Úloha I.4 ... zakřivený prostor 7 bodů

Na povrchu koule o poloměru R se v počáteční vzdálenosti d_0 (kde $R \gg d_0$) nacházejí dva hmotné body, oba o hmotnosti m. Spojnice těchto bodů tvoří oblouk na hlavní kružnici koule, kterou pro účely této úlohy nazveme „rovníkem“. Oběma bodům udělíme stejnou počáteční rychlost v směrem na „sever“ (tedy kolmo na definovaný rovník). Na body nepůsobí žádné vnější síly, pouze vazba, která je udržuje na povrchu koule. Body se pohybují po hlavních kružnicích (polednících), které se směrem k pólu sbíhají. Jejich vzájemná vzdálenost se proto zmenšuje. Představme si pozorovatele, který netuší, že se body pohybují po zakřiveném povrchu koule, a domnívá se, že se pohybují v ploché rovině. Tento pozorovatel si přibližování bodů vysvětluje existencí zdánlivé přitažlivé síly, která mezi nimi působí.

Jakou závislost této přitažlivé síly na okamžité vzdálenosti d mezi body by tento pozorovatel z experimentu odvodil?

Lego se zamýšlel nad vizualizacemi relativity.

Úlohu by bolo možné riešiť pomocou vzorcov geodetiky[1], to by však bolo zbytočne zložité. Môžeme totiž využiť predpoklad $d_0 \ll R$, čo znamená, že z pohľadu bodov je povrch pod nimi zanedbateľne krivý. Navyše sa body budú k sebe iba približovať, preto aj v akomkoľvek neskoršom čase bude pre ich vzájomnú vzdialenosť d platiť $d \ll R$.

Keď body vyrazia kolmo na „rovník“ a nepôsobí na ne žiadna sila (okrem tej, ktorá ich udržuje na povrchu), pôjdu po „poludníkoch“. Rozdiel ich „zemepisných dĺžok“ preto bude konštantný. Potom z definície uhla vyplýva, že pomer medzi ich vzdialenosťou a dĺžkou rovnobežky, na ktorej sa práve nachádzajú, bude konštantný[2]. Inými slovami, ich vzdialenosť je úmerná dĺžke rovnobežky, na ktorej sa nachádzajú.

Ako závisí dĺžka rovnobežky od „zemepisnej šírky“ θ? Predstavme si nasledujúci pravouhlý trojuholník. Bod na povrchu Zeme spojíme so stredom Zeme, čím vytvoríme prvú stranu (preponu). Druhú stranu získame tak, že z bodu na povrchu spustíme kolmicu na zemskú os. Tretia strana prepojí pätu tejto kolmice so stredom Zeme, pozdĺž zemskej osi. Prepona má dĺžku R, uhol trojuholníka pri bode na povrchu Zeme označíme θ; potom odvesna priľahlá k tomuto bodu má dĺžku $R\cos(\theta)$. Táto odvesna je súčasne polomerom príslušnej rovnobežky. Obvod rovnobežky je teda úmerný $\cos(\theta)$; vzájomná vzdialenosť dvoch hmotných bodov potom bude závisieť od „zemepisnej šírky“ θ ako

$$d = d_0 \cos(\theta) \ ,$$

pričom „zemepisná šírka“ závisí od prejdenej vzdialenosti s (z definície uhla) ako

$$\theta = \frac{s}{R} \, .$$

Nakoľko na body skutočne pôsobí iba väzobná sila, nie je na nich konaná žiadna práca, a preto sa zachováva ich energia. Preto sa zachová aj ich rýchlosť a platí $s = vt$. Spätným dosadením dostaneme časovú závislosť vzdialenosti bodov

$$d(t) = d_0 \cos\left(\frac{vt}{R}\right) \ . \tag{1}$$

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Great-circle_distance`

[2] Práve tu využijeme zanedbateľnú krivosť povrchu. Predstavme si body v blízkosti pólu, ktoré sú súčasne na poludníkoch s rozdielom 180°. Ich najkratšia spojnica po povrchu vedie cez pól, nie po rovnobežke. Zároveň by však pre ne platilo $d_0 = \pi R$. Pre body spĺňajúce $d_0 \ll R$ takéto problémy nemáme, čomu buď môžete uveriť, alebo si môžete úlohu spočítať úplne presne a overiť si, že po využití Taylorovho rozvoja pre $d_0 \ll R$ dostanete výsledok totožný s naším.

Pozorovateľ bude určovať silu zo vzťahu $F = ma$. Presunie sa do sústavy pohybujúcej sa rýchlosťou v spolu s bodmi a spočíta zrýchlenie bodov voči sebe ako druhú časovú deriváciu ich vzájomnej vzdialenosti d. Ostáva dodať, že na oba body pôsobí rovnaká sila a budú mať rovnaké zrýchlenie. Ich vzájomné zrýchlenie je preto dvojnásobkom zrýchlenia jedného z nich: $a_v = 2a$. Pre silu F dostaneme

$$\begin{aligned} F = ma = \frac{1}{2}ma_v = \frac{1}{2}m\ddot{d} = \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(d_0\cos\left(\frac{vt}{R}\right)\right)\right) = \frac{1}{2}md_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{v}{R}\sin\left(\frac{vt}{R}\right)\right) \\ = -\frac{1}{2}md_0\left(\frac{v}{R}\right)^2\cos\left(\frac{vt}{R}\right), \end{aligned}$$

kde znamienko mínus indikuje, že sila je príťažlivá. Dosadením z rovnice (1) prevedieme časovú závislosť sily na závislosť od vzdialenosti d; dostávame výsledok

$$F = -\frac{1}{2}md\left(\frac{v}{R}\right)^2.$$

Pozorovateľ preto môže usúdiť, že príťažlivá sila pôsobiaca medzi bodmi je úmerná ich vzdialenosti. Na základe ďalších experimentov by bolo možné okrem iného usúdiť, že táto sila je vždy úmerná hmotnosti m. To súvisí s tým, prečo Einstein dospel k záveru, že gravitačná sila je v skutočnosti zotrvačná sila; a prečo sa táto teória dá predstaviť pomocou zakrivenia časopriestoru.

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/.