Úloha II.3 ... přeprava hliníku 5 bodů

Jirkovi uletěl balónek, a tak ho napadlo, že by šlo převážet hliník vytvořením uzavřené nádoby vyplněné vodíkem. Jaké rozměry by měla mít tato nádoba, máme-li k dispozici 1 t *hliníku a stěna má mít kvůli pevnost co největší tloušťku? Uvažujte vodík o atmosférickém tlaku a pokojové teplotě. Počítejte s hustotou hliníku* $\rho_{\mathrm{Al}} = 2\,700\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$*, vodíku* $\rho_{\mathrm{H}} = 0{,}09\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ *a vzduchu* $\rho_{\mathrm{vz}} = 1{,}2\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$*.*

Jirka budoval prokrastinační kreativitu.

Nejprve se zabývejme tím, jaký tvar má mít nádoba, aby byly stěny co nejtlustší. Víme, že aby vzlétla určitá konstantní hmotnost hliníku, existuje konstantní nejnižší objem vodíku, který je potřeba na jeho vynesení. Hledáme tím pádem tvar, který má pro největší objem nejmenší plochu, protože $V/S \propto d$ (čím menší plocha, tím větší tloušťka d). Tuto vlastnost má koule, jedná se tedy o kulovou slupku. Nádobu budou tedy popisovat parametry vnitřní poloměr R a tloušťka kulové slupky d.

Aby nádoba vzlétla, musí být vztlaková síla vzduchu větší než síla tíhová. Vyjádříme si Archimédův zákon

$$F_{\mathrm{vz}} = F_g = F_{g_{\mathrm{H}}} + F_{g_{\mathrm{Al}}}\,.$$

Z klasického tvaru vztlakové síly $F_{\mathrm{vz}} = V\rho g$ a tíhové $F_g = mg$ dostáváme pro hustotu vzduchu ρ_{vz} a hustotu vodíku ρ_{H}

$$\frac{4}{3}\pi(R+d)^3\rho_{\mathrm{vz}}g = \frac{4}{3}\pi R^3\rho_{\mathrm{H}}g + mg\,,$$

přičemž platí

$$\frac{4}{3}\pi\left((R+d)^3 - R^3\right)\rho_{\mathrm{Al}} = m\,.$$

Po rozepsání těchto rovnic dostaneme

$$\rho_{\mathrm{vz}}\left(R^3 + 3R^2d + 3Rd^2 + d^3\right) - R^3\rho_{\mathrm{H}} = \frac{3m}{4\pi}\,,$$
$$3R^2d + 3Rd^2 + d^3 = \frac{3m}{4\pi\rho_{\mathrm{Al}}}\,.$$

Nyní máme dvě možnosti, jak úlohu řešit. Buď ji můžeme řešit numericky nebo můžeme udělat aproximaci $R \gg d$ (očekáváme totiž, že bude potřeba hodně vodíku a kulová slupka bude velká ale tenká). Využitím toho dostaneme

$$3R^2d = \frac{3m}{4\pi\rho_{\mathrm{Al}}}\,,$$
$$R^3\left(\rho_{\mathrm{vz}} - \rho_{\mathrm{H}}\right) + 3R^2d\rho_{\mathrm{vz}} = \frac{3m}{4\pi}\,.$$

Nyní si již snadno vyjádříme R

$$R = \sqrt[3]{\frac{3m(\rho_{\mathrm{Al}} - \rho_{\mathrm{vz}})}{4\pi\rho_{\mathrm{Al}}(\rho_{\mathrm{vz}} - \rho_{\mathrm{H}})}} \approx \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi(\rho_{\mathrm{vz}} - \rho_{\mathrm{H}})}} \doteq 5{,}99\,\mathrm{m}\,,$$

kde jsme provedli aproximaci, že $\rho_{\mathrm{Al}} \gg \rho_{\mathrm{vz}}$. Pro d tedy platí

$$d = \frac{m}{4\pi\rho_{\mathrm{Al}}R^2} \doteq 0{,}8\,\mathrm{mm}.$$

Jiří Sýkora
jiri.sykora@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/.