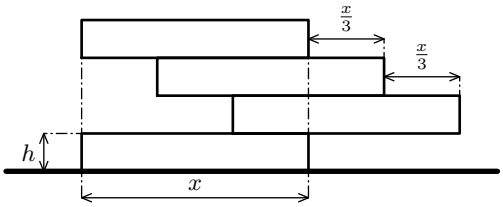
Úloha II.2 ... univerzální řešení problémů

3 body

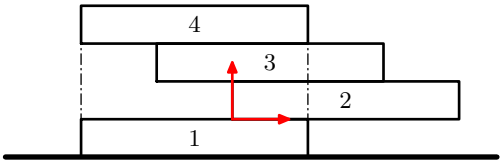
Honza se během zkouškového rozhodl uklidnit čokoládou. Koupil si čtyři stejné homogenní tabulky čokolády o délce x a výšce h. Poskládal je na sebe takto: horní a spodní tabulka jsou zarovnány a každá z prostředních tabulek je oproti tabulce nad sebou posunuta o $x/3$ doprava tak, jako ilustruje přiložený obrázek.



Bude takto sestavená čokoládová věž v rovnováze? Pokud ano, bude tato rovnováha stabilní, nebo labilní? Tabulky jsou na sobě pouze volně položeny. Každá tabulka má stejnou hmotnost.

To bude pohodě, to bude v pohodě, to bude v pohodě...

Úlohu budeme řešit systematicky a budeme postupovat podle jednotlivých pater čokolád. Může se totiž stát, že ač bude nestabilní pouze jedno patro, bude tím nestabilní i celá věž. Označme si čokolády odspodu čísly 1 až 4 jako na obrázku.



Čokoláda 1 leží vodorovně na zemi a nemá se kde převážit, čili ta bude vždy ve stabilní rovnováze. Čokoláda 2 se ovšem již převážit může. Z momentové věty tedy odvodíme, kde se bude nalézat těžiště druhého patra. Na to mj. působí tíhovou silou nejen čokoláda 2, ale seshora na ni působí i tíhovou silou čokoláda 3 a 4. Položme počátek souřadnic do levé hrany čokolády 2, aby se nám snadněji vyjadřovali vzájemné vzdálenosti.[1] Jelikož jsou čokolády homogenní, budou mít těžiště v polovině své délky a z momentové věty dostaneme

$$m\frac{x}{2} + m\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{3}\right) + m\left(\frac{x}{2} - 2\frac{x}{3}\right) = 3mr\,,$$

kde r je souřadnice těžiště. Úpravou a vydělením m získáme

$$\frac{x}{2} = 3r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{x}{6} < \frac{x}{3}\,.$$

Vidíme tak, že výslednice leží na čokoládě 1, neboť pravá hrana spodní čokolády je ve vzdálenosti $x/3$, zatímco těžiště leží pouze ve vzdálenosti $x/6$. Nejen, že je druhé patro čokolád v rovnováze, ale je i v rovnováze stabilní.

Dále se zaměříme na třetí patro, u kterého budeme postupovat analogicky. Položme si počátek souřadnic do levé hrany čokolády 3. Potom dostáváme z momentové věty

$$m\frac{x}{2} + m\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{3}\right) = 2mr\,,$$

$$r = \frac{x}{3}\,.$$

[1] Na zvolení počátku souřadnic v našem případě nezáleží, souřadnice se budou lišit pouze o aditivní konstantu. To si můžeme dovolit díky linearitě momentu síly.

Můžeme si všimnout, že výsledná tíhová síla leží přesně na hraně čokolády 2. Tabulky tedy jsou sice v rovnováze, ale při malém posunutí doleva se zhroutí. Jedná se tak o rovnováhu labilní.

Nakonec jen okomentujme čtvrté patro čokolád, které má od pohledu těžiště stabilně na třetím patře (těžiště je v polovině délky, nicméně čokoláda je posunuta pouze o jednu třetinu délky).

Závěrem tedy můžeme říct, že věž je v labilní rovnováze.

Jiří Sýkora
jiri.sykora@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/.