## Úloha IV.S ... detektory ionizujícího záření 10 bodů

1. *V přiloženém souboru*[1] *najdete naměřené doby života atomů radioaktivního izotopu* $^{214}$*Po. Čas je v nanosekundách. Určete poločas rozpadu tohoto izotopu. – 3 body*

2. *Do detektoru vletěl elektron s kinetickou energií* $150\,\mathrm{keV}$ *a tuto svou energii celou odevzdal detektoru. Určete nejistotu změřené energie, pokud detektor byl*
   - *plynový detektor s argonem;*
   - *křemíkový polovodičový detektor;*
   - *scintilátor* $LaBr_3$*(Ce).*

   *Uvažujte, že zdrojem nejistoty jsou pouze fluktuace počtu vytvořených volných nosičů náboje nebo fotonů. Také předpokládejte, že detektor posbírá všechny nosiče náboje (nebo všechny fotony v případě scintilátoru). Pro scintilátor uvažujte Fanův faktor* $F = 1$. *– 2 body*

3. *Vezměme si experiment AMS-02 na palubě Mezinárodní vesmírné stanice (ISS). Jeho součástí jsou kromě dalších detektorů i detektor přechodového záření, RICH detektor a magnetický spektrometr se 7 vrstvami křemíkových detektorů. RICH detektor obsahuje NaF s indexem lomu* 1,33 *a aerogel s indexem lomu* 1,05*.*

   *Křemíkové detektory v magnetickém spektrometru kromě měření polohy s přesností* $10\,\mathrm{\mu m}$ *zvládají měřit i ztrátu energie na jednotku délky* $\mathrm{d}E/\,\mathrm{d}x$*. Kvalitativně popište, jak s pomocí těchto tří detektorů dokážeme navzájem rozlišit tyto 4 částice: elektron, proton, antiproton, jádro hélia* $^4$*He. Každá z částic má stejnou kinetickou energii* $3\,\mathrm{GeV}$*. – 2 body*

4. *Z Betheho–Blochovy rovnice odvoďte* $\beta$ *faktor, při kterém je ztráta energie na jednotku délky* $\mathrm{d}E/\,\mathrm{d}x$ *nejnižší (minimálně ionizující částice). Zanedbejte korekční členy* $\delta(\beta)$ *a* $C(\beta)$ *a taktéž předpokládejte, že rovnice v tomto tvaru platí i pro elektrony. Nezalekněte se numerického řešení. Průměrnou excitační energii můžete použít* $I = 92{,}2\,\mathrm{eV}$*, kterou jsme spočítali pro dusík pomocí vztahu z textu seriálu. Takto můžeme aproximovat průlet vzduchem. Jakou kinetickou energii má MIP elektron, MIP mion a MIP proton? – 3 body*

*Jindrou zrovna proletěl mion.*

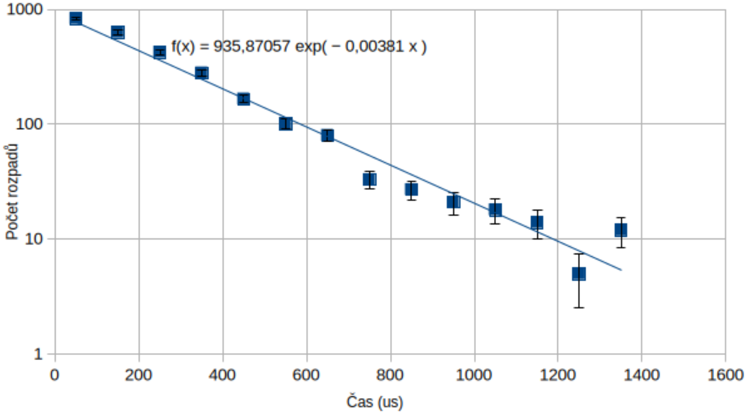
### Podúloha 1

Analýzu bylo možné provést více způsoby. Bylo možné vytvořit histogram dob života a následně proložit exponenciálu $A\exp(-\lambda t)$ (vizte obrázek 1). To lze provést i v Excelu či jiném tabulkovém procesoru. Z rozpadové konstanty $\lambda = 0{,}00381\,\mathrm{\mu s^{-1}}$ lze dopočítat poločas rozpadu

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = 182\,\mathrm{\mu s}\,.$$

Z tvaru histogramu si můžeme všimnout, že pozadí náhodných detekcí je zanedbatelné, takže můžeme spočítat i průměr dob života, který nám za těchto podmínek dá dobrý odhad střední doby života $T = 242{,}5\,\mathrm{\mu s}$. Poločas rozpadu je $T_{1/2} = T\ln 2 = 168\,\mathrm{\mu s}$. Pro porovnání je tabulkový poločas rozpadu $^{214}$Po roven $164{,}3\,\mathrm{\mu s}$.

[1] `https://drive.google.com/file/d/1V4F9egbkg8AmpQhoiTW303rTghtbb2v8/view`




Obrázek 1: Histogram dob života izotopu $^{214}$Po s proloženou exponenciálou. Osa $y$ je logaritmická, takže exponenciála v tomto zobrazení vypadá jako přímka. Analýza byla provedena v tabulkovém procesoru.

### *Podúloha 2*

Celková energie absorbovaná v detektoru je $E = 150\,\mathrm{keV}$. V případě argonového detektoru jsme v tabulce v textu seriálu našli průměrnou ionizační energii $\varepsilon = 26\,\mathrm{eV}$ a Fanův faktor $F = 0{,}16$. Počet vytvořených elektronů je $N = E/\varepsilon = 5770$ a jeho nejistota $\Delta N = \sqrt{FN} = 30$. Nejistota změřené energie je

$$\Delta E = \frac{\Delta N}{N} E = \frac{\sqrt{F \cdot \frac{E}{\varepsilon}}}{\frac{E}{\varepsilon}} E = \sqrt{FE\varepsilon} = 0{,}8\,\mathrm{keV}\,.$$

Pro křemík zjistíme z další tabulky $\varepsilon = 3{,}64\,\mathrm{eV}$ a $F = 0{,}115$ a stejným výpočtem jako pro argonový detektor spočítáme nejistotu $\Delta E = 0{,}25\,\mathrm{keV}$. Světelný výtěžek $\mathrm{LaBr_3(Ce)}$ je $\Gamma = 63000$ fotonů/MeV. Počet vytvořených fotonů je $N = E\Gamma = 9450$. V zadání bylo uvedeno, že Fanův faktor máme uvažovat rovný 1, takže nejistota počtu fotonů je $\Delta N = \sqrt{N} = 97$. Nejistota energie je $\Delta E = (\Delta N/N)E = 1{,}5\,\mathrm{keV}$.

### *Podúloha 3*

Celková energie částice je

$$E = E_k + E_0 = \gamma E_0\,,$$

kde $E_k$ je kinetická energie ($3\,\mathrm{GeV}$ pro všechny tyto částice), $E_0$ je klidová energie částice a $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ je gama faktor částice. Klidové energie elektronu, protonu, antiprotonu a jádra helia jsou $0{,}5110\,\mathrm{MeV}$, $938{,}3\,\mathrm{MeV}$, $938{,}3\,\mathrm{MeV}$ a $3727\,\mathrm{MeV}$. Beta faktor částice (poměr její rychlosti ku rychlosti světla) je

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E_k + E_0}\right)^2}\,.$$

Beta faktory pro uvažovaný elektron, proton, antiproton a jádro helia vycházejí postupně 0,9999999855, 0,9712, 0,9712, 0,8325. Hybnost částice je

$$p = \gamma m v = \gamma \beta m c\,.$$

V Čerenkovově detektoru vytvoří signál částice s rychlostí $v > c/n$, což pro NaF znamená $v > 0{,}7518c$ a pro aerogel $v > 0{,}9524c$. Postupně probereme, jaké signály můžeme očekávat od jednotlivých částic.

- Elektron s kinetickou energií $E_k = 3\,\mathrm{GeV}$, rychlostí $0{,}9999999855c$ a gama faktorem 5872 vytvoří velice silný signál v detektoru přechodového záření, protože síla signálu je úměrná $q^2\gamma$. Dále vytvoří signál i v obou Čerenkovových detektorech, kde dva Čerenkovovy úhly budou $\theta_{\mathrm{NaF}} = 41{,}2^\circ$ a $\theta_{\mathrm{aer}} = 17{,}8^\circ$.
- Proton s kinetickou energií $3\,\mathrm{GeV}$, rychlostí $0{,}9712c$ a gama faktorem 4,19 vytvoří o několik řádů slabší signál v detektoru přechodového záření v porovnání s elektronem. Dále vytvoří signál v obou Čerenkovových detektorech s úhly $\theta_{\mathrm{NaF}} = 39{,}3^\circ$ a $\theta_{\mathrm{aer}} = 11{,}3^\circ$.
- Antiproton s kinetickou energií $3\,\mathrm{GeV}$ bude mít ve všech třech detektorech stejný podpis jako proton. Jediným rozdílem je zatáčení na opačnou stranu v magnetickém spektrometru oproti protonu, jelikož antiproton má opačný náboj.
- Jádro helia s kinetickou energií $3\,\mathrm{GeV}$, rychlostí $0{,}8325c$ a gama faktorem 2,24 vytvoří v detektoru přechodového záření o trochu silnější signál než proton a antiproton, jelikož vliv vyššího náboje převáží nad nižším gama faktorem. Z Čerenkovových detektorů ale bude aktivován jen NaF, kde úhel vyzařování bude $\theta_{\mathrm{NaF}} = 25{,}4^\circ$.

### *Podúloha 4*

Bethe-Blochova rovnice byla uvedena v textu

$$-\frac{1}{\rho}\left\langle \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} \right\rangle = K z^2 \frac{Z}{A}\frac{1}{\beta^2}\left(\ln\left(\frac{2m_e c^2\gamma^2\beta^2}{I}\right) - \beta^2 - \frac{\delta(\beta)}{2} - \frac{C(\beta)}{Z}\right)\,.$$

Pro účely této podúlohy nás zajímá jen závislost na $\beta$ a zanedbáváme korekční členy, takže ji přepíšeme do podoby

$$f(\beta) = -\frac{1}{\rho}\left\langle \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} \right\rangle \propto \frac{1}{\beta^2}\ln\left(A\,\gamma^2\beta^2\right) - 1 = \frac{1}{\beta^2}\ln\left(A\,\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right) - 1\,,$$

kde $A = 11080$ je konstanta. Abychom dostali $\beta$ pro MIP částice, musíme rovnici zderivovat a položit rovnou nule

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\beta} = 0 = -2\frac{1}{\beta^3}\ln\left(A\,\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right) + \frac{2}{\beta^3(1-\beta^2)}\,,$$

$$\ln\left(A\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right) = \frac{1}{1-\beta^2}\,,$$

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\ln\left(A\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right)}}\,.$$

Tuto rovnici vyřešíme iterativně a získáme $\beta = 0{,}9562$. Iterativní numerické řešení rovnic vyžaduje, abychom rovnici s neznámou $\beta$ vyjádřili ve tvaru $\beta = f(\beta)$, což jsme provedli na posledním řádku. Dále do funkce $f(\beta)$ dosadíme počáteční odhad $\beta_0$, ze kterého dostaneme další odhad řešení $\beta_1 = f(\beta_0)$. Každý další odhad $\beta_{i+1}$ dostaneme z předchozího odhadu $\beta_i$ pomocí vztahu $\beta_{i+1} = f(\beta_i)$. Pokud máme štěstí, výsledky budou konvergovat k jedné hodnotě, což je hledané řešení rovnice. Pokud máme smůlu a hodnoty naopak divergují, musíme rovnici přeuspořádat a vyjádřit $\beta$ jinak pomocí jiné funkce $\beta = g(\beta)$. Tato funkce naštěstí konverguje poměrně rychle.

Kinetické energie $(\gamma - 1)mc^2$ elektronu, mionu a protonu v režimu MIP jsou postupně 1,23 MeV, 255 MeV a 2270 MeV.

***Jindřich Jelínek***
jjelinek@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.