Úloha IV.2 ... parciální přetlak 3 body

Mějme dvě nádoby s ideálním plynem stejného objemu i teploty, který je směsí kyslíku a dusíku. Obě jsou ve stejné výšce shora uzavřeny písty stejné tloušťky ze stejného materiálu. Písty působí na plyn jenom vlastní tíhou a se stěnami nádob neinteragují.

Poměr parciálních tlaků kyslíku v první a druhé nádobě je $3:5$. *Parciální tlak dusíku v první nádobě je o* $40\,\mathrm{Pa}$ *větší než v druhé nádobě a součet parciálních tlaků kyslíku v nádobách je stejný jako součet parciálních tlaků dusíku. Spočítejte, jak se změní poloha pístů a jaký bude celkový tlak, když nádoby propojíme.*

Monča parciálně vykrádá cvičení z mechaniky.

Nejdříve si vypočítáme, jaký je vztah mezi oběma celkovými tlaky. Víme, že obě nádoby jsou uzavřeny písty stejné tloušťky h, které jsou ze stejného materiálu, tedy mají hustotu ρ. Označme průřezy pístů S_1, S_2; tíhy pístů F_1, F_2 a tíhové zrychlení g. V tomto případě lze tlak plynu v každé nádobě (p_1 pro první nádobu a p_2 pro druhou) zvlášť popsat jako:

$$p_1 = \frac{F_1}{S_1} = \frac{\rho g h S_1}{S_1} = \rho g h\,,$$
$$p_2 = \frac{F_2}{S_2} = \frac{\rho g h S_2}{S_2} = \rho g h\,,$$

odkud snadno vidíme, že jsou oba tlaky vlastně stejné a po propojení nádob bude stejný i celkový tlak p

$$p = \frac{F_1 + F_2}{S_1 + S_2} = \frac{\rho g h \left(S_1 + S_2\right)}{S_1 + S_2} = \rho g h\,.$$

Nyní si zkusíme vše vyjádřit pomocí parciálních tlaků. Parciální tlaky směsi plynů jsou charakteristické tím, že jejich součet nám dává celkový tlak ve směsi. Pro tlak v první nádobě tedy bude platit:

$$p_1 = p^1_{\mathrm{O}_2} + p^1_{N_2}\,,$$

a pro druhou nádobu potom:

$$p_2 = p^2_{O_2} + p^2_{N_2}\,,$$

kde výše zmíněné proměnné odpovídají tlakům jednotlivých plynů (rozlišených dolním indexem) v nádobách (značených horním indexem); tedy $p^1_{O_2}$ je parciální tlak kyslíku v první nádobě a dále obdobně. Ze vztahů mezi jednotlivými parciálními tlaky ze zadání potom můžeme odvodit:

$$\frac{p^1_{O_2}}{p^2_{O_2}} = \frac{3}{5} \qquad \Rightarrow \qquad p^1_{O_2} = \frac{3}{5} p^2_{O_2}$$
$$p^1_{N_2} = p^2_{N_2} + 40\,\mathrm{Pa}\,,$$
$$p^1_{O_2} + p^2_{O_2} = p^1_{N_2} + p^2_{N_2}\,.$$

Po dosazení těchto vztahů do rovnosti tlaků potom dostaneme:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= p_2\,,\\
p^1_{O_2} + p^1_{N_2} &= p^2_{O_2} + p^2_{N_2}\,,\\
\frac{3}{5}p^2_{O_2} + p^1_{N_2} &= p^2_{O_2} + p^2_{N_2}\,,\\
p^1_{N_2} - p^2_{N_2} &= \frac{2}{5}p^2_{O_2}\,,\\
40\,\mathrm{Pa} &= \frac{2}{5}p^2_{O_2}\,,\\
p^2_{O_2} &= 100\,\mathrm{Pa}\,.
\end{aligned}
$$

Nyní dopočítáme z poměru i tlak kyslíku v první nádobě:

$$p^1_{O_2} = \frac{3}{5}p^2_{O_2} = \frac{3}{5}100\,\mathrm{Pa} = 60\,\mathrm{Pa}\,.$$

Z rovnosti součtů parciálních tlaků plynů v obou nádobách vyplývá, že:

$$p^1_{O_2} + p^2_{O_2} = 60\,\mathrm{Pa} + 100\,\mathrm{Pa} = 160\,\mathrm{Pa} = p^1_{N_2} + p^2_{N_2} = p^2_{N_2} + p^2_{N_2} + 40\,\mathrm{Pa}$$

$$2p^2_{N_2} = 120\,\mathrm{Pa} \quad \Rightarrow \quad p^2_{N_2} = 60\,\mathrm{Pa}\,.$$

Pak platí, že

$$p^1_{N_2} = p^2_{N_2} + 40\,\mathrm{Pa} = 100\,\mathrm{Pa}$$

a celkový tlak po propojení nádob je dle výše odvozené rovnosti $p = p_1 = p_2$:

$$p_1 = p^1_{O_2} + p^1_{N_2} = 160\,\mathrm{Pa}\,, \quad p_2 = p^2_{O_2} + p^2_{N_2} = 160\,\mathrm{Pa} \quad \Rightarrow \quad p = 160\,\mathrm{Pa}\,.$$

Nakonec určíme změnu polohy pístů. Před propojením má plyn v obou nádobách stejný objem ($V_1 = V_2 = V$), teplotu ($T_1 = T_2 = T$) a taky tlak ($p_1 = p_2 = p$). Označme n látkové množství plynu a R molární plynovou konstantu. Ze stavové rovnice ideálního plynu $pV = nRT$ plyne, že celkové látkové množství molekul je před spojením v obou nádobách stejné, tedy $n_1 = n_2 = n$.

Po propojení se směsi plynů snaží dosáhnout rovnováhy. Tu lze charakterizovat stavem, kdy jsou parciální tlaky jednotlivých plynů v obou nádobách stejné. Současně je celkový tlak pořád dán tíhou pístů a je neměnný, nedochází k proudění plynu; probíhá pouze spontánní difuze vyrovnávající parciální tlaky.

Označme veličiny charakterizující stav v nádobách po propojení hvězdičkou $*$. Podívejme se například na nádobu 1. Během difuze při konstantním celkovém tlaku a teplotě dochází k ekvimolární výměně molekul. To znamená, že kolik látkového množství dusíku z nádoby 1 odteče, přesně tolik látkového množství kyslíku do ní přiteče. Z toho přímo vyplývá, že celková změna látkového množství v nádobě 1 je nulová, stejně tak v druhé nádobě.

Pak můžeme pro nové parciální tlaky psát

$$p^{*1}_{N_2} = p^{*2}_{N_2}\,, \quad p^{*1}_{O_2} = p^{*2}_{O_2}\,.$$

Současně je celkový tlak všude stejný a platí

$$p^{*1}_{N_2} + p^{*1}_{O_2} = p^{*2}_{N_2} + p^{*2}_{O_2} = p = 160\,\mathrm{Pa}\,.$$

Jediným řešením této soustavy je díky zachování látkového množství plynů

$$p_{N_2}^{*1} = p_{N_2}^{*2} = p_{O_2}^{*1} = p_{O_2}^{*2} = 80\,\mathrm{Pa}\,.$$

Vidíme tedy, že celkové změny parciálních tlaků v jednotlivých nádobách se navzájem vyruší.

Zachová se tedy celkové látkové množství v nádobách $n_1 = n_1^* = n_2 = n_2^*$. Současně se zachová teplota $T^* = T$ a tlak $p^* = p$ a dostáváme

$$V_1^* = \frac{n_1^* RT^*}{p^*} = \frac{n_1 RT}{p} = V_1\,, \quad V_2^* = \frac{n_2^* RT^*}{p^*} = \frac{n_2 RT}{p} = V_2\,,$$

tedy písty se *nepohnou*.

Monika Drexlerová
monika.drexlerova@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.