

Úloha III.4 ... mezi zrcadly

7 bodů

Uvažujme osově symetrické magnetické pole mezi dvěma velkými „magnetickými zrcadly“. Magnetické siločáry, které vedou od jednoho zrcadla k druhému, se směrem ke krajům zhušťují. Přitom všude platí, že složka magnetického pole rovnoběžná s osou symetrie je mnohem větší, než složka kolmá, $B_{\parallel} \gg B_{\perp}$. Uprostřed mezi zrcadly má magnetická indukce minimální hodnotu $B_{\min}$, zatímco poblíž zrcadel dosahuje maxima $B_{\max}$.

Pokud se v takovém poli pohybuje nabitá částice, zachovává se její magnetický moment $\mu = E_{\text{kin},k}/B$, kde $E_{\text{kin},k}$ je kinetická energie částice příslušná pohybu kolmo na osu symetrie. Ze středu vystřelíme částici pod úhlem θ vzhledem k ose. Jaká je podmínka, aby se částice odrazila mezi zrcadly a zůstala uvězněna?

Dále si představme, že ze středu vystřelíme velké množství částic v náhodných směrech – tedy každý směr na pomyslné sféře má stejnou pravděpodobnost. Jaká část těchto částic zůstane ve stroji uvězněná mezi zrcadly?

Marek se ztratil v zrcadlovém bludišti.

Pokud částice o hmotnosti m vyletí pod úhlem θ od osy rychlostí v , má kolmou složku kinetické energie $E_{0,k} = (1/2)mv^2 \sin^2 \theta$ a magnetický moment $\mu_0 = E_{0,k}/B_{\min}$. Protože směrem ke krajům pole roste a magnetický moment má podle zadání zůstat stejný, musí růst i kolmá složka kinetické energie. To se stane, když se bude měnit rovnoběžná kinetická energie na kolmou – částice bude zatáčet a poletí víc kolmo. Stále totiž platí zákon zachování energie, a protože magnetické pole vždy působí silou kolmo na pohyb částice, tak nekoná žádnou práci, pouze mění směr rychlosti. Celková kinetická energie tak zůstává konstantní.

Pokud je pak pole na krajích tak silné, že ani celá kinetická energie přeměrována do kolmého směru nestačí pro splnění podmínky zachování magnetického momentu, musí se částice otočit a je tedy odražena. Proto

$$\frac{E_{\text{kin}}}{B_{\max}} < \frac{E_{0,k}}{B_{\min}},$$

$$\frac{B_{\min}}{B_{\max}} < \sin^2 \theta.$$

Rovností v předchozí rovnosti dostaneme mezní úhel θ_m , pod kterým se částice ještě odrazí.

Pro druhou část úlohy budeme střílet do úplně náhodných úhlů s rovnoměrným pokrytím myšlené koule do které bychom se strefovali. Z nerovnosti výše dostaneme, že aby částice zůstala ve stroji, musí pro úhel od osy, pod kterým je částice vystřelena platit

$$\theta \in \left(\arcsin \sqrt{\frac{B_{\min}}{B_{\max}}}, \pi - \arcsin \sqrt{\frac{B_{\min}}{B_{\max}}} \right).$$

Z geometrického náhledu zjistíme, že pravděpodobnost, že se trefíme do oblasti těchto úhlů, je rovná poměru kulové vrstvy těmito úhly ohraničené ku povrchu celé koule. Tu můžeme spočítat jako poměr povrchu jednotkové sféry bez povrchu dvou kulových vrchlíků určené úhlem θ_m vůči povrchu celé jednotkové sféry. To je

$$\frac{4\pi(1)^2 - 2 \cdot 2\pi(1)^2(1 - \cos \theta_m)}{4\pi(1)^2} = \cos \theta_m = \sqrt{1 - \frac{B_{\min}}{B_{\max}}},$$

což je náš hledaný poměr.

Učeně bychom mohli stejný výpočet provést integrací. Uvědomíme si, že díky symetrii celý výpočet stačí dělat pro vhodnou čtvrtsféru a dostáváme pro pravděpodobnost

$$p = \frac{\int_0^\pi \int_{\theta_m}^{\pi/2} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi}{\int_0^\pi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi} = \frac{\pi \cos \theta_m}{\pi} = \sqrt{1 - \frac{B_{\min}}{B_{\max}}},$$

jak jsme čekali.

Marek Milička

marek.milicka@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.