

Úloha III.5 ... opilá komora

10 bodů

Do vyčerpané vysokovakuové komory vložíme uzavřenou Petriho misku o poloměru 2,0 cm, ve které je nalito 6,0 ml ethanolu. Misku najednou otevřeme a hladinu ethanolu odkryjeme. O kolik klesne hladina v misce po dlouhé době strávené v komoře, jestliže je komora uzavřená a má objem 30 l? Jak se bude výška hladiny měnit v čase? Teplota komory i ethanolu je 20 °C.

Jarda na sobě cítil veliký tlak.

Tlak nasycených par ethanolu označíme jako p_v . Pro teplotu 20 °C je to $p_v \doteq 5,95$ kPa. Na této hodnotě se ustálí tlak nad velikým povrchem hladiny ethanolu, protože se vyrovná rychlost vypařování a dopadu částic z plynné fáze.

Počet částic dopadajících na jednotku plochy za jednotku času lze odvodit jako

$$\varphi = \frac{1}{4} n v_a = \frac{p}{\sqrt{2\pi m k T}},$$

kde $n = p/kT$ je koncentrace částic v plynné fázi, $v_a = \sqrt{8kT/(\pi m)}$ je střední aritmetická rychlost částic v plynu, m je jejich hmotnost, k je Boltzmannova konstanta a T je teplota.

Při odvozování tohoto vztahu jsme vyšli z Maxwellova-Boltzmannova rozdělení, které udává počet částic s danou velikostí rychlosti jako

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{c^3} \exp\left(-\frac{v^2}{c^2}\right),$$

kde jsme zavedli $c^2 = 2kT/m$. Na danou plošku o velikosti dS tak dopadnou za čas τ částice, které se nachází ve vzdálenosti $v\tau$, mají správnou rychlost a správný směr.

Uvažujme částice ve vzdálenosti r od plošky a normálovým úhlem θ . Tyto částice se mohou pohybovat všemi směry, takže jen část míří směrem k naší plošce. Poměr vyjádříme jako průmět plošky $dS \cos \theta$ ku celkové ploše koule $4\pi r^2$. Objem v daném směru, odkud částice přilétávají, můžeme vyjádřit jako $dV = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr$, kde zavádíme i azimutální úhel. Počet částic s danou rychlostí v daném směru a objemu tak je

$$dN = n dV \frac{dS \cos \theta}{4\pi r^2} f(v) dv.$$

Nyní musíme integrovat přes všechny úhly i vzdálenosti. Úhlová část je snadná

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin 2\theta d\theta = \pi.$$

Další část je integrování přes vzdálenost. Máme

$$\int_0^{v\tau} \frac{1}{4\pi r^2} r^2 dr = \frac{v\tau}{4\pi}.$$

Na závěr ještě musíme integrovat přes rychlostní rozdělení (abychom určili, kolik částic má tu správnou rychlost), což vede na

$$\int_0^\infty v\tau f(v) dv = \tau v_a,$$

kde střední rychlost v_a je již zavedena výše. Abychom dostali tok částic, musíme počet částic N vydělit časem τ , což ale není problém

$$\Phi = \frac{N}{\tau} = \frac{1}{\tau} n \pi \frac{\tau}{4\pi} v_a = \frac{1}{4} n v_a.$$

Tímto jsme tedy naznačili odvození počtu dopadajících částic na jednotku plochy za jednotku času za předpokladu, že se částice mezi sebou nesráží.

Pojďme nyní pokračovat v naší úloze.

V případě, že se tlak nad hladinou p rovná tlaku nasycených par p_v , je rychlost dopadu částic φ stejná jako rychlost vypařování R . Můžeme tedy najít tuto rychlost vypařování jako

$$R = \frac{p_v}{\sqrt{2\pi m k T}}.$$

Tato hodnota nezávisí na tlaku nad povrchem, ale je dána pouze teplotou a vlastnostmi dané látky. Z misky umístěné do aparatury se tedy odpařuje

$$\Phi_{\text{out}} = R \pi r^2 = \pi r^2 \frac{p_v}{\sqrt{2\pi m k T}},$$

kde r je poloměr misky. Dopadá na ni ale

$$\Phi_{\text{in}} = \pi r^2 \frac{p}{\sqrt{2\pi m k T}}.$$

V rovnováze se oba toky musí vyrovnat $\Phi_{\text{in}} = \Phi_{\text{out}}$, odkud $p = p_v$.

Ze stavové rovnice ideálního plynu tak můžeme vypočítat počet odpařených částic etanolu

$$N = \frac{p_v V}{k T}$$

a jejich celkovou hmotnost

$$m_v = M_m \frac{p_v V}{R T} \doteq 3,4 \text{ g},$$

kde R je plynová konstanta a $M_m \doteq 46 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ je molární hmotnost etanolu. Při hustotě etanolu $\rho \doteq 789 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ to odpovídá vypaření objemu

$$V_v = \frac{m_v}{\rho} \doteq 4,3 \text{ cm}^3.$$

Tato hodnota je nižší než počáteční $V_0 = 6,0 \text{ ml}$, takže etanol úplně nevyschne. Hladina poklesla o

$$\Delta h = \frac{V_v}{\pi r^2} \doteq 3,4 \text{ mm}.$$

Máme připravenou půdu pro výpočet časové závislosti výšky hladiny v mističce. Známe rychlost odpařování Φ_{out} , kterou považujeme za konstantní. Naopak rychlost kondenzace Φ_{in} je úměrná tlaku v komoře. Změna počtu částic ν v mističce je tedy

$$\frac{d\nu}{dt} = \Phi_{\text{in}} - \Phi_{\text{out}} = \pi r^2 \frac{p - p_v}{\sqrt{2\pi m k T}}.$$

Nezapomeňme ale, že platí zachování celkového počtu částic

$$\nu_0 = \nu + N = \nu + \frac{pV}{kT},$$

kde ν_0 je počáteční počet částic v místičce. Dosazením za ν do diferenciální rovnice a vynásobením kT/V dostáváme

$$\frac{kT}{V} \cdot \frac{d}{dt} \left(\nu_0 - \frac{pV}{kT} \right) = -\frac{dp}{dt} = \frac{kT}{V\sqrt{2\pi mkT}} \pi r^2 (p - p_v) .$$

Tuto rovnici vyřešíme separací proměnných a integrací

$$-\frac{dp}{p - p_v} = \frac{kT\pi r^2}{V\sqrt{2\pi mkT}} dt \Rightarrow p = p_v \left(1 - \exp\left(-\frac{kT\pi r^2}{V\sqrt{2\pi mkT}} t\right) \right) ,$$

kam jsme za integrační konstantu dosadili tak, abychom měli v čase $t = 0$ nulový tlak v komoře.

Když nyní známe časový vývoj tlaku, tak můžeme určit i časový vývoj počtu částic

$$\nu(t) = \nu_0 - \frac{V}{kT} p_v \left(1 - \exp\left(-\frac{kT\pi r^2}{V\sqrt{2\pi mkT}} t\right) \right) ,$$

který pomocí vlastností etanolu přepočítáme na výšku hladiny

$$h(t) = \frac{M_m \nu(t)}{N_A \rho \pi r^2} = \frac{V_0}{\pi r^2} - \frac{M_m V}{RT \rho \pi r^2} p_v \left(1 - \exp\left(-\frac{kT\pi r^2}{V\sqrt{2\pi mkT}} t\right) \right) ,$$

což je řešením naší úlohy.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.