

Úloha VI.3 ... palačinka

5 bodů

Jarda se k vytvoření palačinky rozhodl využít odstředivou sílu. Na hladkou symetrickou kruhovou pánvičku o poloměru R , která se otáčí úhlovou rychlostí ω , rychle nalil na střed těsto hmotností m . To na začátku vytvořilo váleček o výšce h_0 a poloměru r_0 ($h_0 \ll r_0 < R$). Povrchové napětí mezi těstem a okolní atmosférou je σ_1 , mezi těstem a pánvičkou je σ_2 ; mezi pánvičkou a atmosférou je povrchové napětí zanedbatelné. Na rotaci pánvičky dodáváme energii s konstantním výkonem P . Uvažujte, že hned po nalití na pánev se vrstva těsta otáčela spolu s ní a gravitace způsobuje jenom to, že vrstva má vždy tvar válce, ale jinak můžeme polohovou potenciální energii zanedbat. Za jak dlouho od začátku otáčení dosáhne těsto okraje rotujícího kruhu?

Jarda chce jíst jen ty nejsymetričtější a nejtenčí palačinky.

Úloha je motivována důležitým technologickým procesem, který nesouvisí s gastronomií, ale s litografickou výrobou polovodičových čipů. Jedná se o několikaměsíční proces probíhající ve velmi čistých prostorech. Nejdříve je křemíková deska (wafer) pokryta vrstvou fotocitlivého materiálu, tzv. fotorezistu. Přes fotomasku (šablonu s návrhem obvodu) je následně na wafer přenesen vzor pomocí UV laserů. Poté se wafer chemicky ošetří, čímž se odstraní exponovaný (nebo neexponovaný) fotorezist a vznikne požadovaný vzor. Nakonec se pomocí chemických či fyzikálních procesů materiál na nechráněných místech odstraní (leptání) nebo naopak přidá (depozice). Tím se trvale vytvoří struktura obvodu.

V prvním kroku se fotorezist nanáší metodou spin coating. Na wafer se nanese velmi malé množství kapalného fotorezistu a wafer se následně roztočí vysokou rychlostí (často i tisíce otáček za minutu). Odstředivá síla rozprostře kapalinu do velmi tenké a rovnoměrné vrstvy po celém povrchu. Tloušťka vrstvy se v závislosti na konkrétní technologii pohybuje od desítek nanometrů po několik mikrometrů.

Po tomto krátkém úvodu se už můžeme pustit do řešení úlohy. Kinetická energie rotačního pohybu se určí jako

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2,$$

kde moment setrvačnosti válce je $I = (1/2)mr^2$, přičemž r značí jeho aktuální poloměr. Na začátku je poloměr palačinky r_0 a na konci (když dosáhne okraje kruhu) je R . Rotační energie těsta tedy vzroste o

$$\Delta E_k = \frac{1}{4} m R^2 \omega^2 - \frac{1}{4} m r_0^2 \omega^2 = \frac{1}{4} m \omega^2 (R^2 - r_0^2).$$

Zůstává povrchová energie. Tu dostaneme vynásobením plochy příslušným povrchovým napětím, tedy $E_\sigma = S\sigma$. Protože platí $h_0 \ll r_0 < R$, můžeme obsah pláště zanedbat vůči obsahu podstav. Obsah jedné podstavy je $S = \pi r^2$, celková povrchová energie těsta je tak $E_\sigma = \pi r^2 (\sigma_1 + \sigma_2)$. Změnu povrchové energie mezi konečným a počátečním stavem dostaneme jako

$$\Delta E_\sigma = \pi R^2 (\sigma_1 + \sigma_2) - \pi r_0^2 (\sigma_1 + \sigma_2) = \pi (\sigma_1 + \sigma_2) (R^2 - r_0^2).$$

Kdyby povrchové napětí mezi pánvičkou a atmosférou bylo nenulové, museli bychom odčítat změnu této energie. Zadání ale říká, že tento jev máme zanedbat.

Celková energie tedy vzroste o

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_\sigma = \left(\frac{1}{4} m \omega^2 + \pi (\sigma_1 + \sigma_2) \right) (R^2 - r_0^2).$$

Tuto změnu stačí vydělit výkonem P , čímž dostaneme čas t , který bude proces trvat:

$$t = \frac{\Delta E}{P} = \frac{1}{P} \left(\frac{1}{4} m \omega^2 + \pi(\sigma_1 + \sigma_2) \right) (R^2 - r_0^2).$$

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.