

Úloha I.E ... ztracený předmět

11 bodů

Možná se i vy divíte, kam až se dokáže dostat malý předmět poté, co vám omylem spadl na zem. Vyberte si drobný předmět (šroubek, matičku apod.) a změřte vzdálenost místa nalezení předmětu od místa dopadu v závislosti na výšce upuštění od země. Pro každou počáteční výšku proveďte dostatečně mnoho měření pro snížení statistické chyby. Zamyslete se nad vhodnými předměty a podložkami.

Jardovi se zase zatoulala matka v laboratoři.

Úvod a teorie

Pokusme se sestavit co nejjednodušší model, který by nám situaci pomohl popsat a se kterým bychom mohli porovnat naměřené výsledky. Do jaké vzdálenosti od místa dopadu se daný předmět může dostat? To je dáno jeho horizontální rychlostí po odrazu v_h a koeficientem tření f , který působí mezi ním a podložkou. Kinetická energie se přemění na práci vykonanou třecí silou podle zákona zachování energie

$$\frac{1}{2}mv_h^2 = mgfd,$$

kde m je hmotnost předmětu, g tíhové zrychlení a d uražená vzdálenost. Už tady se náš model odchyluje od skutečnosti, protože nezahrnuje otáčení předmětu, jeho různé poskakování a další pohyby. Započítání čehokoli ostatního by nám však nyní situaci velmi zkomplikovalo.

Jaká je tedy počáteční horizontální rychlost? Ze zákona zachování energie bychom mohli najít vertikální rychlost v_v těsně před dopadem

$$\frac{1}{2}mv_v^2 = mgh,$$

kde h je počáteční výška předmětu nad podložkou. Při nárazu se změní směr a velikost rychlosti, obecně bychom ale mohli předpokládat, že rychlost po odrazu bude úměrná rychlosti před dopadem s nějakým koeficient úměrnosti k

$$v_h = kv_v,$$

kde k závisí na přesné geometrii dopadu, materiálu předmětu a mnoha dalších parametrech. Spojíme-li ale nyní předchozí hypotézy dohromady, dostáváme vztah mezi počáteční výškou a vzdáleností d jako

$$mgh = \frac{1}{2}mv_v^2 = \frac{1}{2}m\frac{v_h^2}{k^2} = \frac{mgfd}{k^2},$$

$$\frac{k^2}{f}h = d.$$

Podle našeho velmi zjednodušeného modelu by tak vzdálenost od místa dopadu měla být úměrná výšce, ze které byl předmět upuštěn.

Postup měření

Jako testovací předmět byla zvolena malá šestihhranná matka ze stavebnice *Merkur*. Pomocí skládacího metru byla kontrolována výška, ze které byla matka upuštěna z ruky. Na začátku byla matka držena v ruce v nahodilé orientaci, aby byla simulována situace ze zadání, tedy upuštění předmětu z náhodné pozice. Matka byla upuštěna vždy nad vyznačeným místem, která označíme jako místo dopadu.

Pro každou výšku bylo upuštěno vždy 20 matek. Po každém upuštění nebyla matka ihned odstraněna, místo toho se pokračovalo s další. Až po upuštění všech matek došlo k vyfotografování podložky, na které všechny matky ležely. Jedna z výsledných fotografií je uvedena na obrázku 1. Jednotlivé matky byly od sebe vzdálené natolik, že do sebe nenarážely, takže tento postup mohl být použit.



Obrázek 1: Fotografie měření pro stejnou výšku $h = 10$ cm, ze které byla později data odečtena.

Následně byly v programu *GeoGebra* změřeny vzdálenosti středů matek na fotografii od místa dopadu. Jako měřítko pro převod do reálné velikosti byla použita délka hrany dlaždice podlahy, na které byl experiment prováděn. Tato délka byla změřena jako 30,0 cm. Je možné, že místo dopadu matek nebylo vždy přesně stejné, ale vzhledem k mnohem většímu rozptylu naměřených hodnot můžeme zejména u větších výšek h tuto chybu zanedbat.

Výsledky

V tabulce 1 jsou uvedené naměřené vzdálenosti d od místa dopadu pro různé výšky h . Zvolený interval výšek byl shora omezen rozměry místnosti, ve které měření probíhalo.

Vidíme, že hodnoty se i pro jednu výšku značně liší. Výrazně tedy závisí na parametrech dopadu. I tak ale vypočítáme průměrnou hodnotu $\bar{d}$, do které se předmět dostal, a k ní výběrovou směrodatnou odchylku jednoho měření podle vztahu

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (d_i - \bar{d})^2},$$

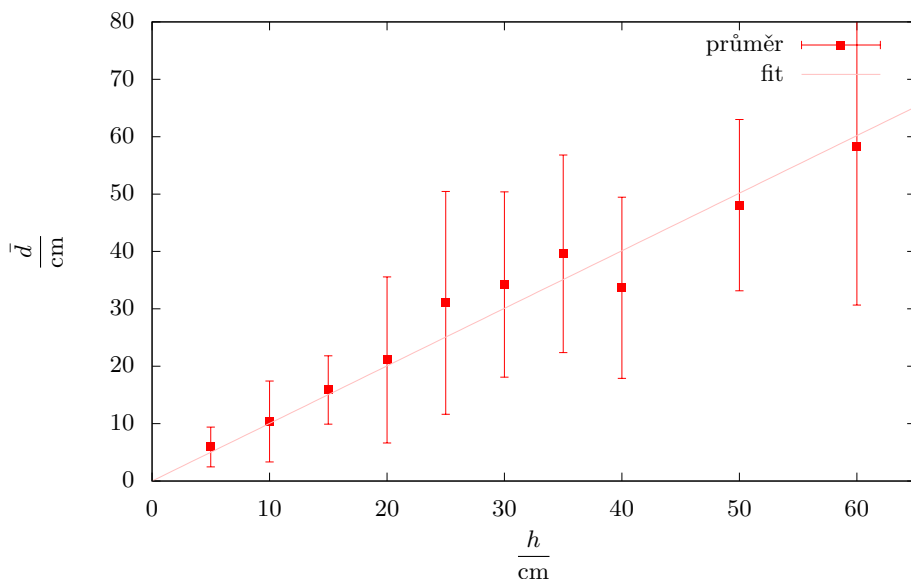
kde $N = 20$ je počet měření pro každou výšku a d_i jsou naměřené hodnoty. V závislosti na výšce h rozepíšeme dané hodnoty do tabulky 2 a vyneseme daný průměr do grafu 2. Vypočítáme také relativní chybu $\sigma_r = \sigma/\bar{d}$. Vzhledem k tomu, jak velký je rozptyl naměřených hodnot oproti přesnosti jejich naměření, můžeme nejistotu naměření dané hodnoty zanedbat a nebudeme ji dále uvažovat.

Tabulka 1: Vzdálenost d matky od místa dopadu po upuštění z výšky h .

$\frac{h}{\text{cm}}$	5	10	15	20	25	30	35	40	50	60
Matka	$\frac{d}{\text{cm}}$	$\frac{d}{\text{cm}}$	$\frac{d}{\text{cm}}$	$\frac{d}{\text{cm}}$	$\frac{d}{\text{cm}}$	$\frac{d}{\text{cm}}$	$\frac{d}{\text{cm}}$	$\frac{d}{\text{cm}}$	$\frac{d}{\text{cm}}$	$\frac{d}{\text{cm}}$
1	10,3	20,4	19,4	63,3	30,5	62,4	67,7	35,6	71,9	81,7
2	16,7	29,8	20,6	36,3	34,8	56,0	54,9	53,5	70,1	100,3
3	9,7	20,0	16,6	37,8	43,1	51,2	36,7	55,0	56,1	93,5
4	8,3	9,4	24,4	31,1	56,4	50,5	58,7	39,1	72,5	86,1
5	8,2	21,0	24,2	30,4	57,8	42,6	71,8	41,5	60,0	60,2
6	5,6	15,4	22,6	24,3	45,5	41,9	64,1	48,2	58,2	93,5
7	4,7	11,5	22,2	25,7	32,1	61,7	40,2	59,7	64,8	71,9
8	6,5	10,9	26,1	15,2	17,5	36,0	37,0	53,2	45,4	102,4
9	7,3	8,0	21,9	19,6	32,6	32,4	28,4	34,7	49,0	72,2
10	5,9	7,0	10,3	17,8	33,1	38,6	42,4	38,5	46,6	46,0
11	4,1	3,7	13,3	14,8	29,5	22,6	39,6	41,5	53,5	59,7
12	5,6	4,6	12,9	13,7	27,9	24,5	33,8	37,4	41,9	58,2
13	2,8	7,4	8,9	16,3	26,0	20,0	31,0	30,6	46,3	40,7
14	3,4	8,3	9,4	8,5	14,3	20,5	32,2	21,8	38,3	48,0
15	4,5	5,4	11,4	8,7	22,7	20,5	33,5	14,1	31,5	23,3
16	5,0	5,2	10,1	7,4	14,9	20,5	14,0	20,9	29,1	25,0
17	4,6	6,3	11,7	10,7	8,6	24,5	21,4	15,6	32,7	15,9
18	2,5	5,2	11,9	1,5	6,7	7,9	22,7	17,1	19,9	37,2
19	2,0	3,9	10,9	3,5	1,2	8,8	7,0	11,8	29,1	35,5
20	1,0	4,3	8,5	35,7	85,7	41,9	54,6	3,8	44,6	15,9

Tabulka 2: Průměrná vzdálenost matky od místa dopadu $\bar{d}$ po upuštění z výšky h , směrodatná odchylka σ a její relativní hodnota σ_r .

$\frac{h}{\text{cm}}$	$\frac{\bar{d}}{\text{cm}}$	$\frac{\sigma}{\text{cm}}$	$\frac{\sigma_r}{\%}$
5	6	3	58
10	10	7	68
15	16	6	37
20	21	14	69
25	31	19	63
30	34	16	47
35	40	17	44
40	34	16	47
50	48	15	31
60	58	28	47



Obrázek 2: Graf závislosti průměrné vzdálenosti od místa dopadu na výšce upuštění.

Vidíme, že průměrné místo dopadu $\bar{d}$ roste přibližně lineárně s výškou h , což je v souladu s naší jednoduchou teorií. Data proto v programu *Gnuplot* proložíme přímkou

$$f(x) = ax$$

a získáme parametr tohoto fitu jako

$$a = \frac{k^2}{f} = 1,00 \pm 0,04.$$

Podle našeho měření tedy vychází, že matka na rovné podlaze průměrně urazí stejnou vzdálenost, jako ze které jsme ji upustili.

Diskuze výsledků

Pro každou výšku jsme provedli 20 měření. Měření jsme neprováděli s jedinou matkou, ale s různými. Na výsledek by to ale nemělo mít vliv, protože předpokládáme, že všechny byly dostatečně podobné. Mnohem větší změnu výsledku přisuzujeme počáteční poloze při vypuštění, případně rychlosti a závislosti na dopadu na podložku. Podlaha je složena z dlaždic, mezi kterými je tenká spára, kde se matka mohla zastavit. V takovém případě jsme měření s danou matkou opakovali. Metoda měření pomocí fotografování může vést k systematické chybě v podobě zkrácení naměřených vzdáleností.

V rámci jedné výšky vidíme v tabulce 1 velké rozdíly, kdy poměr mezi nejmenší a největší uraženou vzdáleností je i několik desítek. Je tedy zřejmé, že velmi závisí na počáteční podmínce celého upuštění, která určuje úhel a rychlost dopadu. Velký rozptyl koresponduje s naší snahou

držet matku v náhodné orientaci. Některé matičky se po dopadu téměř neposunuly, zato jiné urazili větší vzdálenost, než z jaké byly vypuštěny. Předpokládáme proto, že jsme v rámci našeho měření pokryly téměř celý rozsah možných výsledků a požadavek náhodné orientace tak byl splněn.

V dalším zpracování jsme vypočítali průměr a směrodatnou odchylku. Vynesením do grafu jsme dostali závislost, kterou jsme proložili přímkou. To je v souladu s naší jednoduchou teorií. Přestože jsme nemohli očekávat velkou přesnost, relativní chyba samotného fitu (parametru a) je jen 4 %, vypočítané průměry tedy dobře odpovídají lineární závislosti. Vidíme, že i jednoduchými úvahami se můžeme dostat k řešení, které je v prvním přiblížení správné.

Chyba parametru a ale nezahrnuje velké chybové úsečky. Ty jsou hodně velké, relativní chyba je v desítkách procent, což je vidět už z velkého rozptýlu hodnot. Lepší by bylo využít takový postup fitování přímkou, který by chybové úsečky promítnul do velikosti chyby. Navíc celý náš postup s hledáním aritmetického průměru není pro naši úlohu zcela vhodný. Nemůžeme hledat jednu konkrétní hodnotu, protože výsledek závisí na počáteční konfiguraci upuštění matky. Správněji bychom měli hledat rozdělení toho, s jakou pravděpodobností se matka dostane do nějaké vzdálenosti, pokud ji náhodně upustíme. Takové rozdělení by pak mělo tvar nějaké funkce. U ní bychom mohli najít například nejpravděpodobnější nebo střední hodnotu. Abychom takovou funkci pro každou výšku našli, museli bychom ale provést násobně více měření. Během zpracování výsledků jsme zkoušeli vynést histogramy vzdáleností pro jednotlivé výšky, které by nám danou funkci mohly aproximovat, bohužel jsme nedosáhli uspokojivého a publikovatelného výsledku. Z toho, že se relativní chyba s výškou h výrazně nemění (tabulka 2), alespoň můžeme usoudit, že rozdělení by mohlo mít pro různé výšky podobný tvar.

Při průměrování výsledku a počítání chyby se ještě odstraňují body, které mají vysokou odchylku od průměru, zpravidla 3σ , protože je velmi nepravděpodobné, takové body naměřit, takže se předpokládá, že jejich měření bylo ovlivněno jiným vlivem. V našem případě jsou ovšem samotné hodnoty σ natolik velké, že tento postup k vyřazení extrémních bodů nevede.

V našem měření jsme dostali hodnotu $a = k^2/f = 1,00 \pm 0,04$, takže se matky v průměru dostaly do stejné vzdálenosti, jako z jaké byly upuštěny, což by mohlo působit jako zajímavý výsledek. Přesná hodnota ale závisí na konkrétní dvojici předmětu a podložce, takže pro měření v jiných podmínkách bychom dostali jinou hodnotu a .

Na závěr diskuze můžeme konstatovat, že zvolená dvojice předmětu a podložky byla pro náš experiment vhodná. Matky se odrážely do velkých vzdáleností, dokonce větších než výška upuštění. Pokud bychom experiment prováděli např. na písku, předměty by se neodrážely a nemohli bychom nic naměřit. Je tedy potřebná tvrdá podložka. Ta zároveň musí být vodorovná, protože složka tíhové síly, která by působila v tečném směru vzhledem k rovině, by měření ovlivňovala. Volná plocha zároveň musí být dostatečně velká ve všech směrech, aby nedocházelo ke změně dráhy předmětu ostatními překážkami. V našem případě jediným omezením v měřeném intervalu byly spáry mezi dlaždicemi, kterým ale připisujeme pouze malý vliv na naše výsledky.

Pro předmět platí z hlediska tvrdosti a odrazivosti podobné požadavky jako na podložku. Kousek plastelíny by se po dopadu vůbec nemusel pohnout. Z velkého rozptýlu hodnot pro jednotlivé výšky je vidět, že předmět byl nesymetrický, protože vzdálenost d se výrazně měnila s počáteční konfigurací.

Závěr

Naměřili jsme průměrnou vzdálenost $\bar{d}$ od místa dopadu, ve které se upuštěný předmět zastaví, v závislosti na výšce upuštění h . Podle teorie jsme data proložili přímkou, která má pro zvolenou

dvojici podložka-předmět vyjádření $\bar{d} = (1,00 \pm 0,04)$ h, čímž jsme vhodnost teorie v prvním přiblížení ověřili. Dále jsme diskutovali vhodnost zvolené metody zpracování dat a interpretace výsledků.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.