Úloha I.5 ... nevýkonný vařič 10 bodů

Vařič se za určitou dobu zahřál z konstantní okolní teploty T_1 na teplotu T_2. Po vypnutí proudu se na teplotu $(T_2+T_1)/2$ ochladil za stejný čas jako v předchozím případě. Na jakou maximální teplotu $T_{\max}$ je možné vařič zahřát? Předpokládejme, že výkon vařiče nezávisí na teplotě a že výkon odevzdaný okolí je přímo úměrný rozdílu teplot vařiče a okolí.

Adam ty těstoviny bude vařit dost dlouho.

Poznámka ke značení: Pro účely této úlohy se písmeno T vyhrazuje pro značení teploty (s příslušnými indexy, T bez indexu pak značí teplotu okamžitou), kdežto pro značení času využijeme písmo t popř. τ.

Vařič získává teplo svým výkonem P_{in} a část odevzdává okolí výkonem $P_{\text{out}} = k(T - T_1)$, kde k je konstanta úměrnosti, kterou neznáme. Změna teploty $\mathrm{d}T$ souvisí s přijatým teplem $\mathrm{d}Q$ dle vztahu $\mathrm{d}Q = C\,\mathrm{d}T$, kde C značí tepelnou kapacity vařiče; navíc platí $\mathrm{d}Q = (P_{\text{in}} - P_{\text{out}})\,\mathrm{d}t$. Díky tomu víme, že za čas $\mathrm{d}t$ se teplota vařiče změní právě o

$$\frac{1}{C}\left(P_{\text{in}}\,\mathrm{d}t - k(T - T_1)\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{d}T\,.$$

Tuto rovnici můžeme řešit separací, dostaneme

$$\mathrm{d}t = \frac{C}{P_{\text{in}} - k\,(T - T_1)}\,\mathrm{d}T\,.$$

Když ji pak vyintegrujeme od času $t = 0$ a teploty T_1 po nějaký obecný čas t a příslušnou teplotou $T(t)$, získáme

$$\begin{aligned}
\int_0^t \mathrm{d}t &= \int_{T_1}^{T(t)} \frac{C}{P_{\text{in}} - k\,(T - T_1)}\,\mathrm{d}T\,,\\
t &= -\frac{C}{k}\left[\ln\left|P_{\text{in}} - k\,(T\,(t) - T_1)\right| - \ln\left|P_{\text{in}}\right|\right]\,,\\
t &= -\frac{C}{k}\ln\left|1 - \frac{k}{P_{\text{in}}}\,(T\,(t) - T_1)\right|\,,
\end{aligned}$$

z čeho už jednoduše vyjádříme $T(t)$:

$$T\,(t) = T_1 + \frac{P_{\text{in}}}{k}\left(1 - e^{-(k/C)t}\right)\,.$$

Můžeme si všimnout, že pro krátké časy (čili $t \ll C/k$) můžeme exponenciálu rozvinout do prvního řádu Taylorova rozvoje a dostaneme, že teplota roste lineárně dle vztahu $T(t) \approx T_1 + + tP_{\text{in}}/C$, což vypadá smysluplně.

Označme si τ jako čas za který se vařič ohřeje na teplotu T_2 a sestavíme si pro něj rovnici:

$$T_2 = T_1 + \frac{P_{\text{in}}}{k}\left(1 - e^{-(k/C)\tau}\right)\,.$$

Pro druhou fázi, když vypneme vařič, odvodíme diferenciální rovnici z té předchozí dosazením $P_{\text{in}} = 0$. Také přejdeme k počáteční teplotě T_2

$$\begin{aligned}
t &= -\frac{C}{k}\left[\ln\left|T\,(t) - T_1\right| - \ln\left|T_2 - T_1\right|\right]\,,\\
t &= -\frac{C}{k}\ln\left|\frac{T\,(t) - T_1}{T_2 - T_1}\right|\,.
\end{aligned}$$

Vyjádřením $T\,(t)$ dostaneme

$$T\,(t) = T_1 + (T_2 - T_1)\,e^{-(k/C)t}\,.$$

Teplota tedy bude exponenciálně klesat z T_2 na T_1. Víme, že teplota klesne na $(T_1 + T_2)/2$ za stejný čas jako u zahřívaní, tedy τ, což vyjádříme rovnicí

$$\begin{aligned} T_1 + (T_2 - T_1)e^{-(k/C)\tau} &= \frac{T_1 + T_2}{2}\,, \\ (T_2 - T_1)\,e^{-(k/C)\tau} &= \frac{T_2 - T_1}{2}\,, \\ e^{-(k/C)\tau} &= \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Tento výsledek dosadíme zpět do vztahu, který jsme dostali pro zahřívaní

$$\begin{aligned} T_2 &= T_1 + \frac{P_{\mathrm{in}}}{k}\left(1 - e^{-(k/C)\tau}\right)\,, \\ T_2 - T_1 &= \frac{P_{\mathrm{in}}}{k}\left(1 - \frac{1}{2}\right)\,, \\ 2(T_2 - T_1) &= \frac{P_{\mathrm{in}}}{k}\,, \end{aligned}$$

čímž jsme vyjádřili doposud neznámou hodnotu P_{in}/k. Zbavit se dvou neznámých jedním vrzem potěší.

Když chceme zjistit, na jakou maximální teplotu se může vařič zahřát, využijeme opět závislost teploty na čase pro zapnutý vařič, a dosadíme limitu $t \to \infty$. Exponenciála půjde do ztracena (do 0), čili teplota vařiče se bude limitně blížit hodnotě

$$T_\infty = \lim_{t\to\infty} T_1 + \frac{P_{\mathrm{in}}}{k}\left(1 - e^{-(k/C)t}\right) = T_1 + 2(T_2 - T_1) = 2T_2 - T_1\,.$$

Za povšimnutí stojí, že maximální teplotu můžeme dostat jiným vhledem také z rovnosti $P_{\mathrm{in}} = P_{\mathrm{out}}$ – vařič maximální teploty dosáhne, když se tepelný výkon, který ho ohřívá, vyrovná s tepelným výkonem, který z něj odchází.

Šimon Pajger `legolas@fykos.cz`

Adam Mendl `adam.mendl@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte `https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/`.