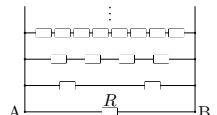


Úloha III.2 ... mocný odpor

3 body

Mějme zapojené rezistory jako na obrázku. Paralelní zapojení má nekonečně mnoho větví, v N -té z nich je 2^N sériově zapojených rezistorů a každý z nich má odpor $R = 1\ \Omega$. Jaký bude celkový odpor mezi body A a B?



David přemýšlel, jak udělat úlohu na nekonečné odpory.

Nejprve si všimněme, jak jsou odpory v obvodu uspořádány. Každé „patro“ tvoří sériově zapojené rezistory, tato patra jsou pak navzájem zapojena paralelně.

Na prvním vodiči mezi body A a B je podle zadání odpor R . Na dalším vodiči jsou rezistory zapojeny sériově, takže jejich výsledný odpor je $2R$. Každé další patro má vždy dvojnásobný odpor než to předchozí. Odpor jednotlivých pater tedy tvoří posloupnost

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = (R, 2R, 4R, 8R, \dots).$$

Protože jsou jednotlivá patra zapojena paralelně, pro určení celkového odporu R_c nesčítáme odpory pater přímo, sčítáme jejich převrácené hodnoty (vodivosti) jako

$$\frac{1}{R_c} = \sum_i \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{4R} + \dots$$

Vytkneme-li $1/R$, zbude nám součet

$$\frac{1}{R_c} = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right).$$

A zde se nám v závorce objevuje známá geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$, v níž je každý další člen je polovinou předchozího. Tento typ řady vzniká vždy, když se nějaký příspěvek opakovaně zmenšuje stejným poměrem – zde pokaždé na polovinu, protože odpor pater roste dvojnásobně.

Nekonečnou geometrickou řadu můžeme sečíst pomocí známého vzorce

$$s = \frac{a_1}{1 - q},$$

kde $a_1 = 1/R$ je první člen posloupnosti a q její kvocient, tedy číslo, kterým můžeme určit další příspěvek v součtu (více v dodatku); v našem případě $q = 1/2$.

Výsledkem je tedy

$$\frac{1}{R_c} = \frac{1/R}{1 - 1/2} \Rightarrow R_c = \frac{1}{2}R.$$

Dodatek o posloupnostech a řadách

V samotném řešení se nám ona řada pomalu snesla z nebe, ukážeme zde proto nějakou intuici za řadami.

Posloupnost je soubor objektů (pro nás zejména čísel), u nichž záleží na pořadí, a prvky se v nich mohou opakovat. Můžeme je vytvořit pouhým výčtem nebo nějakým předpisem – geometrická posloupnost je konkrétním příkladem druhého typu, kdy máme zadaný první člen

a každý další člen získáme vynásobením bezprostředně předchozího členu *kvocientem*, charakterizujícím číslem, které je pro celou posloupnost stejné. Pro geometrické posloupnosti tedy platí, že n -tý člen a_n můžeme získat jako

$$a_n = a_1 q^{n-1},$$

kde a_1 je první člen a q kvocient.

Řadami pak jen nazýváme součty posloupností. Pro konečnou geometrickou řadu s n členy si nyní odvodíme, jak ji sečíst. Součet s_n bude mít obecně tvar

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

což lze přepsat jako

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1}.$$

Celou rovnici můžeme vynásobit $-q$, čímž získáme

$$-s_n q = -a_1 q - a_1 q^2 - a_1 q^3 - \dots - a_1 q^n.$$

Obě předchozí rovnice lze sečíst, jejich součet má tvar

$$\begin{aligned} s_n - s_n q &= a_1 - a_1 q^n \\ s_n(1 - q) &= a_1(1 - q^n) \\ s_n &= a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}. \end{aligned}$$

Nyní nám zbývá poslední krok, a to převod z konečné řady do nekonečné. Zamysleme se nejprve nad tím, kdy má smysl mluvit o součtu v závislosti na hodnotě kvocientu q : pokud bude platit $q > 1$, každý další člen posloupnosti bude větší než ten předchozí, a proto i celkový součet „uteče“ do nekonečna (formálně říkáme, že řada *diverguje*). Konečný součet bude mít tedy řada s nekonečným počtem sčítanců pouze tehdy, když se bude příspěvek od každého dalšího členu snižovat, jinými slovy $q < 1$.

Podívejme se na výraz

$$s_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

znovu a zamysleme se nad tím, jak bude vypadat v nekonečnu.¹ Uvažujeme jen řady, které sečíst můžeme, proto víme, že $q < 1$. Jediná část závislá na n je právě q^n . A protože je $q < 1$, bude se s rostoucím n hodnota tohoto výrazu snižovat, až „nepůjde rozlišit od nuly“. Proto lze součet nekonečné geometrické řady vyjádřit jako

$$s_\infty = a_1 \frac{1 - 0}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Maxmilián Ladislav Skuda
maxmilian.skuda@fykos.cz

Monika Drexlerová
monika.drexlerova@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

¹Formálně bychom spočetli limitu tohoto výrazu. Zatím si však postačíme s intuicí.