Úloha I.3 ... zrcadlo, zrcadlo, změň poměr stran

6 bodů

Jaký tvar musí mít zrcadlo držené 65 cm *od očí, abychom v něm viděli obrazovku s poměrem stran* 4 : 3*, přestože její skutečný poměr stran je* 16 : 9*? Spojnice pozorovatele a obrazovky je kolmá na plochu zrcadla. Kde a v jaké vzdálenosti od nás se musí obrazovka nacházet, abychom tuto změnu pozorovali? Jaká je ohnisková vzdálenost zrcadla?*

Karel přemýšlel nad tím, jestli by se nedaly opticky modernizovat obrazovky pohledem do zrcadla.

Nejprve se zaměříme na tvar použitého zrcadla. Z geometrie úlohy víme, že musíme zachovat ortogonalitu obrazu (strany musí zůstat rovnoběžné a úhly pravé, aby opět vznikl obdélník), ale zároveň musí dojít k deformaci tvaru. Toho docílíme pouze nějakým zakřivením odrazové plochy avšak použitím kulového, nebo eliptického tvaru bychom již nedostali zachované úhly, proto jediný myslitelný tvar zrcadla je válec. Ten totiž zachová strany rovnoběžné a zároveň je dokáže jednu dvojici protějších stran obdélníku deformovat v požadované zvětšení.

U válcového zrcadla rozebereme dvě situace. V prvním případě deformujeme vodorovnou stranu (původní část poměru, která odpovídá číslu 16), zakřivení zrcadla tedy uvidíme, podíváme-li se na soustavu shora. V druhém případě deformujeme svislou stranu (v původním poměru jí odpovídá číslo 9), zakřivení zrcadla tedy uvidíme ze strany.

Nejprve tedy rozebereme první situaci. Víme, že dochází ke změně poměru 16 : 9 na 4 : 3 a strana délky 9 se zachovává. Pro zvětšení zrcadla Z tedy musí platit

$$\frac{16\,|Z|}{9} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad Z = \pm\frac{3}{4}\,,$$

přičemž absolutní hodnota vychází z toho, že nepožadujeme, aby byl obraz vzpřímený (používáme obvyklou znaménkovou konvenci).

Ze vztahu pro zvětšení jsme již schopni určit polohu obdélníku, pokud známe vzdálenost obrazovky nebo jejího obrazu od zrcadla. Při řešení předpokládáme, že obraz vzniká právě v té poloze, kde je pozorovatel, tedy ve vzdálenosti $a' = 65\,\mathrm{cm}$ před zrcadlem.

Pro příčné zvětšení zrcadla platí vztah

$$Z = -\frac{a'}{a}\,.$$

Tady si ale musíme uvědomit, že předmět nemůže být umístěn za zrcadlem, tedy musí být splněna podmínka $a > 0$. Navíc víme, že obraz vzniká před zrcadlem ($a' > 0$), tedy musí být nutně $Z = -3/4$. Pokud naopak vidíme obraz za zrcadlem, platí $Z = 3/4$. Potom již snadno vyjádříme vzdálenost předmětu (obrazovky) od zrcadla

$$a = -\frac{a'}{Z} = \frac{4}{3}a' \doteq 87\,\mathrm{cm}\,.$$

Úloha se ptá na vzdálenost obrazovky od pozorovatele, což je rozdíl mezi vzdáleností pozorovatele a obrazovky od zrcadla, tedy $87 - 65 = 22\,\mathrm{cm}$. Vzdálenost obrazovky je větší, což znamená, že obrazovka bude za pozorovatelem v této vzdálenosti.

Pro zjištění ohniskové vzdálenosti použijeme zobrazovací rovnici

$$\frac{1}{a'} + \frac{1}{a} = \frac{1}{f}\,,$$

kam můžeme za a dosadit ze vztahu $a = -a'/Z$ a dostaneme

$$\frac{1}{a'} - \frac{Z}{a'} = \frac{1}{f}\,,$$

odtud vyjádříme ohniskovou vzdálenost jako

$$f = 1/\left(\frac{1}{a'} - \frac{Z}{a'}\right) = 1/\left(\frac{1}{a'} + \frac{3}{4a'}\right) = \frac{4a'}{7} \doteq 37\,\mathrm{cm}\,.$$

V druhé situaci budeme postupovat obdobně. Máme vertikálně orientované zrcadlo, které v původním poměru zachová část délky 16. V tomto případě pro zvětšení dostáváme

$$\frac{16}{9\,|Z|} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad Z = \pm\frac{4}{3}\,.$$

Zároveň stále platí, že vzdálenosti a i a' musí být kladné. Příčné zvětšení je tedy opět s ohledem na znaménkovou konvenci záporné ($Z = -4/3$). Použijeme stejný vztah pro zvětšení

$$a = -\frac{a'}{Z} = \frac{3}{4}a' \doteq 49\,\mathrm{cm}\,,$$

V tomto případě je vzdálenost obrazovky od zrcadla menší než vzdálenost pozorovatele od zrcadla. Obrazovka tedy musí být umístěna před pozorovatelem ve vzdálenosti $65 - 49 = 16\,\mathrm{cm}$. Zobrazovací rovnice má i v tomto případě stejný tvar a pro ohniskovou vzdálenost tedy platí

$$f = 1/\left(\frac{1}{a'} - \frac{Z}{a'}\right) = 1/\left(\frac{1}{a'} + \frac{4}{3a'}\right) = \frac{3a'}{7} \doteq 28\,\mathrm{cm}\,.$$

Vidíme, že ohnisková vzdálenost je opět kladná. I v tomto případě tedy jde o duté zrcadlo. Obraz je skutečný stranově i svisle převrácený, ale v tomto případě zvětšený.

Monika Drexlerová
monika.drexlerova@fykos.cz

Pavel Tesařík
pavel.tesarik@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/.