vody zvedne např. o 5 cm. Pak láhev ze spodu zavedenou hadičkou naplníte dalším plynem. Jakým? No třeba oxidem uhličitým. Stačí vydechnout do vody. Nebo si jej vzít ze sifonové bombičky. Anebo opět vyrobit nějakou chemickou reakcí (např. uhličitanu vápenatého s kyselinou chlorovodíkovou). Láhev několikrát plynem propláchněte, abyste se zbavili zbytku vzduchu. Pak provedete měření času t_2 , za který se hladina vody zvedne o 5 cm. Bunsenův zákon pak dává

$$\rho_1/\rho_2 = t_1^2/t_2^2 .$$

Chybu měření můžeme zmenšit opakováním měření, anebo použitím více plynů.

Dodatek (pro ty, co chtějí vědět, jak si některé plyny vyrobit „na koleně“)

- *kyslík* – rozklad peroxidu vodíku na burelu (oxid mangančitý)
 - elektrolýza vody
 - přidáváním roztoku manganistanu draselného do okyseleného peroxidu vodíku

$$5\text{H}_2\text{O}_2 + 2\text{KMnO}_4 + 3\text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow 2\text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + 8\text{H}_2\text{O} + 5\text{O}_2$$
- *chlor* – mírným zahříváním kyseliny chlorovodíkové
 - reakcí kyseliny chlorovodíkové s burelem (nebo manganistanem draselným)

$$4\text{HCl} + \text{MnO}_2 \rightarrow \text{MnCl}_2 + 2\text{H}_2\text{O} + \text{Cl}_2$$
- *dusík* – zahřívání koncentrovaného roztoku dusitanu amonného nebo směsi chloridu amonného a dusitanu amonného asi na 70°C

$$\text{NH}_4\text{NO}_2 \rightarrow \text{N}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$$

Metoda lineární regrese

Předpokládejme, že máme k dispozici N naměřených hodnot y_i, x_i mezi nimiž teorie předpokládá lineární závislost $\bar{y}_i = ax_i + b$. Ukazuje se, že podmínkou pro to, aby tato závislost co nejlépe procházela naměřenými hodnotami, je

$$(*) \quad S = \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y}_i)^2 \rightarrow \min.$$

Z této podmínky stačí nalézt rovnice pro koeficienty a, b , tomuto postupu se říká metoda nejmenších čtverců. V dalším odvození budu vynechávat meze sumace, sčítáme samozřejmě pro $i = 1, \dots, N$. Součet S je funkcí a, b , nutnou podmínkou extrému je, aby parciální derivace podle a a podle b byly nulové. Obdržíme tak dvě rovnice, které snadno vyřešíme*

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum x_i y_i - a \sum x_i^2 - b \sum x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\sum y_i \sum x_i - N \sum x_i y_i}{\left(\sum x_i\right)^2 - N \sum x_i^2}$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum y_i - a \sum x_i - Nb = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\sum x_i \sum x_i y_i - \sum y_i \sum x_i^2}{\left(\sum x_i\right)^2 - N \sum x_i^2}$$

Při výpočtu je samozřejmě vhodné nejprve spočítat příslušné sumy $\sum x_i, \sum y_i, \sum x_i y_i, \sum x_i^2$ a potom jednoduše dostaneme koeficienty a, b .

Lineární regresi lze použít na každou závislost $f(y_i) = a \cdot g(x_i) + b$, stačí provést substituci $u_i = f(y_i), v_i = g(x_i)$ a máme lineární závislost $u_i = av_i + b$. Příklady takových závislostí:

$$y = a/x + b, \quad \text{substituce } u = y, v = 1/x;$$

$$y = C e^{ax}, \quad \text{substituce } u = \ln y, v = x, b = \ln C;$$

$$\sqrt{y} = a \ln(bx), \quad \text{substituce } u = \sqrt{y}, v = \ln x.$$

Ve statistické matematice se definují nejrůznější veličiny, které popisují soubor ξ , pro nás N naměřených hodnot. Nejdůležitější z nich jsou **střední hodnota** (aritmetický průměr) definovaná vztahem

$$\mu_\xi = \frac{1}{N} \sum \xi_i \quad \text{a rozptyl } \sigma_\xi^2 = \frac{1}{N} \sum (\xi_i - \mu_\xi)^2.$$

Na těchto veličinách je založena celá teorie fyzikálních měření, tím se tu ale zabývat nebudeme. Co je pro nás podstatné z hlediska lineární regrese, je, že pomocí střední hodnoty μ a rozptylu σ^2 , resp. **směrodatné odchylky** σ (rozptyl je druhá mocnina směrodatné odchylky) můžeme nadefinovat tzv. **koeficient korelace** K , který nám říká, do jaké míry spolu souvisí naměřené hodnoty y, x . K je definován takto a po úpravách dostaneme:

* Symbol $\frac{\partial}{\partial a}$ je znakem parciální derivace, což je totéž jako normální derivace funkce, když považujeme ostatní proměnné (v našem případě b) za konstanty.

$$K = \frac{|\mu_{xy} - \mu_x \mu_y|}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{|N \sum x_i y_i - \sum y_i \sum x_i|}{\sqrt{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \sqrt{N \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}}$$

Hodnoty koeficientu korelace leží v intervalu $\langle 0,1 \rangle$, můžeme jej tedy vyjádřit v procentech. I když pravděpodobně nechápete plně matematické pozadí, vůbec to nevádí, použijete-li předešlé poznatky jako kuchařku na hodnoty y , x prošlé lineární regrese. Spočtete-li ještě sumu $\sum y^2$, snadno určíte koeficient K , který říká to, že čím více hodnoty z regrese leží na přímce, tím více se blíží hodnotě 100% a této hodnoty dosáhne, právě když bude splněno $y = ax + b$. Koeficient K kolem hodnoty 50% dává náhodnou závislost hodnot y , x . Leží-li hodnota K v intervalu $\langle 80\%, 100\% \rangle$, můžeme prohlásit, že mezi naměřenými hodnotami je rozumná lineární korelace.

Závěr: Výsledky z lineární regrese mají mít asi tuto podobu:

*Pro hodnoty y , x vychází koeficienty lineární regrese takto: $a = \dots$; $b = \dots$
Koeficient korelace hodnot je ...%.*

Poznámka: Když jsme si tak krásně nadefinovali střední hodnotu a rozptyl, neodpustím si dodat ještě toto. Předpokládejme, že jsme n -krát měřili jednu veličinu X (například hmotnost závaží) a obdrželi tak hodnoty x . Zavedeme-li ještě směrodatnou odchylku aritmetického průměru (resp. vychází takto z teorie měření) jako $\bar{\sigma}_x^2 = \sigma_x^2 / (n-1)$, můžeme napsat výsledek měření takto:

Naměřili jsme hodnotu veličiny $X = \mu_x \pm \bar{\sigma}_x$, kde chyba výsledku je směrodatnou odchylkou aritmetického průměru.

Pozor! Veličina σ_x je parametrem popisujícím celý soubor naměřených hodnot, kdežto $\bar{\sigma}_x$ se týká pouze aritmetického průměru (střední hodnoty) měření.

Úloha M. 1

Pro ty z vás, kdo si myslí, že pochopili metodu nejmenších čtverců a zároveň umějí derivovat funkce více proměnných, mám následující úkol.

Odvoďte pro soubor N hodnot y , x vztahy pro koeficienty A , B , C , které určují kvadratickou regresi $\bar{y}_i = Ax_i^2 + Bx_i + C$ z podmínky (*). Součet S chápeme jako funkci tří parametrů $S = S(A, B, C)$ a podmínky minimality lze psát takto:

$$\frac{\partial S}{\partial A} = \frac{\partial S}{\partial B} = \frac{\partial S}{\partial C} = 0 .$$

Úloha M. 1 ... kvadratická regrese (2 body)

První a poslední speciální úlohu tohoto ročníku moc lidí neřešilo a není se co divit, řešení rovnice o třech neznámých byla asi pěkná otrava, stačilo jen přepisovat výsledek podle Kramerova pravidla. Z Kramerova pravidla plyne také to, že v čitateli i ve jmenovateli řešení dvou rovnic o dvou neznámých musí být rozdíl dvou členů, není-li soustava singulární. Jak dále uvidíte, soustava tří rovnic pak dává v čitateli i jmenovateli výsledků členů šest.

Lineární regrese $y = ax + b$:

$$a = \frac{\sum y_i \sum x_i - N \sum x_i y_i}{\left(\sum x_i\right)^2 - N \sum x_i^2}, \quad b = \frac{\sum x_i \sum x_i y_i - \sum x_i^2 \sum y_i}{\left(\sum x_i\right)^2 - N \sum x_i^2}$$

Kvadratická regrese $y = ax^2 + bx + c$:

$$a = \frac{\sum x_i^2 y_i \left[N \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2 \right] - \sum x_i^3 \left[N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i \right] + \sum x_i^2 \left[\sum x_i y_i \sum x_i - \sum y_i \sum x_i^2 \right]}{\sum x_i^4 \left[N \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2 \right] - \sum x_i^3 \left[N \sum x_i^3 - \sum x_i^2 \sum x_i \right] + \sum x_i^2 \left[\sum x_i^3 \sum x_i - \left(\sum x_i^2\right)^2 \right]}$$

$$b = \frac{\sum x_i^4 \left[N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i \right] - \sum x_i^2 y_i \left[N \sum x_i^3 - \sum x_i^2 \sum x_i \right] + \sum x_i^2 \left[\sum x_i^3 \sum y_i - \sum x_i^2 \sum x_i y_i \right]}{\sum x_i^4 \left[N \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2 \right] - \sum x_i^3 \left[N \sum x_i^3 - \sum x_i^2 \sum x_i \right] + \sum x_i^2 \left[\sum x_i^3 \sum x_i - \left(\sum x_i^2\right)^2 \right]}$$

$$c = \frac{\sum x_i^4 \left[\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i \right] - \sum x_i^3 \left[\sum x_i^3 \sum y_i - \sum x_i^2 \sum x_i y_i \right] + \sum x_i^2 y_i \left[\sum x_i^3 \sum x_i - \left(\sum x_i^2\right)^2 \right]}{\sum x_i^4 \left[N \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2 \right] - \sum x_i^3 \left[N \sum x_i^3 - \sum x_i^2 \sum x_i \right] + \sum x_i^2 \left[\sum x_i^3 \sum x_i - \left(\sum x_i^2\right)^2 \right]}$$

To je hrůza, co? Ale pro počítač to je hračka, stačí jednou napsat program a běží to. Existují i jiné způsoby, jak provádět regresi polynomem n -tého stupně, které jsou založené na rekurentních výpočtech. Do programu potom napíšete elegantní cykly, ve kterých vyznat se je velice těžké.

Pozn.: Při psaní výsledků jsem použil „formát“ vzorců vynalezený Lubošem Zrnečkem, kterýžto byl nejstravitelnější.

Literatura

- [1] Press, Flannery, Teukolsky, Vetterling: *Numerical Recipes*, CUP 1986
- [2] I. E. Irodov: *Problem in General Physics*, nakladatelství Nauka, Moskva 1986
- [3] *Časopis Kvant*, ročníky 1988–1990, nakladatelství Nauka, Moskva

Pořadí nejlepších řešitelů

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	Body
	<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	☺☺	<i>MFF UK Praha</i>	<i>175</i>
1	Jindřich	Koloreňč	4.G	G Nová Paka	144
2	Matouš	Jirák	3.A	G Říčany	109
3	Rudolf	Sýkora	3.A	G Hejčín	105
4	Martin	Krsek	4.A	G J.K.Tyla Hradec Králové	79
5	Přemysl	Koloreňč	kvinta	G Nová Paka	78
6	Pavel	Bubák	3.A	G tř. kpt. Jaroše Brno	78
7	Michal	Fabinger	4.E	G Nad Alejí Praha	75
8	Jakub	Machek	3.A	G Žďár nad Sázavou	71
9	Jiří	Walek	4.B	G soukromé Havířov	69
10	Martin	Hadrávek	3.A	G Jírovcova České Budějovice	67
11	Jiří	Franta	3.A	G Příbram	61
12 - 13	Marta	Bednářová	4.A	G tř. kpt. Jaroše Brno	56
12 - 13	Peter	Macák	4.A	G Jur. Hronca Bratislava	56
14	Vlastimil	Křápek	2.C	G Křenová Brno	53
15	Robert	Šámal	4.D	G Zborovská Praha	50
16 - 17	Jaroslav	Brzák	3.?	G Nový Bydžov	47
16 - 17	David	Nečas	4.A	G tř. kpt. Jaroše Brno	47
18	Veronika	Štulíková	3.B	G Beroun	44
19 - 20	Václav	Porod	kvinta	G	43
19 - 20	Lubomír	Zrnečko	4.?	G Rumburk	43
21 - 22	Jan	Foretník	3.A	G tř. kpt. Jaroše Brno	42
21 - 22	Robert	Špalek	3.A	G Brno	42
23	Michal	Bursa	3.B	G Jana Keplera Praha	40
24	Martin	Hála	kvinta	G Rumburk	39
25 - 27	Josef	Šeda	2.C	G Křenová Brno	38
25 - 27	Zdeňka	Broklová	kvinta	G Polička	38
25 - 27	David	Stanovský	4.D	G Pardubice	38
28	Michal	Vopálenský	3.D	G Jihlava	36
29 - 30	Petr	Vejchoda	3.A	G Brno	35
29 - 30	Martin	Vohralík	4.D	G Pardubice	35
31	Martin	Čada	4.B	G Jeseník	34
32	Pavel	Klang	3.A	G tř. kpt. Jaroše Brno	33
33	Kristýna	Kupková	4.C	G Nad alejí Praha 6	28
34	Karel	Kolář	kvarta	G Sušice	27
35	Marie	Mášková	3.?	G PORG Praha - Libeň	25
36	Jan	Rychtář	4.C	G Strahonice	24
37	Anna	Jančaříková	3.C	G Zborovská Praha	21
38	David	Bača	3.A	G Frydlant n. O.	19
39 - 40	Jan	Horáček	4.A	G Valašské Meziříčí	17
39 - 40	Jana	Koláčková	oktáva	PORG Praha 8 - Libeň	17

Obsah

Úvod	5
Zadání úloh	7
Seriál na pokračování	13
Řešení úloh	31
Dodatky	60
Literatura	62
Pořadí nejlepších řešitelů	63
Obsah	64

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
UNIVERZITY KARLOVY
V PRAZE

Fyzikální korespondenční seminář – VIII. ročník

Vydalo nakladatelství MATFYZPRESS

Praha 1995

Odpovědný redaktor Mirek Beláň

68 stran, 32 obrázků, 6 grafů, 1 tabulka

Sazba písmem Times New Roman CE a grafická úprava – Microsoft Word 6.0

Autoři a opravující úloh:

Mirek Beláň (I.1, IV.4,V.4, VI.4, M.1), Saša Kupčo (I.2, III.3, IV.2, V.1, VI.1),

Tomáš Sýkora (II.2, V.2, VI.2), Petr Žemla (I.5, II.4,V.5), Tomáš Kočka (I.3, I.4, V.3),

Filip Münz (II.3, VI.3), Michal Hvězda (III.2, IV.5), Stanislav Hencel (II.1),

Petr Macháček (II.5), Jaroslav Hamrle (III.1), Vladimír Slavík (III.4),

Mirek Panoš (III.5), Miloš Gáj (IV.1), Jan Hradil (IV.3), Standa Daniš (VI.5)

Autor Seriálu na pokračování: Filip Münz

Autor dodatku: Mirek Beláň

Vydání první

Náklad 1000 výtisků