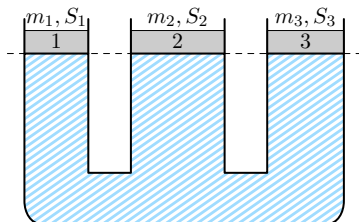


Úloha V.3 ... hydraulické W

6 bodů

Mějme hydraulický lis se třemi písty s průřezy S_1 , S_2 , S_3 a hmotnostmi m_1 , m_2 , m_3 . Na začátku se nacházejí ve stejné výšce. Jaké bude zrychlení pístu 1 v momentě, kdy všechny naráz vypustíme?



Lego si spomenul na úlohu, která kdysi byla zadaná základěškólákóm.

Nakoľko sa všetky piesty nachádzajú v tej istej výške, rozdiely tlakov pri nich v dôsledku hydrostatického tlaku budú nulové. Čiže pri každom z nich sa nachádza voda s rovnakým tlakom, označme si tento tlak p . Potom na prvý píst pôsobí tlaková sila $F_{p1} = pS_1$ zvislo nahor a obdobne pre zvyšné dva piesty.

Tiažová sila pôsobiaca na piesty bude $F_{gi} = m_i g$ nadol. Čiže pohybové rovnice pre piesty sú

$$a_1 m_1 = m_1 g - p S_1,$$

$$a_2 m_2 = m_2 g - p S_2,$$

$$a_3 m_3 = m_3 g - p S_3,$$

kde zrýchlenia a_i sú neznáme, rovnako ako tlak p . Máme teda zatiaľ tri rovnice a štyri neznáme.

Poslednú potrebnú rovnicu získame z faktu, že objem hydraulickéj kvapaliny sa musí zachovať. Matematicky môžeme túto podmienku zapísať ako

$$h_1 S_1 + h_2 S_2 + h_3 S_3 = V = \text{konst.}$$

kde h_i označuje výšku i -teho pístu. Následne buď použijeme intuíciu, alebo tento vzťah 2-krát zderivujeme podľa času a dostaneme

$$a_1 S_1 + a_2 S_2 + a_3 S_3 = 0,$$

čo je rovnica, ktorú sme potrebovali, aby sme mali 4 rovnice pre 4 neznáme. Zostáva vyriešiť výslednú sústavu.

Vydelíme každú z pohybových rovníc príslušným S_i , čímž získame

$$a_1 \frac{m_1}{S_1} = g \frac{m_1}{S_1} - p,$$

$$a_2 \frac{m_2}{S_2} = g \frac{m_2}{S_2} - p,$$

$$a_3 \frac{m_3}{S_3} = g \frac{m_3}{S_3} - p,$$

Následne sa neznámeho tlaku p zbavíme odčítaním týchto rovníc, odčítame napríklad 1. rovnicu od 2. a 1. od 3.

$$\begin{aligned} a_2 \frac{m_2}{S_2} - a_1 \frac{m_1}{S_1} &= g \left(\frac{m_2}{S_2} - \frac{m_1}{S_1} \right), \\ a_3 \frac{m_3}{S_3} - a_1 \frac{m_1}{S_1} &= g \left(\frac{m_3}{S_3} - \frac{m_1}{S_1} \right). \end{aligned}$$

Z podmienky na zachovanie objemu vyjadríme a_3

$$-\frac{S_1}{S_3} a_1 - \frac{S_2}{S_3} a_2 = a_3,$$

a dosadíme do druhej rovnice

$$\begin{aligned} a_2 \frac{m_2}{S_2} - a_1 \frac{m_1}{S_1} &= g \left(\frac{m_2}{S_2} - \frac{m_1}{S_1} \right) \\ -a_1 \frac{S_1}{S_3} \frac{m_3}{S_3} - a_2 \frac{S_2}{S_3} \frac{m_3}{S_3} - a_1 \frac{m_1}{S_1} &= g \left(\frac{m_3}{S_3} - \frac{m_1}{S_1} \right). \end{aligned}$$

Zostáva zbaviť sa a_2 , takže ho vyjadríme v oboch rovniciach

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \frac{S_2}{m_2} \frac{m_1}{S_1} + \frac{S_2}{m_2} g \left(\frac{m_2}{S_2} - \frac{m_1}{S_1} \right) \\ &= -a_1 \frac{S_3}{S_2} \frac{S_3}{m_3} \left(\frac{m_1}{S_1} + \frac{S_1}{S_3} \frac{m_3}{S_3} \right) - g \frac{S_3}{S_2} \frac{S_3}{m_3} \left(\frac{m_3}{S_3} - \frac{m_1}{S_1} \right), \end{aligned}$$

a tým pádom sa musia rovnať prave strany

$$\begin{aligned} -a_1 \frac{S_3}{S_2} \frac{S_3}{m_3} \left(\frac{m_1}{S_1} + \frac{S_1}{S_3} \frac{m_3}{S_3} \right) - g \frac{S_3}{S_2} \frac{S_3}{m_3} \left(\frac{m_3}{S_3} - \frac{m_1}{S_1} \right) &= a_1 \frac{S_2}{m_2} \frac{m_1}{S_1} + \frac{S_2}{m_2} g \left(\frac{m_2}{S_2} - \frac{m_1}{S_1} \right), \\ g \left(\frac{S_3}{S_2} \frac{S_3}{m_3} \frac{m_1}{S_1} - \frac{S_3}{S_2} \frac{S_3}{m_3} \frac{m_3}{S_3} - \frac{S_2}{m_2} \frac{m_2}{S_2} + \frac{S_2}{m_2} \frac{m_1}{S_1} \right) &= a_1 \left(\frac{S_3}{S_2} \frac{S_3}{m_3} \frac{m_1}{S_1} + \frac{S_3}{S_2} \frac{S_3}{m_3} \frac{S_1}{S_3} \frac{m_3}{S_3} + \frac{S_2}{m_2} \frac{m_1}{S_1} \right), \\ g \left(\frac{S_3}{S_2} \frac{S_3}{m_3} \frac{m_1}{S_1} - \frac{S_3}{S_2} - 1 + \frac{S_2}{m_2} \frac{m_1}{S_1} \right) &= a_1 \left(\frac{S_3}{S_2} \frac{S_3}{m_3} \frac{m_1}{S_1} + \frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{m_2} \frac{m_1}{S_1} \right), \\ g \frac{\frac{S_3}{S_2} \frac{S_3}{m_3} \frac{m_1}{S_1} + \frac{S_2}{m_2} \frac{m_1}{S_1} + \frac{S_1}{S_2} - \frac{S_1}{S_2} - \frac{S_3}{S_2} - 1}{\frac{S_3}{S_2} \frac{S_3}{m_3} \frac{m_1}{S_1} + \frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{m_2} \frac{m_1}{S_1}} &= a_1, \\ g - g \frac{\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_3}{S_2} + 1}{\frac{S_3}{S_2} \frac{S_3}{m_3} \frac{m_1}{S_1} + \frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{m_2} \frac{m_1}{S_1}} &= a_1, \\ g - g \frac{m_2 m_3 S_1 (S_1 + S_2 + S_3)}{m_1 m_2 S_3^2 + m_2 m_3 S_1^2 + m_3 m_1 S_2^2} &= a_1. \end{aligned}$$

Výsledek celkom dáva zmysel: piest bude padať so zrýchlením menším než g ; to, o koľko bude toto zrýchlenie menšie, rastie s m_2 aj m_3 . Ak budú tieto hmotnosti dostatočne veľké, pokojne môžeme dostať aj $a_1 < 0$, čo by znamenalo, že piest 1 pôjde nahor.

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.