Úloha V.5 ... magnetka 8 bodů

K ledničce vodorovně připojíme permanentní tyčový magnet o dipólu μ, hmotnosti m, poloměru r a délce l. Jaké nejtěžší závaží můžeme na jeho konec zavěsit, jestliže je mezi ním a ledničkou koeficient tření f? Pro jednoduchost předpokládejte, že ledničku tvoří poloprostor dokonale zmagnetovatelného kovu a že pole magnetu je dipólové a symetrické vůči jeho tělu.
Nápověda: *Použijte bodový dipól.* *Jarda sbírá magnetky na ledničku jako suvenýr.*

V materiálu ledničky se změní orientace jednotlivých magnetických domén tak, aby kompenzovala vnější magnetické pole vyvolané tyčovým magnetem. Situaci můžeme popsat pomocí fiktivního magnetu, který je někde uvnitř ledničky a jehož pole odpovídá poli, které vyvolá feromagnetický materiál ledničky. Z elektrostatiky toto chování známe – elektrický náboj u vodivé vodorovné plochy vyvolá takové přeskupení náboje, jehož pole lze popsat fiktivním nábojem opačného znaménka na druhé straně plochy. Tomuto náboji říkáme zrcadlový náboj.

Magnetostatika má s elektrostatikou mnoho společného. Ačkoli neexistují magnetické monopóly, na rozdíl od elektrických nábojů jednoho znaménka, můžeme si je fiktivně zavést a pole a síly počítat pomocí nich, matematicky je to ekvivalentní.

Místo magnetického dipólu, kterým je tyčový magnet podle zadání, tak uvažujme dva monopóly, dvě magnetická množství Φ (analogické k elektrickému náboji q) opačného znaménka v malé vzdálenosti od sebe Δ, pro která platí

$$|\mu| = \Phi\Delta\,.$$

Pro tato magnetická množství nechť platí zákony analogické s elektrostatikou. Pokud tedy uvažujeme existenci zrcadlového magnetu za stěnou ledničky, pak si místo něj také můžeme představit dvě magnetická množství, která mají opačné znaménko a leží za ledničkou, ale jinak vypadají stejně jako náš opravdový magnet.

Úloha se nás ptá na stabilitu nějaké konfigurace předmětů, musíme proto najít působící síly a momenty sil. Začněme magnetickou silou, kterou je magnet přitahován k ledničce. Vzdálenost prvního magnetického množství reálného magnetu od ledničky je $l/2 - \Delta/2$, druhé s opačným znaménkem pak má vzdálenost $l/2 + \Delta/2$. První množství se přitahuje s bližším zrcadlovým a odpuzuje se vzdálenějším zrcadlovým, u druhého reálného je to přesně naopak. Celková síla, která působí mezi reálným magnetem a zrcadlovým, tak je

$$F = \frac{\mu_0\mu_\mathrm{r}}{4\pi}\Phi^2\left(\frac{1}{(l-\Delta)^2} - \frac{1}{l^2} - \frac{1}{l^2} + \frac{1}{(l+\Delta)^2}\right)\,.$$

Připomeňme, že výpočet je stejný jako u elektrostatické síly v případě coulombické interakce, jenom faktor před závorkou je jiný. Místo $1/\varepsilon_0$ máme permeabilitu μ_0, μ_r, kde μ_r je relativní permeabilita charakterizující materiál, ze kterého je magnet vyroben. Dipól za stěnou ledničky je zrcadlový, takže permeabilita tohoto prostředí bude stejná jako na straně magnetu. Dále zmiňme, že počítáme sílu mezi dvěma magnety, proto neuvažujeme síly mezi magnetickými množstvími v jednotlivých dipólech.

Víme, že pracujeme s bodovými dipóly, tedy vzdálenost mezi jednotlivými magnetickými množstvími v magnetech Δ je výrazně menší než l, takže $\Delta \ll l$. Náš vztah tedy můžeme přepsat do tvaru

$$F = \frac{\mu_0\mu_\mathrm{r}}{4\pi}\frac{\Phi^2}{l^2}\left(-2 + \frac{1}{\left(1-\frac{\Delta}{l}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\frac{\Delta}{l}\right)^2}\right)\,,$$

abychom mohli použít Taylorův rozvoj ve tvaru $(1+y)^{-2} \approx 1-2y+3y^2-\dots$, který nám vztah značně zjednoduší. Dosazením totiž dostaneme

$$F \approx \frac{\mu_0\mu_\mathrm{r}}{4\pi}\frac{\Phi^2}{l^2}\left(-2+\left(1-2\left(-\frac{\Delta}{l}\right)+3\frac{\Delta^2}{l^2}\right)+\left(1-2\frac{\Delta}{l}+3\frac{\Delta^2}{l^2}\right)\right) =$$
$$= \frac{\mu_0\mu_r}{4\pi}\frac{6\Phi^2\Delta^2}{l^4}\,.$$

Nyní vidíme, že jsme Taylorův rozvoj opravdu potřebovali až do druhého řádu, protože první dva řády se nám vzájemně odečetly. Dále také s výhodou můžeme využít vztahu pro definici magnetického dipólu $\mu = \Phi\Delta$ a dosadit jej do vztahu pro sílu

$$F = \frac{\mu_0\mu_\mathrm{r}}{4\pi}\frac{6\mu^2}{l^4}\,.$$

Konečně jsme tedy dostali sílu, kterou je magnet kolmo přitahován k ledničce. Aby magnet nesklouzl po ledničce dolů, musí být třecí síla $F_\mathrm{t} = fF$ větší než tíhová síla magnetu a závaží. V krajním případě rovnosti platí

$$F_\mathrm{t} = fF = (m+M)\,g \quad\Rightarrow\quad M = \frac{fF}{g} - m\,,$$

kde po dosazení dostáváme

$$M = \frac{\mu_0\mu_\mathrm{r}}{4\pi}\frac{6\mu^2 f}{gl^4} - m\,.$$

Existuje ještě jedna možnost, při které se magnet se závažím na ledničce neudrží, a to přetočení kolem spodní hrany. Pro tuto možnost musíme vyšetřit momenty sil. Jedním směrem bude působit přitažlivá magnetická síla s momentem Fr, kde r je poloměr magnetu. Druhým pak moment tíhové síly magnetu $mgl/2$ a závaží Mgl. Mezní hmotnost M tedy najdeme z rovnosti momentů sil

$$Fr = \frac{mgl}{2} + Mgl \quad\Rightarrow\quad M = \frac{Fr}{gl} - \frac{m}{2}\,,$$

což po dosazení vychází

$$M = \frac{\mu_0\mu_\mathrm{r}}{4\pi}\frac{6r\mu^2}{gl^5} - \frac{m}{2}\,,$$

Výsledné M je to menší z obou vypočítaných hodnot. To by samozřejmě záviselo na přesných číselných hodnotách v zadání.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.