Úloha IV.5 ... kladky a náboje 9 bodů

Na kladce jsou zavěšena dvě bodová závaží. Jedno má hmotnost m_1 a druhé má hmotnost m_2. Závaží m_1 nese elektrický náboj Q_1, závaží m_2 není nabité. Nahoře nad kladkou nebo dole pod kladkou ve vzdálenosti h se nachází bodový elektrický náboj Q. Existuje nějaká rovnovážná poloha závaží na kladce? Je tato poloha stabilní? Poloměr kladky považujte za zanedbatelně malý. Řešte úlohu pro případy:

1. *Náboj $Q = -1{,}00 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{C}$ se nachází ve výšce $h = 0{,}15\,\mathrm{m}$ nad kladkou. Hodnoty závaží jsou $m_1 = 1{,}00\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 2{,}00\,\mathrm{kg}$, $Q_1 = -1{,}00 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{C}$. Délka lana spojujícího obě závaží přes kladku je $l = 1{,}00\,\mathrm{m}$.*
2. *Náboj $Q = 5{,}00 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$ se nachází ve výšce $h = 0{,}30\,\mathrm{m}$ nad kladkou. Hodnoty závaží jsou $m_1 = 1{,}50\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 2{,}00\,\mathrm{kg}$, $Q_1 = 2{,}00 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{C}$. Délka lana spojujícího obě závaží přes kladku je $l = 0{,}75\,\mathrm{m}$.*
3. *Náboj $Q = 4{,}00 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{C}$ se nachází v hloubce $h = 0{,}50\,\mathrm{m}$ pod kladkou. Hodnoty závaží jsou $m_1 = 1{,}20\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 1{,}90\,\mathrm{kg}$, $Q_1 = -2{,}00 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{C}$. Délka lana spojujícího obě závaží je $l = 2{,}00\,\mathrm{m}$.*

Závaží se mohou pohybovat pouze ve vertikálním směru.

Jindra přečetl knihu „Sbírka vybraných Legových úloh o kladkách I".

Nejlépe se nám úloha bude řešit přes potenciální energie. Jako první se podíváme na první dvě podúlohy, kde se náboj Q nacházel nad kladkou.

Jestliže je závaží m_1 v hloubce x pod kladkou, nachází se závaží m_2 v hloubce $l - x$ pod kladkou, kde l je délka lana spojujícího obě závaží. Aby lano bylo stále vedeno přes kladku, musí platit $x < l$ a $l - x < l$.

Tíhové potenciální energie závaží m_1 a m_2 jsou

$$E_{g1} = -m_1 g x\,,$$
$$E_{g2} = -m_2 g(l - x)\,.$$

Elektrická potenciální energie závaží m_1 je

$$E_{e1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QQ_1}{h + x}\,.$$

Na základě definice našich souřadnic a omezení daných kladkou je hodnota x nutně kladná, stejně jako $h + x$. Celková potenciální energie soustavy v závislosti na poloze závaží m_1 je tudíž

$$E = -m_1 g x + m_2 g(x - l) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QQ_1}{h + x}\,.$$

Tento výraz zderivujeme podle x a derivaci položíme rovnu nule, abychom našli rovnovážné body

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = -m_1 g + m_2 g - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QQ_1}{(h + x)^2} = 0\,,$$
$$(h + x)^2 = \frac{QQ_1}{4\pi\varepsilon_0 g(m_2 - m_1)}\,,$$
$$x = \sqrt{\frac{QQ_1}{4\pi\varepsilon_0 g(m_2 - m_1)}} - h\,.$$

Vidíme, že řešení může existovat jen tehdy, pokud členy QQ_1 a $(m_2 - m_1)$ mají stejná znaménka. Abychom určili, zda se jedná o lokální minimum nebo maximum potenciální energie, určíme druhou derivaci a dosadíme souřadnici nalezeného rovnovážného bodu

$$\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{QQ_1}{(h+x)^3} > 0\,.$$

Druhá derivace funkce je v rovnovážném bodě kladná, jde tedy o lokální minimum potenciální energie a poloha je stabilní.

V podúloze 1 po dosazení hodnot ze zadání vychází výsledek $x = 0{,}15\,\mathrm{m}$. Tato poloha je také stabilní. Druhé závaží m_2 by se nacházelo v hloubce $l - x = 0{,}85\,\mathrm{m}$ pod kladkou.

V podúloze 2 vychází číselný výsledek $x = 1{,}05\,\mathrm{m}$. To ale nevyhovuje nutné podmínce $x < l$, tudíž v tomto případě neexistuje rovnovážná poloha.

Nyní se podíváme na podúlohu 3, kde se náboj Q nacházel v hloubce h pod kladkou. Polohu x závaží m_1 budeme znovu určovat směrem dolů od kladky. Tíhové potenciální energie závaží m_1 a m_2 jsou

$$\begin{aligned} E_{g1} &= -m_1 g x\,,\\ E_{g2} &= -m_2 g(l - x)\,. \end{aligned}$$

Elektrická potenciální energie závaží m_1 je

$$E_{e1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QQ_1}{|h-x|}\,.$$

Zde musíme dělit absolutní hodnotou rozdílu, protože pole potenciální energie je sféricky symetrické okolo bodového náboje. Elektrostatická potenciální energie nemůže změnit znaménko, když se z polohy nad nábojem přesuneme do polohy pod nábojem. Celková potenciální energie soustavy v závislosti na poloze závaží m_1 je tudíž

$$E = -m_1 g x - m_2 g(l - x) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QQ_1}{|h-x|}\,.$$

Na základě definice našich souřadnic a omezení daných kladkou je hodnota x opět nutně kladná, avšak hodnota $h - x$ může být kladná i záporná. Tento výraz opět zderivujeme podle x a položíme derivaci rovnu nule, abychom našli rovnovážné body.

Podíváme se nejprve na větev řešení, v němž vyžadujeme $h - x > 0$. V tomto případě se závaží m_1 nachází nad nábojem

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} &= -m_1 g + m_2 g + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QQ_1}{(h-x)^2} = 0\,,\\ (h-x)^2 &= \frac{QQ_1}{4\pi\varepsilon_0 g(m_1 - m_2)}\,,\\ x &= h - \sqrt{\frac{QQ_1}{4\pi\varepsilon_0 g(m_1 - m_2)}}\,. \end{aligned}$$

Vidíme, že řešení existuje jen tehdy, kdy mají členy QQ_1 a $(m_1 - m_2)$ stejná znaménka. Po dosazení čísel z podúlohy 3 dostaneme výsledek $x = -0{,}523\,\mathrm{m}$, což ale nedává fyzikální smysl, neboť by závaží m_1 muselo být nad kladkou. Při požadavku $h - x > 0$ tudíž neexistuje rovnovážná poloha.

Nyní se podíváme na větev řešení, kde vyžadujeme $h - x < 0$, závaží m_1 se tak nachází pod nábojem

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = -m_1 g + m_2 g - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QQ_1}{(x-h)^2} = 0\,,$$
$$(x-h)^2 = \frac{QQ_1}{4\pi\varepsilon_0 g(m_2 - m_1)}\,,$$
$$x = \sqrt{\frac{QQ_1}{4\pi\varepsilon_0 g(m_2 - m_1)}} + h\,.$$

V takovém případě rovnovážná poloha může existovat pouze tehdy, pokud mají členy QQ_1 a $(m_2 - m_1)$ stejná znaménka. Čísla v zadání jsou však s tímto požadavkem v rozporu, a proto ani tady neexistuje rovnovážná poloha.

Možná jste si všimli, že derivací potenciální energie jsme dostali obyčejnou podmínku rovnováhy sil. Samozřejmě jsme mohli rovnici pro rovnováhu tíhových a elektrostatických sil napsat rovnou, ale přišlo nám názornější postupovat přes potenciální energie. V komplikovanějších systémech s více objekty a ve více rozměrech je obvykle složitější sestavit rovnice pro rovnováhu sil v porovnání se sestavením rovnic pro potenciální energii. Při derivaci potenciální energie je navíc menší prostor pro chybu než při přemýšlení nad všemi silami. Dále má potenciální energie v porovnání se sílou širší využití, můžeme ji například využít při sestavení Lagrangiánu či Hamiltoniánu zkoumaného systému.

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.