

Úloha III.1 ... (ne)stabilní toaleták

3 body

Danku zajímá, jak se změní stabilita roličky toaletního papíru, když se z ní část použije. Proto vzala novou roličku, která obsahuje $N = 120$ útržků, a změřila její parametry. Zjistila, že rolička je vysoká $h = 9,5$ cm, má průměr $d_1 = 12,5$ cm a váží $m_1 = 139$ g. Samotný kartonový váleček, na který je papír namotaný, má průměr $d_0 = 3,5$ cm a váží $m_0 = 4$ g. Kolikrát menší bude potenciální energie potřebná k převrácení roličky, když na ní zůstane jen třetina papíru ve srovnání s počátečním stavem? Uvažujte rovnoměrné navinutí vrstev papíru těsně na sebe, bez objemových deformací.

Danka si zapomněla vzít mobil s sebou na záchod.

Stabilita mechanické soustavy (v našem případě samotné rolky papíru) je rozdíl potenciální energie mezi vratkou a stálou rovnovážnou polohou. Takže hovorí kolko energie (minimálně) musíme rolce dodat, aby sme ju prevrátili. Vratká poloha je v prípade rolky stav, kedy je naklonená tak, že sa jej ťažisko (ktoré je kvôli symetrii v strede rolky) nachádza nad bodom otáčania. Spočítajme najprv stabilitu pôvodnej rolky. Jej potenciálna energia pri státi na podložke v stabilnej polohe je

$$E_{01} = m_1 g \frac{h}{2}.$$

Označme vzdialenosť ťažiska od bodu otáčania a_1 . Potom pri naklonení do vratkej polohy je jej potenciálna energia

$$E_1 = m_1 g a_1 = m_1 g \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_1}{2}\right)^2}.$$

Stabilita pôvodnej rolky bude teda

$$\begin{aligned} S_1 &= E_1 - E_{01}, \\ S_1 &= \frac{m_1 g}{2} \left(\sqrt{h^2 + d_1^2} - h \right), \\ S_1 &\doteq 42,27 \text{ mJ}. \end{aligned}$$

Aby sme spočítali stabilitu rolky s tretinou pôvodného množstva papíru, pozrime sa na zmenu jej hmotnosti a rozmerov. Pôvodná hmotnosť papíru je $m_{p1} = m_1 - m_0$. Z nej na rolke zostane tretina, takže výsledná hmotnosť rolky je súčet tejto hmotnosti a hmotnosti kartónového valčeka

$$m_2 = \frac{m_1 - m_0}{3} + m_0 = \frac{m_1 + 2m_0}{3}.$$

Potom potenciálna energia rolky s tretinou papíru v stabilnej polohe je

$$E_{02} = m_2 g \frac{h}{2}.$$

Aby sme spočítali potenciálnu energiu vo vratkej polohe, potrebujeme poznať vzdialenosť medzi ťažiskom rolky a bodom otáčania

$$a_2 = \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}.$$

na to potrebujeme spočítať priemer rolky s tretinou papiera d_2 . Tu je kľúčové si uvedomiť, že odstránením dvoch tretín dĺžky papiera zároveň odstránime dve tretiny jeho objemu. Pôvodný objem papiera je

$$V_{p1} = \pi h \left[\left(\frac{d_1}{2} \right)^2 - \left(\frac{d_0}{2} \right)^2 \right].$$

Potom objem tretiny pôvodného papiera je

$$V_{p2} = \pi h \left[\left(\frac{d_2}{2} \right)^2 - \left(\frac{d_0}{2} \right)^2 \right] = \frac{1}{3} V_{p1}.$$

Dosadením výrazu pre V_{p1} a úpravou rovnosti dostávame

$$\begin{aligned} \frac{\pi h}{4} (d_2^2 - d_0^2) &= \frac{1}{3} \frac{\pi h}{4} (d_1^2 - d_0^2), \\ d_2^2 &= \frac{d_1^2 - d_0^2}{3} + d_0^2, \\ d_2 &= \sqrt{\frac{d_1^2 + 2d_0^2}{3}}, \\ d_2 &\doteq 7,76 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Takže potenciálna energia rolky s tretinou papiera vo vratkej polohe je

$$\begin{aligned} E_2 &= m_2 g a_2, \\ E_2 &= \frac{m_1 + 2m_0}{3} \frac{g}{2} \sqrt{h^2 + \left(\frac{d_1^2 + 2d_0^2}{3} \right)}. \end{aligned}$$

Stabilita rolky s tretinou papiera je potom

$$\begin{aligned} S_2 &= E_2 - E_{02}, \\ S_2 &= \frac{m_1 + 2m_0}{3} \frac{g}{2} \left(\sqrt{h^2 + \frac{d_1^2 + 2d_0^2}{3}} - h \right), \\ S_2 &\doteq 6,65 \text{ mJ}. \end{aligned}$$

Pomer veličín S_1 a S_2 nám nakoniec dáva

$$\frac{S_1}{S_2} \doteq 6,4.$$

Takže na prevrátenie rolky s tretinou pôvodného množstva toaletného papiera je potrebných 6,4krát menej energie.

Daniela Dupkalová
daniela@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.