Úloha VI.1 ... rozbitá houpačka 3 body

Martin na houpačku o délce závěsu $l = 2\,\mathrm{m}$ upevnil závaží a vypustil ji z vodorovné polohy. Jaká je hmotnost m, kterou Martin na houpačku zavěsil, jestliže se tento nehmotný závěs o nosnosti $T_{\mathrm{max}} = 1\,\mathrm{kN}$ přetrhl v okamžiku, kdy s vertikálou svíral úhel $\varphi = 20^\circ$? Uvažujte, že jediná hmotná část je samo závaží; předpokládejte, že závěs houpačky je celou dobu napnutý.

Martin se houpal a pak už se nehoupal.

Aby se závěs přetrhl, musí na něj působit síla vyšší než jeho nosnost. Na závaží o hmotnosti m bude působit síla odstředivá a tíhová; odstředivá síla $\mathbf{F}_{\mathrm{o}}$ působí ve směru prodloužení lana, zatímco od tíhové síly $\mathbf{F}_G$ nás zajímá pouze příspěvek v radiálním směru (získaný rozkladem do složek pomocí sinu a kosinu). Formálně se tedy lano přetrhne při

$$T_{\mathrm{max}} = F_{G,r} + F_{\mathrm{o}} = mg\cos\varphi + ma_{\mathrm{d}}\,, \tag{1}$$

kde m je zmíněná hmotnost závaží, g tíhové zrychlení, φ úhel výchylky a $a_{\mathrm{d}} = v^2/l$ dostředivé zrychlení při rovnoměrném pohybu po kružnici.

Pro určení rychlosti tohoto pohybu vyjdeme ze zákona zachování energie; naše závaží bude mít příspěvky energie kinetické E_{k} a potenciální E_{p}.

$$E_{\mathrm{celk}} = E_{\mathrm{p}} + E_{\mathrm{k}} = mgh + \frac{1}{2}mv^2$$

Jako nulovou hladinu potenciální energie si zvolme nejnižší bod, kterého může houpačka dosáhnout. Vůči této hladině je závěs (a závaží v $\varphi = 90^\circ$, maximální výchylce dané ze zadání) ve výšce l. V maximální výchylce je rychlost (a tedy i kinetická energie) nulová, proto je celková energie rovna $E_{\mathrm{celk}} = mgl$. Zbývá vyjádřit h jako funkci l, abychom mohli použít známých údajů – je však zřejmé, že půjde opět jen o rozklad na složky. Nám jde o svislou složku, proto

$$h = l(1 - \cos\varphi)\,,$$

což nám umožní vyjádřit kvadrát rychlosti v jako

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{k}} &= E_{\mathrm{celk}} - E_{\mathrm{p}}\,,\\
\frac{1}{2}mv^2 &= mgl - mgl(1-\cos\varphi)\,,\\
v^2 &= 2gl\cos\varphi\,.
\end{aligned}$$

Nyní již můžeme snadno z rovnice (1) vyjádřit hmotnost m a dosadit odvozenou rychlost spolu se zadanými hodnotami do tvaru

$$\begin{aligned}
T_{\mathrm{max}} &= m\left(g\cos\varphi + \frac{v^2}{l}\right) = m\left(g\cos\varphi + 2g\cos\varphi\right)\\
m &= \frac{T_{\mathrm{max}}}{3g\cos\varphi} \doteq 36{,}16\,\mathrm{kg}\,.
\end{aligned}$$

Na houpačku jsme tedy zavěsili závaží o hmotnosti 36,16 kg.

Maxmilián Ladislav Skuda
maxmilian.skuda@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.