## Úloha II.5 ... indukovaná interakce 10 bodů

*Mějme nehybnou homogenní nenabitou vodivou sféru o poloměru $R$. Z nekonečna v záměrné vzdálenosti $b$ k ní byla rychlostí $v$ vystřelena částice s nábojem $q$. Určete, za jakých podmínek nedojde ke srážce částice s vodivou sférou. Přítomnost indukovaného magnetického pole zanedbejte. Záměrnou vzdáleností rozumíme vzdálenost středu sféry od přímky, po které se částice asymptoticky pohybuje z nekonečna, v angličtině najdeme termín* impact parameter*.*

*Jarda chtěl simulovat interakce molekul.*

K řešení použijeme metodu fiktivních nábojů pro vodivou sféru[1] a metodu efektivního potenciálu pro pohyb ve sféricky symetrickém potenciálu.[2] Ten nám umožní separovat pohyb v radiálním a angulárním směru, čímž se úloha efektivně stane jednorozměrnou. Na problém pak budeme moci nahlížet jako na pohyb částice v jednorozměrném potenciálu, který si dobře dokážeme představit.

Pole indukované vodivou sférou lze nahradit polem od fiktivního náboje $q'$ nacházejícího se někde uvnitř sféry a fiktivního náboje $q''$ nacházejícího se ve středu sféry. Poloha náboje $q'$ je obrazem polohy reálného náboje v kulové inverzi. Označme po řadě $\mathbf{r}$ a $\mathbf{r}'$ průvodiče nábojů $q$ a $q'$ vzhledem k počátku umístěnému ve středu vodivé sféry. Potom

$$rr' = R^2 \quad \Rightarrow \quad r' = \frac{R^2}{r}\,.$$

Nejprve uvažme, že sféra je uzemněná a náboj ve středu je nulový. Celkový elektrický potenciál má být nulový na povrchu sféry. Zejména je tedy nulový v průsečíku spojnice nábojů s povrchem vodivé sféry, ve kterém dostáváme podmínku

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r-R} + \frac{q'}{R-r'}\right) = 0\,,$$

$$q' = -\frac{R-r'}{r-R}q = -\frac{R}{r}q\,.$$

Reálný náboj se tedy bude pohybovat jako kdyby byl v potenciálu vytvořeném fiktivním nábojem

$$V(\mathbf{r}) = q\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r-r'} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R}{r^2-R^2}\,.$$

V tomto scénáři se však pro pozorovatele vně sféry jeví, že je sféra nabitá nábojem $q'$. Abychom tento celkový náboj eliminovali, můžeme do středu sféry umístit náboj $q'' = -q'$, který vytvoří dodatečné coulombovské pole. To jistě nenaruší konstantnost potenciálu na sféře (což je přesně podmínkou vodivosti sféry) a zřejmě tak řeší náš původní problém. Celkový potenciál je tedy tvaru

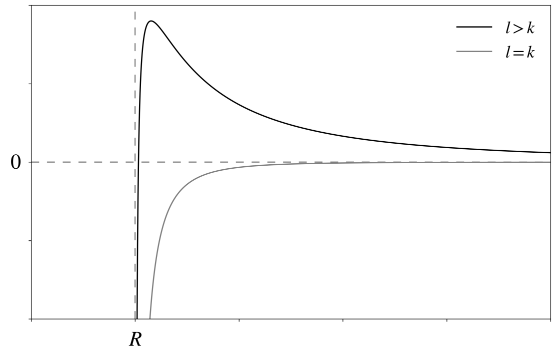
$$V(\mathbf{r}) = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R}{r^2-R^2} + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R}{r^2}\,.$$

Potenciál závisí pouze na poloze náboje a situace je sféricky symetrická. Můžeme tak zavést efektivní potenciál

$$V_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}) + \frac{L^2}{2mr^2} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R}{r^2-R^2} + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R}{r^2} + \frac{L^2}{2mr^2} = -\frac{k^2}{r^2-R^2} + \frac{l^2}{r^2}\,, \tag{1}$$

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Method_of_image_charges

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Effective_potential




Obrázek 1: Efektivní potenciál $V_{\mathrm{eff}}$ (svislá osa) v závislosti na poloze $r$ (vodorovná osa) pro $l > k$ (křivka s maximem) a $l = k$ (monotónně rostoucí křivka).

kde jsme zavedli konstanty $k = \sqrt{(q^2 R)/(4\pi\varepsilon_0)}$ a $l = \sqrt{k^2 + L^2/(2m)}$.

Řešení úlohy nyní spočívá v diskusi průběhu efektivního potenciálu $V_{\mathrm{eff}}(\mathbf{r})$, který je znázorněn na obrázku 1. Zřejmě $V_{\mathrm{eff}} \to -\infty$ pro $r \to R^+$ a $V_{\mathrm{eff}} \to 0$ pro $r \to \infty$. Zajímá nás chování pouze na intervalu $(R, \infty)$, kde se již žádné další divergence nenachází. Pro další úvahy spočtěme první derivaci potenciálu

$$\frac{\mathrm{d}V_{\mathrm{eff}}}{\mathrm{d}r} = \frac{2k^2 r}{(r^2 - R^2)^2} - \frac{2l^2}{r^3}\,.$$

Pro nalezení stacionárních bodů položíme derivaci rovnu nule

$$\frac{2k^2 r}{(r^2 - R^2)^2} - \frac{2l^2}{r^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad (l^2 - k^2) r^4 - 2R^2 l^2 r^2 + R^4 l^2 = 0\,, \tag{2}$$

což je (dokud $k \neq l$) kvadratická rovnice pro $r^2$. Pro $r$ dostáváme kořeny

$$r = R\sqrt{\frac{l}{l \pm k}}\,,$$

ovšem hledáme pouze kořeny splňující $r > R$, z čehož ihned odvodíme, že vyhoví pouze kořen $r_0 = R\sqrt{l/(l-k)}$, přičemž musí být splněna podmínka $l > k$. Ovšem ta je z definice $l$ splněna vždy, dokud $k \neq l$.

Diskuse se nám proto dělí na dva případy.

i) Pro $l > k$ existuje lokální maximum uvnitř intervalu $(R, \infty)$. Bude tedy existovat kritická energie $E_0 = E(r_0)$. Pro $E \leq E_0$ se částice ve smyslu radiální složky pohybu zastaví a obrátí směr svého pohybu ještě před tímto maximem (nebo v něm zůstane stát) a se sférou se nemůže srazit. Pro $E > E_0$ je energie maxima překonatelná a částice se se sférou srazí.

ii) Pro $l = k$ dostáváme z (2) vyjádření

$$-2R^2 l^2 r^2 + R^4 l^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{R}{\sqrt{2}}\,.$$

Extrém tak neleží v intervalu $(R, \infty)$. Potenciál je na celém intervalu $(R, \infty)$ rostoucí a záporný. Pro $E < 0$ zřejmě nemůže částice existovat v nekonečnu a tento případ je pro naši úlohu irelevantní. Pro $E \geq 0$ hodnota efektivního potenciálu klesá k mínus nekonečnu a částice se tak se sférou srazí.

Celkem jsme zjistili, že částice se se sférou nesrazí právě tehdy, když bude $l > k$ (což odpovídá $L \neq 0$) a zároveň $E \leq E_0$.

Dosazením $r_0$ do rovnice (1) vyjádříme kritickou energii

$$E_0 = V_{\mathrm{eff}}(r_0) = -\frac{k(l-k)}{R^2} + \frac{l(l-k)}{R^2} = \frac{(l-k)^2}{R^2}\,.$$

Nyní uvažme částici v poloze $\mathbf{r}$ s rychlostí $-v\mathbf{e}_x$ ve vertikální vzdálenosti $b$ od středu sféry. Taková částice má moment hybnosti

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = -mv(\mathbf{r} \times \mathbf{e}_x) \quad \Rightarrow \quad L = mvr\sin\theta\,,$$

Zřejmě $\sin\theta = b/r$, a tedy

$$L = mvr\,\frac{b}{r} = mvb\,. \tag{3}$$

Moment hybnosti částice se ve sféricky symetrické úloze zachovává. Z rovnice (3) aplikované při vystřelení z nekonečna dostáváme $L = mvb$, kde $v$ a $b$ jsou počáteční rychlost a záměrná vzdálenost. Pro parametr $l$ tedy dostáváme

$$l = \sqrt{k^2 + \frac{L^2}{2m}} = \sqrt{k^2 + \frac{1}{2}mv^2b^2}\,.$$

Celkovou energii částice udává její kinetická energie v nekonečnu. Aby se částice se sférou nesrazila, má platit $L \neq 0$ a $T \leq E_0$, kde $T = (1/2)mv^2$ je počáteční kinetická energie. První podmínku splníme, pokud bude $v \neq 0$ a zároveň $b \neq 0$. Druhá podmínka přejde na

$$\frac{1}{2}mv^2 \leq \frac{1}{R^2}\left(\sqrt{k^2 + \frac{L^2}{2m}} - k\right)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2(b^2 - R^2) \geq 2k\sqrt{k^2 + \frac{1}{2}mv^2b^2} - 2k^2\,, \tag{4}$$

přičemž

$$2k\sqrt{k^2 + \frac{1}{2}mv^2b^2} - 2k^2 = 2k\left(\sqrt{k^2 + \frac{1}{2}mv^2b^2} - k\right) \geq 0\,. \tag{5}$$

Z rovnic (5) a (4) je patrné, že nerovnost bude splněna pouze pokud $|b| \geq R$. V takovém případě můžeme nerovnost umocnit, čímž dostáváme kvadratickou nerovnici pro $T = (1/2)mv^2$ ve tvaru

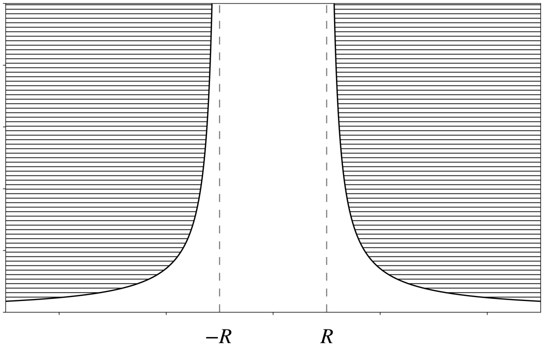
$$T(b^2 - R^2) + 2k^2 \geq 2k\sqrt{k^2 + Tb^2} \quad \Rightarrow \quad (b^2 - R^2)^2T^2 - 4k^2b^2T + 4k^2(b^2 - R^2)T \geq 0\,,$$

kterou můžeme ihned vydělit $T$ (které je kladné, neboť $v \neq 0$), čímž dostáváme

$$(b^2 - R^2)T - 4k^2R^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (b^2 - R^2)T \geq 4k^2R^2\,. \tag{6}$$

Nerovnost (6) zřejmě nemůže být splněna, pokud $|b| < R$. Pro $|b| > R$ dostáváme

$$T \geq \frac{4k^2R^2}{b^2 - R^2} \iff v^2 \geq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{8q^2}{m}\frac{R^3}{b^2 - R^2} \tag{7}$$




Obrázek 2: Prostor parametrů $b$ (vodorovná osa) a $v$ (svislá osa) pro $v \geq 0$. Šrafovaná část grafu odpovídá nastavení parametrů, při kterém se částice se sférou nesrazí. Do této množiny spadá i její okraj v podobě dvou černých křivek.

Zbývá vyřešit případ $|b| = R$. Zde podmínka (6) říká, že $k^2 \leq 0$, tedy $k = 0$, což může nastat jen pro nulový náboj $q$ nebo nulový poloměr $R$. Celkem jsme tak zjistili, že částice se se sférou nesrazí, pokud bude $|b| > R$ a zároveň bude splněna nerovnost (7), jak je znázorněno na obrázku 2.

Na závěr několik poznámek. V případě $E = E_0$ pro $l > k$ se částice ocitne na kruhové orbitě, která je ale nestabilní. Stačil by tedy libovolně malý radiální impuls, který by ji vychýlil buď zpět do nekonečna, nebo do spárů nabité sféry. Pokud žádný takový impuls neuvažujeme (což je sice nerealistické, ale v souladu se zadáním), potom částice skutečně zůstane kroužit na kruhové orbitě a se sférou se nesrazí.

Dále poznamenejme, že pro vysoké rychlosti bude nutné započíst jak relativistické efekty, tak efekt indukovaného magnetického pole, čímž se úloha stane velmi netriviální.

***Jakub Koňárek***
`jakub.konarek@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.