Úloha II.4 ... cesta mimo střed Země 7 bodů

Úloha o periodě oscilací tělesa puštěného do tunelu skrze střed Země je známá. Co kdybychom ale náš tunel nevykopali skrze střed Země, ale v záměrné vzdálenosti d od středu? Jaká bude perioda kmitů, tedy čas, než vypuštěné těleso proletí od jednoho konce tunelu ke druhému a vrátí se? Uvažujte nulový koeficient tření mezi stěnou tunelu a tělesem a tunel s velmi malou šířkou. Předpokládejte, že přítomnost tunelu neovlivní gravitační pole Země.

Bonus: *Jak se pohyb hmotného bodu změní, budeme-li uvažovat jeho tření se stěnou? Jakou celkovou dráhu urazí, než se definitivně zastaví?* *Petr varioval klasiku.*

Označme si souřadnici udávající polohu hmotného bodu uvnitř tunelu jako x, přičemž počátek $x = 0$ umístíme na úroveň středu tunelu. Z geometrie dostáváme, že hmotný bod padá z „výšky“ $x_0 = \sqrt{R^2 - d^2}$, kde R je poloměr Země. Pokud je hmotný bod v tunelu na pozici x, z Gaussova zákona víme, že tíhová síla, kterou na něj Země působí, je dána pouze přitažlivou silou koule pod ním a nikoliv přitažlivou silou hmotné slupky nad ním. Platí

$$F = -G\frac{mM(r)}{r^2}\,,$$

kde r je okamžitá vzdálenost bodu od středu Země a $M(r)$ je hmotnost části zeměkoule pod bodem. Je-li hmotnost celé Země $M_\oplus$ a předpokládáme, že je v ní hmota rozprostřená homogenně, je její hustota

$$\rho = \frac{M_\oplus}{(4\pi R^3)/3}\,.$$

Z toho pro $M(r)$ plyne

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3\rho = M_\oplus\frac{r^3}{R^3}\,.$$

Dosazením hmotnosti do vztahu pro F dostáváme

$$F = -\frac{mM_\oplus}{R^3}Gr\,.$$

Protože se hmotný bod může pohybovat pouze v tunelu, zajímá nás složka síly ve směru tohoto tunelu, tedy

$$F_\parallel = -\frac{mM_\oplus}{R^3}Gr\sin\varphi\,,$$

kde úhel φ je úhel vytyčený kolmicí na tunel a průvodičem spojujícím hmotný bod a střed Země. Z geometrie dostáváme

$$\sin\varphi = \frac{x}{r}\,,$$

a proto

$$F_\parallel = -\frac{mM_\oplus}{R^3}Gx\,.$$

Pohybová rovnice hmotného bodu nyní nabývá tvaru

$$m\ddot{x} - F_\parallel = 0 \implies \ddot{x} + \left(\frac{M_\oplus}{R^3}G\right)x = 0\,.$$

Tato rovnice je ve tvaru rovnice harmonických kmitů $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$; ze vztahu mezi ω a T pak máme

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{M_\oplus G}}\,.$$

Řešení bonusu

Budeme uvažovat Coulombův model tření, to znamená třecí sílu velikosti $F_{\text{třec.}} = \mu F_N$, kde μ je koeficient tření a F_N je normálová síla mezi hmotným bodem a stěnou tunelu, přičemž toto tření vždy směřuje proti směru pohybu. Z geometrie našeho problému pro třecí sílu plyne jednoduchý vztah – je konstantní a rovna

$$F_{\text{třec.}} = \mu \frac{mM_\oplus}{R^3} Gr\cos\varphi = \mu \frac{mM_\oplus}{R^3} Gd\,.$$

Než se začneme zabývat trajektorií, uvažme triviální případ a sice, že tření bude tak velké, že se hmotný bod ani nezačne pohybovat. Z rovnosti sil $F_\parallel = F_{\text{třec.}}$ na okraji tunelu zjistíme, že tato situace nastane v případě, že platí[1]

$$\mu > \sqrt{\frac{R^2}{d^2} - 1}\,.$$

Abychom nalezli trajektorii, nalezneme a vyřešíme pohybovou rovnici. Pohybová rovnice má tvar

$$m\ddot{x} = -\frac{mM_\oplus}{R^3} Gx - \mu \frac{mM_\oplus}{R^3} Gd \operatorname{sgn}\dot{x}\,.$$

Třecí sílu musíme přenásobit funkcí $-\operatorname{sgn}\dot{x}$, protože třecí síla působí proti směru rychlosti padajícího hmotného bodu. Aby se nám s rovnicí lépe pracovalo, několika úpravami si ji převedeme na vhodnější tvar

$$\begin{aligned}
\ddot{x} + \frac{M_\oplus}{R^3} Gx + \mu \frac{M_\oplus}{R^3} Gd \operatorname{sgn}\dot{x} &= 0\,,\\
\ddot{x} + \frac{M_\oplus}{R^3} G\left(x + \mu d \operatorname{sgn}\dot{x}\right) &= 0\,,\\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(x + \mu d \operatorname{sgn}\dot{x}\right) + \frac{M_\oplus}{R^3} G\left(x + \mu d \operatorname{sgn}\dot{x}\right) &= 0\,.
\end{aligned}$$

Všimněme si dvou zajímavých věcí. Funkce $\operatorname{sgn}\dot{x}$ nabývá pouze konstantních hodnot ± 1 v závislosti na směru pohybu hmotného bodu. Na úsecích, kde bod padá stejným směrem, se nám pak pohybová rovnice zjednodušuje na rovnici harmonického oscilátoru $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$, kde $y = x \mp \mu d$! Díky tomu obecné řešení nalezneme jednoduše, a to sice

$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{M_\oplus}{R^3}} Gt\right) \pm \mu d\,,$$

kde A je konstanta určená okrajovými podmínkami. Upozorněme ještě jednou na to, že takové řešení je stejné pouze na každém úseku, kde se hmotný bod pohybuje stejným směrem a po změně směru pohybu se skokově mění znaménko členu μd a hodnota konstanty A. Oindexujme si nyní úseky, po kterých bude hmotný bod padat, indexem $n \in \mathbb{Z}_0$. Jednotlivé úseky pak budou popsány funkcí $x_n(t)$. V úseku s indexem nula padá bod v záporném smyslu x, v úseku

[1] Pro jednoduchost zde považujeme statické a dynamické tření za rovné; kvůli tomu by zde ve skutečnosti stačilo tření o něco menší.

s indexem jedna v kladném a podobně dále; směru odpovídá znaménko u členu μd. To znamená, že řešení v n-tém úseku bude

$$x_n = A_n \cos\left(\sqrt{\frac{M_\oplus}{R^3}G}t_n\right) + (-1)^n \mu d\,.$$

Hodilo by se nám zjistit, v jakém čase se mění znaménko $\dot{x}_n$, tedy v jakém čase toto řešení přestává platit. Spočítáme derivaci

$$\dot{x}_n = -A_n\sqrt{\frac{M_\oplus}{R^3}G}\sin\left(\sqrt{\frac{M_\oplus}{R^3}G}t_n\right)\,.$$

Vidíme, že derivace je úměrná funkci sinus, která mění znaménko v bodech, kde se argument rovná $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Hraniční časy budou rovny

$$\tau_n = \sqrt{\frac{R^3}{M_\oplus G}}n\pi\,,\ n \in \mathbb{Z}\,.$$

Nyní již víme, v jakých časech na sebe jednotlivá řešení napojit. Dále požadujeme, aby platilo $x_n\left(\tau_{n+1}\right) = x_{n+1}\left(\tau_{n+1}\right)$, tedy aby trajektorie byla spojitá. To nám dává pro koeficienty A_n podmínku

$$A_{n+1} = A_n - 2\mu d \implies A_n = A_0 - 2n\mu d\,.$$

Chceme, aby se hmotný bod na počátku pohybu nacházel na okraji tunelu, to je ve vzdálenosti $\sqrt{R^2-d^2}$ od bodu $x = 0$ na úrovni středu Země. To nám pro nultý koeficient dává výsledek

$$A_0 = \sqrt{R^2-d^2} - \mu d$$

a celkově máme

$$x_n = \left[\sqrt{R^2-d^2} - (2n+1)\,\mu d\right]\cos\left(\sqrt{\frac{M_\oplus}{R^3}G}t_n\right) + (-1)^n\,\mu d\,,$$

$$t_n \in \left[\sqrt{\frac{R^3}{M_\oplus G}}\pi n, \sqrt{\frac{R^3}{M_\oplus G}}\pi\,(n+1)\right]\,,\ n \le N\,.$$

Zde N je určité maximální n vyjadřující úsek trajektorie, na jehož konci se hmotný bod již zastaví. N najdeme tak, že uvážíme, že na konci trajektorie hmotný bod dorazí do bodu obratu, ve kterém už přitažlivá síla Země nepřekoná třecí sílu. Aby se hmotný bod mohl po doražení do bodu obratu dále pohybovat, musí platit

$$\left|F_\parallel\left(x_n\left(\tau_{n+1}\right)\right)\right| > \left|F_{\text{třec.}}\right|\,.$$

Dosazením ze vztahů výše získáváme

$$m\frac{M_\oplus}{R^3}G\left|A_n\,(-1)^{n+1} + (-1)^n\,\mu d\right| > \mu m\frac{M_\oplus}{R^3}Gd\,,$$

po úpravě a dosazení za A_n

$$\left|-\sqrt{R^2-d^2} + (2n+1)\,\mu d + \mu d\right| > \mu d\,.$$

Chceme n omezit shora. Toho dosáhneme výběrem té části absolutní hodnoty na levé straně nerovnosti, která určuje

$$\mu d < \left[\sqrt{R^2 - d^2} - 2\,(n+1)\,\mu d\right],$$
$$n < \frac{\sqrt{R^2 - d^2}}{2\mu d} - \frac{3}{2}.$$

Maximální N pak bude první takové n, které tuto nerovnost nesplňuje. Není garantováno, že výraz určující N bude celé číslo, proto musíme uvážit jeho nejbližší vyšší celočíselnou hodnotu. Platí

$$N = \left\lceil \frac{\sqrt{R^2 - d^2}}{2\mu d} - \frac{3}{2} \right\rceil.$$

Všimněme si, že hmotný bod se nezastaví ve středu Země, ale na pozici $\pm\,(A_N - \mu d)$.

Otázku, jakou vzdálenost hmotný bod před zastavením urazí, můžeme zodpovědět pomocí jeho energetické bilance. Potenciální energie v tunelu je

$$V(x) = \frac{1}{2} m \frac{M_\oplus}{R^3} G x^2,$$

což můžeme zjistit integrací přitažlivé síly:

$$F_\parallel = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -m\frac{M_\oplus}{R^3} G x \implies V(x) = \frac{1}{2} m \frac{M_\oplus}{R^3} G x^2.$$

Rozdíl potenciální energie na začátku a na konci musí být roven práci vykonané třecími silami, proto

$$\mu m \frac{M_\oplus}{R^3} G dl = \frac{1}{2} m \frac{M_\oplus}{R^3} G\left(R^2 - d^2\right) - V\left(x_N\left(\tau_{N+1}\right)\right),$$

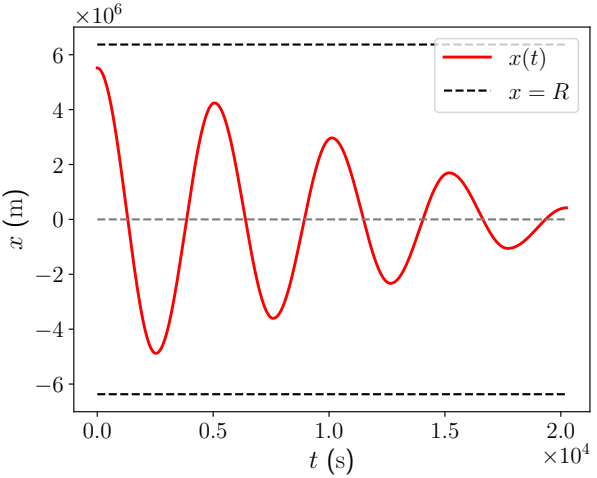
kde l je uražená dráha. Dosazením a úpravami dostáváme

$$l = 2\,(N+1)\left[\sqrt{R^2 - d^2} - (N+1)\,\mu d\right].$$

Petr Sacher
petr.sacher@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/.



Obrázek 1: Graf závislosti pozice v trubici x na čase t. Zvolili jsme parametry $d = R/2$ a $\mu = 0{,}1$.