Úloha I.P ... jedeme na kole 10 bodů

Představte si, že za větrného dne jedete na kole ve zvlněném terénu. Kvalitativně diskutujte vlastnosti pohybu různými směry a různou rychlostí; diskutujte také, jak by se změnil popis tohoto pohybu, kdybychom zanedbali

- *odpor vzduchu,*
- *valivý odpor kol,*
- *sklon terénu,*
- *různé odporové síly.*

Pomocí vztahů pro příslušné fyzikální veličiny nalezněte podmínky, za jakých si můžete dovolit jednotlivé síly při popisu pohybu zanedbat.

Dodovi se směrem od koleje jelo překvapivě dobře.

Pár slov na začiatok

Na úvod ročníka sme pre vás pripravili klasickú úlohu spočívajúcu v skúmaní faktorov vplývajúcich na pohyb reálneho telesa, tentokrát bicykla. Na prvý pohľad jednoduchá, možno až nezaujímavá úloha však v skutočnosti predstavuje pomerne komplexný problém – najmä ak sa vzdialime od ideálnych modelov a pri popise sa začnú prejavovať vplyvy, ktoré v bežných úlohách z mechaniky zanedbávame. Zvyčajne sa ani nepozastavíme nad tým, či sú štandardné zanedbania naozaj fyzikálne a neznehodnotia celý popis situácie. Vašou úlohou bolo preto okrem všeobecného popisu pohybu a možných silových vplyvov okolia aj zamyslenie sa nad tým, kedy je možné ktorý vplyv zanedbať tak, aby teoretický model stále vhodne popisoval reálny pohyb.

Kde začať?

Prvým krokom je voľba vhodného (mierne zjednodušeného) modelu. Veľká väčšina z vás uvažovala pevnú sústavu bicykla s cyklistom so stálou hmotnosťou a tvarom, no našlo sa aj niekoľko výnimiek. Riešiteľ Matěj Hošek (4. ročník) sa rozhodol preskúmať chudnutie jazdcov pri cyklistike. Z nájdenej štúdie[1] vyplýva, že výkonnostní športovci vyprodukujú $1{,}28 \pm 0{,}57$ litrov potu za hodinu. Pre človeka hmotnosti 80 kg to predstavuje 1 % až 2 % tejto hodnoty. Hoci výsledok zrejme významne neovplyvní veľkosti a kritériá zanedbania odporových síl v úlohe, všeobecne je však zaujímavý a otvára otázku, ako veľmi je prospešný tento jav pre športovcov.

Skúmanie vplyvu vzduchu

Následne bolo pre zloženie pohybovej rovnice potrebné rozpoznať všetky pôsobiace sily, teda okrem „ťažnej sily cyklistu“ aj odporové sily. Prvou z nich je odpor vzduchu, či už v bezvetrí alebo pri vetre. Vhodným a často používaným priblížením je vnímanie vetra ako bloku vzduchu konajúceho translačný pohyb. Vietor a vplyv vzduchu ako hmotného prostredia je možné skombinovať do jedného javu a výsledný odpor je daný silou aerodynamického odporu závislou na hustote vzduchu, koeficiente odporu, čelnom priereze cyklistu a bicykla, no predovšetkým na kvadráte veľkosti relatívnej rýchlosti cyklistu voči okolitému vzduchu.

Niekoľkí z vás diskutovali možné zmeny v hustote vzduchu (zmenou nadmorskej výšky), odporovom koeficiente, či čelnom priereze (napríklad prikrčením či použitím pretekárskej helmy). Najmä posledné dva faktory sa často využívajú v praxi a môžu mať dôležitý vplyv na rýchlosť

[1] `https://www.tandfonline.com/doi/10.1080/02640414.2019.1633159?url_ver=Z39.88-2003&rfr_id=ori:rid:crossref.org&rfr_dat=cr_pub%20%200pubmed#abstract`

jazdcov (pozorovateľný rozdiel dokonca vznikne aj holením nôh![2]). Schopnosť zníženia odporu vzduchu je však značne limitovaná a voľbou vhodného vybavenia alebo polohy sa kritérium zanedbania radikálne nezmení. Oveľa zaujímavejší je vplyv vzájomnej rýchlosti a je zrejmé, že pri vysokých rýchlostiach bude pohyb cyklistu viesť k terminálnej rýchlosti, kedy dôjde k vyrovnaniu sily odporu vzduchu s výslednicou ostatných síl (celkovo v smere pohybu cyklistu). Veľa riešiteľov však uvažovalo len dva špeciálne prípady, a to smer vetra presne v smere pohybu (kedy ho dokonca v limitovanej dobe môže aj urýchľovať) alebo čelný vietor presne proti smeru pohybu cyklistu. Relatívna rýchlosť je tu daná rozdielom, resp. súčtom veľkostí rýchlostí cyklistu a vzduchu.

Čo ak chceme skúmať trocha všeobecnejší prípad, kde vietor (stále rovnobežný s povrchom vozovky) môže s pohybom cyklistu zvierať ľubovoľný uhol? Zjednodušenie na skalárny súčet viac nefunguje, vektory rýchlostí cyklistu a vetra voči zemi je nutné sčítať vektorovo, čo aplikáciou kosínusovej vety prejde na jednoduchú geometrickú úlohu. Aerodynamický odpor však pôsobí presne proti smeru relatívnej rýchlosti, a preto nastane situácia, že vplyvom vetra je cyklista čiastočne spomaľovaný a čiastočne tlačený do strany.

Cyklistu začne efektívne brzdiť iba zložka odporovej sily rovnobežná s jeho pohybom, ktorú získame kolmým priemetom vektoru sily do smeru pohybu. Jej doplnková zložka (kolmá na pohyb) vedie často k nakloneniu cyklistu, čím môže začať celá sústava zatáčať do boku. Pri bežných rýchlostiach vetra (do $40\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$) je zároveň statické trenie medzi pneumatikou a vozovkou dostatočne vysoké, aby sa cyklista nepošmykol.

Špeciálne riešiteľ Mikuláš Hořenek (3. ročník) stručne popísal vplyv prekážok (budov, rastlín, či všeobecného tvaru terénu) na tlmenie rýchlosti vetra. Mikulášov výsledok je jednoznačný – čím hustejšie je umiestnenie prekážok, tým viac je vietor utlmený, čo môže viesť k voľnejšiemu kritériu pre zanedbanie odporu vzduchu.

Valivý odpor

Ďalšou odporovou silou je valivý odpor kolies. Štandardne je daný vzťahom priamej úmernosti normálovej sily a koeficientu valivého odporu (závislom najmä na dvojici materiálov, ale aj na rýchlosti) a nepriamej úmernosti polomeru kolies. Ako mnohí z vás uviedli, túto silu možno minimalizovať pri jazde na riadne nafúknutých pneumatikách vysokého polomeru a na tvrdom hladkom povrchu, ktorý deformuje koleso a seba len minimálne. S rýchlosťou valivý odpor rastie, tento vplyv sa zvyčajne prejaví až pri vyšších rýchlostiach a tvar závislosti závisí od viacerých faktorov.

Ďalšie pôsobiace sily

Hoci v pravom slova zmysle nejde o odpor, prekážku v pohybe môže vplyvom sklonu kopca predstavovať aj tiaž cyklistu s bicyklom. Okrem premenlivej hmotnosti niektorí z vás uvažovali aj zmeny v tiažovom zrýchlení (zmenou výšky či geografickej šírky), pri štandardnej jazde však rozdiel nebude pozorovateľný.

Medzi ďalšie odporové sily ste zahŕňali najmä trenie v ložiskách a iných súčiastkach bicykla, ktoré závisí od údržby. Zaujímavý vplyv – zrážky s telesami padajúcimi z neba (napr. dážď či menej časté objekty) – spomenul opäť Mikuláš Hořenek. Energetické straty v ich dôsledku rastú s rýchlosťou pohybu, najvýhodnejšie z hľadiska energie by preto podľa Mikuláša bolo

[2] `https://www.youtube.com/watch?v=DZnrE17Jg3I`

stáť. Nepochybne však ide o komplexnejší problém ovplyvnený mnohými faktormi (veľkosť, tvar, smer letu objektu), ktorého skúmanie by bolo časovo náročné.

Občas ste uvažovali aj zotrvačnú silu. Tá však nemá skutočnú podstatu, vzniká len v neinerciálnej sústave. Na popis pohybu z pohľadu pozorovateľa na zemi teda nemá žiaden vplyv, podobne nemá zmysel diskutovať jej zanedbanie.

Hľadanie podmienok zanedbania

Nakoniec bolo vašou úlohou zaoberať sa možnosťou zanedbania týchto síl. Niekoľko z vás uvažovalo, že zanedbanie je možné práve vtedy, keď je daná sila veľmi malá. V skutočnosti však nemusí byť malá; stačí, že existuje iná sila, ktorá je dostatočne väčšia. Rozdiel ale musí byť aspoň rádový. V pohybovej rovnici ale okrem odporových síl vystupuje aj ťažná sila cyklistu. O tej však veľa nevieme, zároveň je pravdepodobne premenlivá. Takto by sme nenašli žiadne konkrétne kritériá pre zanedbanie, preto je produktívnejšie porovnávanie odporových síl medzi sebou. Zostavením ostrých nerovností s príslušnou odporovou silou na jednej strane a súčtom ostatných na druhej získame príslušné kritériá.

Niekoľko z vás sa rozhodlo urobiť aj kvantitatívny odhad dohľadaním alebo odhadnutím potrebných parametrov. Pre zanedbanie odporu vzduchu vyšla niekoľkým z vás podmienka, že pre rozdiel približne jedného rádu môže ísť cyklista maximálne približne $10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. V prípade valivého odporu medzi riešiteľmi nedošlo k zhode, kým niektorým vyšiel zanedbateľný prakticky vždy, v iných riešeniach až pri rýchlostiach, kedy začína dominovať odpor vzduchu, alebo naopak takmer nikdy, napríklad len pri špecifickom sklone svahu. Sklon kopca bol zanedbávaný pri sklone rádovo v jednotkách stupňov, trenie v ložiskách vyšlo väčšine riešiteľov úplne zanedbateľné z dohľadaných údajov.

Záverečné zhodnotenie

Prakticky všetky riešenia ponúkli niečo originálne a zaujímavé. Všetci ste poctivo poňali najmä popis jednotlivých odporových síl spomenutých v zadaní vrátane vzorcov. Trocha mi možno chýbalo detailnejšie diskutovanie pohybu pri prešmyknutí kolesa (ktorýmkoľvek smerom), prípadne pri prejazde zatáčkou a taktiež skúmanie vplyvu hrboľatého terénu. Niekoľko z vás však aspoň okrajovo tieto javy spomenulo. Tiež oceňujem, že niekoľko z vás dokázalo urobiť veľmi kvalitné kvantitatívne (resp. číselné) odhady podmienok zanedbania na základe odvodených vzťahov. Názornosť číselných výsledkov v takýchto úlohách je veľmi dobrá. Taktiež chválim spomenutie použitej literatúry vo veľkej časti riešení.

Špeciálne by som chcel vyzdvihnúť riešenia Damiána Šatánka (4. ročník) a Kosmu Šatánka (3. ročník), ktoré nadštandardným rozsahom i obsahom predstavovali veľmi podrobnú štúdiu, kde takmer každý jeden drobný vplyv popisovali či už teoretickými alebo empirickými modelmi. Častokrát pri jednom vplyve porovnali vlastné výsledky s niekoľkými ďalšími z nezávislých zdrojov. Celkovo úplne plnohodnotne zanalyzovali celú situáciu a priniesli dôveryhodné informácie odpovedajúce realite.

Vypracovania podobného rozsahu od vás prirodzene nepožadujeme, preto k prácam Damiána a Kosmu prikladám i riešenie Michala Stroffa (4. ročník), ktoré je taktiež na veľmi vysokej úrovni, obsahovo pokrýva požiadavky úlohy a môže slúžiť ako inšpirácia do ďalších ročníkov a sérií.

Na záver prajem všetkým veľa šťastia pri ďalšom riešení! :)

Patrik Stercz
patrik.stercz@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence navštivte https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/.

P... jedeme na kole

Damián Šatánek

October 5, 2025

1 Zadání

Představte si, že za větrného dne jedete na kole ve zvlněném terénu. Kvalitativně diskutujte vlastnosti pohybu různými směry a různou rychlostí; diskutujte také, jak by se změnil popis tohoto pohybu, kdybychom zanedbali

- odpor vzduchu,
- valivý odpor kol,
- sklon terénu,
- různé odporové síly.

Pomocí vztahů pro příslušné fyzikální veličiny nalezněte podmínky, za jakých si můžete dovolit jednotlivé síly při popisu pohybu zanedbat.

2 Úvod

Z mého pohledu je zadání poněkud nejasné, zvlášť v první části, přesto se ho pokusím maximálně splnit.
Nejprve se krátce zamyslím nad silami, které působí v soustavě cyklisty.
Poté se podívám na jednotlivé odporové síly podrobněji, a pokusím se diskutovat jejich efekty, závislosti a důsledky jejich zanedbání.
Následně naleznu podmínky, při kterých považuji za rozumné zanedbat jednotlivé složky odporu, který musí cyklista překonávat.

3 Teorie

Bohužel se mi první část zadání, a tedy kvalitativní diskuze zdá poněkud nejasnou.
Protože si nejsem jist, jak interpretovat "vlastnosti pohybu různými směry a různou rychlostí".
Nabízí se nejprve se krátce zabývat popisem jednotlivých sil, které působí na kolo s člověkem. A dále poté diskutovat jednotlivé síly, které na kolo působí i z

pohledu různých směrů pohybu.
Zabývejme se tedy nejprve popisem sil, které působí na cyklistu a jeho kolo.

3.1 Stručný popis sil působících na cyklistu

Síly, které působí v soustavě cyklisty a jeho kola jsou primárně projevem tíhové síly, působící na cyklistu a kolo.
Je zřejmé, že v důsledku této síly nedojde k tomu, aby se cyklista vznesl, ale zároveň způsobí existenci smykové tření. Smykové tření mezi pneumatikami a povrchem, po kterém se kolo pohybuje představuje nejdůležitější ze všech sil na kolo působících, protože bez tření by při šlapání cyklisty došlo pouze k rotaci kol, ale nedošlo by k "zachycení" se kol o zemi, a následnému posunu při rotaci. Samotné objevení se tření je pak projevem snahy kol sunout se vpřed.
Tato snaha způsobí i valivý odpor, který spočívá v deformaci kol (pokud by byly dokonale tvrdé, tak by tento odpor neexistoval), v důsledku čehož kola odporují rotaci.
Při pohybu se také objeví odpor vzduchu, protože musí kolo odtlačovat vzduch před sebou, zároveň v důsledku rotace kol se objeví efekt gyroskopu, díky kterému je kolo stabilní ve směru kolmém na směr pohybu (byť i bez těchto sil se lze pohybovat stabilně na kole, a to např. pohybem v "osmičkách").[**1**]
Při zahýbání se poté objeví i odstředivé síly.
I přesto, že popis výše je relativně stručný považuji ho za dostatečný, a nyní se přesunu na podrobnější popis jednotlivých odporových sil.

3.2 Síly podrobněji

Nyní se tedy podívejme na jednotlivé odporové síly kvalitativně a podrobněji v souvislosti s cyklistikou.

3.2.1 Odpor vzduchu

Odpor vzduchu představuje hlavní energetické ztráty pro pohybujícího se cyklistu.
I při závodech, kde se cyklisté snaží minimalizovat svoji plochu a odporový koeficient se odpor vzduchu stává dominantní odporovou silou již při rychlostech nad $25\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$ a při $45\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$ představuje odpor vzduchu již 90% všech cyklistových ztrát.[**2**]
Odpor vzduchu je závislí na ploše a tvaru předmětu, který ho rozráží, proto existuje mnoho způsobů, kterými se cyklisté snaží snížit svoji efektivní plochu změnou pozice na kole, přiléhavým oblečením a v krajním případě i oholením nohou. [**2**] [**3**]
Nejefektivnější je nepřekvapivě samotná poloha, díky které lze snížit odpor vzduchu až o třetinu. [**3**]

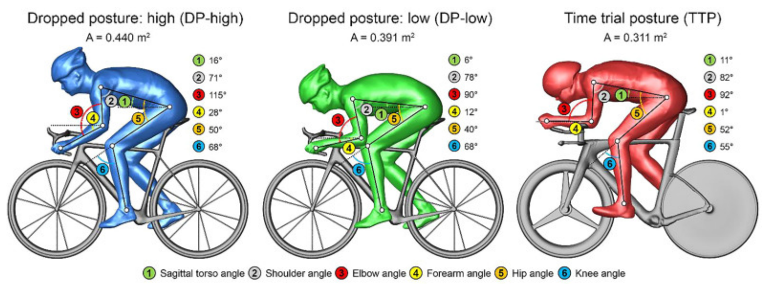


Figure 1: Rozdílná efektivní plocha pro různé pozice cyklisty. Viz. [**11**]

Samozřejmě rychlosti, které jsem uvedl výše odpovídají stavu, kdy je bezvětří, a i při malé rychlosti větru dojde k podstatné změně.
Jako jeden z mála odporu je tedy odpor vzduchu závislí na směru, kterým se cyklista pohybuje protože při pohybu proti větru na něj bude působit vyšší odporová síly než při bezvětří, a naopak při pohybu po větru se odporová síla na něj působící sníží.
V případě, kdy se cyklista bude pohybovat kolmo na směr větru, tak hlavní efekt bude snaha větru cyklistu převrhnout, ale aby takového efektu vítr dosáhl bylo by nutné, aby byl velmi silný, což zřejmě nevyhovuje zadání (člověk, který by se v takovém větru vypravil na projížďku na kole by pravděpodobně měl jiné starosti).
Bylo by možné ještě diskutovat efekt, který bude mít zvlněný terén na velikost větru, a tedy i na odpor vzduchu.
To je však relativně složité téma, protože navzdory zkušenosti nemusí dojít k jeho zpomalení, ale za správných podmínek může dojít k tomu, že při výjezdu do kopce budeme pozorovat větší rychlost větru, než na planině.[**4**]

Lze však tvrdit, že pokud bychom zanedbali odpor vzduchu, tak by náš popis pohybu cyklisty při vyšších rychlostech naprosto neodpovídal, a cyklista by mohl dosáhnout výrazně vyšší rychlosti.
Při nižších rychlostech by model také neodpovídal, byť by se snižující se rychlostí jeho přesnost rostla.

3.2.2 Valivý odpor kol

Valivý odpor kol představuje druhou nejpodstatnější ztrátu energie pro cyklistu na vodorovné dráze, a při nižších rychlostech se stává nejpodstatnější. [**5**] Jak již jsem uvedl valivý odpor je projev toho, že pneumatiky kol nejsou dokonale tvrdé, a tedy dojde k jejich deformaci.
Při jejich rotaci se poté místo deformace posune ve směru pohybu (proti směru rotace), což způsobí posun normálové síly, což způsobí, že část normálové síly působí jako moment síly proti rotaci kola.
Tato deformace je zřejmě primárně závislá na povrchu po kterém se kolo pohybuje, a samozřejmě i na samotném kolu.

Z pohledu kola poté hlavní roli hraje tlak, protože čím vyšší tlak v kole bude tím menší bude deformace. Podobně užší a hladší gumy mají tendenci mít nižší valivý odpor.[**6**] Závislost na rychlosti pohybu je relativně složitou a závislou na samotném kolu.
Platí však, že se zvyšující se rychlostí dochází k lehkému růstu (rozdíl mezi hodnotou při 4 a 10 $m \cdot s^{-1}$ představuje cca 11%). [**7**]
Nejpodstatnější je však nepřekvapivě samotný povrch, po kterém se cyklista pohybuje, protože rozdíl mezi asfaltovou a štěrkovou silnicí je téměř dvojnásobný. [**6**]

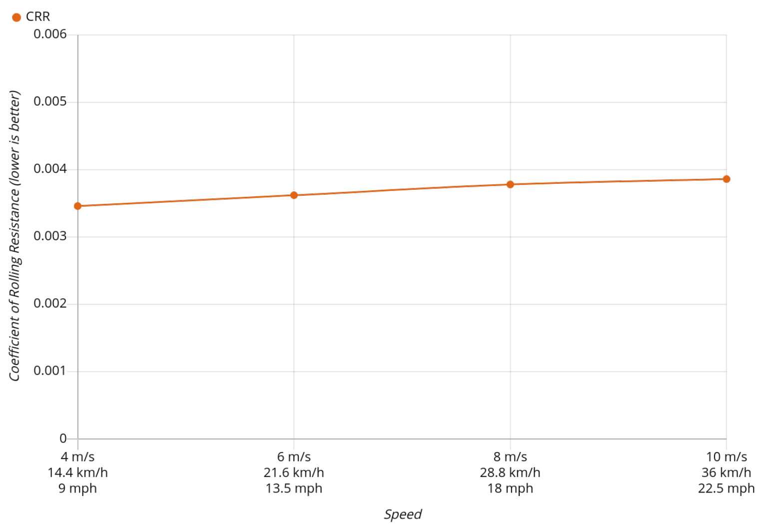


Figure 2: Naměřená závislost valivého odporu na rychlosti. Viz. [**7**]

Samotný valivý odpor by na delších intervalech neměl záviset na směru pohybu, protože lze předpokládat homogennost všeho povrchu.
Při zanedbání bychom pravděpodobně pozorovali podstatný rozdíl primárně při rozjíždění a nízkých rychlostech, protože při vyšších by vliv tohoto odporu oproti odporu vzduchu slábl.

3.2.3 Sklon terénu

Sklon terénu je dalším podstatným faktorem, který ovlivní cyklistu a jeho pohyb. Zároveň je sklon prakticky všudy přítomný, a existuje jen velmi málo vodorovných cest.
Samotný sklon způsobí rozložení tíhové síly cyklisty, což bude mít dva hlavní efekty.
Jednak dojde ke snížení smykového tření, což způsobí snížení maximální možné

síly, kterou může cyklista využít k pohybu vpřed.
Druhý efekt spočívá ve vzniku síly, která se budu snažit cyklistu stáhnout dolů z daného sklonu.
Sklon je jedna druhá ze sil, kterými se zde zabývám, a u která záleží na směru pohybu cyklisty.
Pokud se cyklista bude pohybovat proti, a nebo naopak po sklonu budou na něj působit oba efekty, ale pokud se bude pohybovat kolmo ke sklonu, a tedy po vrstevnici bude pro něj primárně významná ztráta části normálové síly, a tedy smykového tření (samozřejmě na něj stále bude působit i síla, která se ho bude snažit stáhnout dolů, ale ta bude ve většině případů výrazně nižší, než smykové tření, a tedy nebude schopna způsobit klouzání kola dolů).
S rychlostí se poté efekt sklonu prakticky nebude měnit.
Pokud bychom se rozhodli zanedbat sklon, tak by výsledný model pohybu byl zvlášť ve "zvlněném" terénu nezávisle na rychlosti špatně.[**8**]

3.2.4 Vnitřní tření kola

Kolo jako takové je jednoduchým strojem, a proto s určitostí nemá 100% účinnost a dochází ke ztrátě části práce, kterou vykoná cyklista.
Velikost těchto ztrát je relativně složitou, protože závisí na samotném kole, a také na úrovni údržby, která je na kole prováděna.
U kola, které je udržováno, naolejováno a má nový neroztažený řetěz lze pozorovat účinnost od 95-98%. [**9**]
U kola, které je udržováno poté může klesnout účinnost až na 80%. [**10**]
Nepřekvapivě směr účinnost neovlivní, a protože dané účinnosti předpokládají využívání přehazovačky, tak je zásadně neovlivní ani rychlost.
Zanedbat tento faktor má smysl např. u sportovních kol, které jsou v perfektním stavu. Ale u kola, na kterém se jednou za čas někdo projede jej rozhodně není možné zanedbat.

4 Zanedbání

Nyní tedy určeme, kdy je možné dané odporové síly zanedbat.
Je však nutné, nejprve určit podmínky, při kterých budu považovat příspěvek dané síly za zanedbatelný.
Nabízí se pracovat na bázi zrychlení, které cyklista ztratí, aby danou sílu překonal.
Označme tedy sílu za zanedbatelnou za předpokladu, že zrychlení, které cyklista ztratí na její překonání je nižší než 5% zrychlení, který je mu k dispozici.
K tomu však abychom se mohli pustit do určení podmínek pro zanedbání, je nutné nejprve určit zrychlení, které má cyklista k dispozici.
Bylo by samozřejmě možné pracovat s konstantním výkonem, čímž by se změnili některé závislosti.
Ale z důvodu existence převodů tento postup považuji za chybný.

4.1 Zrychlení k dispozici

Můžeme předpokládat, že nezávisle na rychlosti dokáže cyklista stále zrychloval stejnou měrou, a to díky přehazovačce.
Jaká je ale maximální síla, kterou může cyklista vyvinout?
A jaké zrychlení díky tomu může získat?
Průměrný člověk je schopen nohou šlapat přibližně tak, aby působil svojí hmotností. [**12**]
Tzn., že 70 kg člověk je schopen vyvinout při šlapání sílu

$$F_0 = mg = 70 \cdot 9,81 \sim 687\ [N] \tag{1}$$

Samozřejmě v důsledku převodů může být síla na zadním kole prakticky jakoukoliv.
Považujme však tuto sílu, za základ pro porovnávání.
Jaké zrychlení je však v důsledku této síly schopen cyklista získat?
Nejvyšší síla, kterou může způsobovat rotaci kola odpovídá velikosti smykového tření, které brání kolům klouzat (při vyšší síle by jednoduše došlo k prokluzování).
Jaká je tedy velikost smykového tření?
Uvažujme, že jsou kola dokonale tvrdými, a že cyklista se pohybuje na typickém kole, a tedy váží 10 kg, dále uvažujme, že se pohybuje po silnici, na které má koeficient smykového tření rovný $f_0 = 0,9$, poté [**13**][**14**]

$$F_{t0} = f_0(m + m_k)g = 0,9 \cdot 80 \cdot 9,81 \sim 706,32\ [N] \tag{2}$$

Cyklista je tedy opravdu schopen působit silou F_0 bez prokluzování.
Jakého zrychlení tím ale dosáhne?

$$a_0 = \frac{m}{m + m_k} g = \frac{70}{80} 9,81 \sim\ 8,6 [m \cdot s^{-2}] \tag{3}$$

Považujme tedy toto zrychlení za základní zrychlení, vůči kterému budeme porovnávat vliv jednotlivých sil.
Postupujme tedy postupně a podívejme se nyní na odpor vzduchu.

4.2 Odpor vzduchu

Nabízelo by se okamžitě začít počítat s předpokladem dostatečného Reynoldsova čísla cyklisty, aby platil Newtonův vztah.
Ověřme však pro jistotu, že na popis odporu vzduchu v tomto případě lze využít Newtonův vztah.
Pro Reynoldsovo číslo platí [**15**]

$$R_e = \frac{vl}{\upsilon} \tag{4}$$

[**16**]
Kde v je relativní rychlost vzduchu vůči cyklistovi, l odpovídá charakteristickému

rozměru cyklisty a $\upsilon \sim 15,06 \cdot 10^{-6}\ \mathsf{m^2 \cdot s^{-1}}$ kinematické viskozitě vzduchu. Předpokládejme, že cyklista se bude pohybovat v okolí $10\ \mathsf{m \cdot s^{-1}}$ a jeho charakteristický rozměr je rovný $\mathsf{L} = 2\ \mathsf{m}$, poté

$$R_e = \frac{10 \cdot 2}{15,06 \cdot 10^{-6}} \sim 1,3 \cdot 10^6 \tag{5}$$

Je tedy zřejmé, že Reynoldsovo číslo je dostatečně vysoké pro využití Newtonova vztahu namísto Stokesova.
Newtonův vztah nám o velikosti odporu, který cyklista pociťuje říká

$$F_o = \frac{1}{2}\rho v^2 S c_o \tag{6}$$

Kde $\rho = 1.204\ \mathsf{kg \cdot m^{-3}}$ odpovídá hustotě vzduchu, S ploše průřezu cyklisty a kola kolmého na směr rychlosti v a $\mathsf{c_o}$ odpovídá odporovému koeficientu vyjadřujícímu tvar cyklisty a kola.[**17**]
Otázka tedy zůstává, jakou zvolit plochu a koeficient odporu pro cyklistu a jeho kolo.
Nabízí se pokusit se modelovat cyklistu pomocí typického tvaru, ať už koule, nebo kvádru.
Další možnost poté spočívá ve využití naměřených hodnot.
protože považuji čisté využití naměřených dat za příliš banální provedu obě dvě možnosti. Lze však zřejmě předpokládat, že výpočet využívající naměřené hodnoty bude výrazně přesnější.

4.2.1 Člověk a kolo jako kvádr

I přes absurdnost aproximace člověka na kole jako kvádru učiňme tak.
Ať je tento kvádr orientován ve směru pohybu jednou z hran, a tedy jeho součinitel odporu je rovný $\mathsf{c_o} = 0.8$.[**18**]
Dále předpokládejme, že úhlopříčka, která je kolmá na směr pohybu má 50 cm, a výška tohoto kvádru je 170 cm.
Poté pro plochu průřezu, která je kolmá na směr pohybu

$$S = 1,7 \cdot 0,5 \sim 0,875\ [m^2] \tag{7}$$

Nyní tedy určeme rychlost, při které dojde ke ztrátě 5% zrychlení cyklisty.
Tato chvíle s určitostí odpovídá stavu, kdy dojde ke stejné ztrátě síly pohánějící cyklistu.
Musí tedy platit

$$\frac{F_o}{F_0} = 0,05 \tag{8}$$

A tedy

$$\begin{gathered} \frac{\frac{1}{2}\rho v^2 S c_o}{mg} = 0,05 \\ v = \sqrt{\frac{0,1 \cdot mg}{\rho S c_o}} \end{gathered} \tag{9}$$

A tedy číselně

$$v = \sqrt{\frac{0,1 \cdot 70 \cdot 9,81}{1,204 \cdot 0,875 \cdot 0,8}} \sim 9\ [m \cdot s^{-1}] \tag{10}$$

A tedy aby se splnil můj požadavek pro zanedbatelnost odporu, tak by muselo platit, že se okolní vzduch vůči kolu pohybuje pouze 9 $m \cdot s^{-1}$.
Větrný den, bych označil za čerstvý vítr podle Beaufortovi stupnice, což znamená cca 9 $m \cdot s^{-1}$. [**19**]
V takovém případě by nebylo možné zanedbat odpor vzduchu ani pokud by se cyklista teprve rozjížděl proti větru.
Pokud by jel po větru, tak poté by mohl naopak dosáhnout rychlosti 18 $m \cdot s^{-1}$ a odpor vzduchu by byl stále zanedbatelný.
Podobně do absurdních rychlostí větru by se kolmo na vítr mohl pohybovat beztrestně. Nepovažuji za nutné počítat i tento případ, protože ve chvíli, kdy by rychlost větru byla dostatečná k zásadnímu ovlivnění jeho jízdy, tak by se na cestu nevydal (pokud by to nebyl milovník rizikových sportů).

4.2.2 Naměřené hodnoty

Nyní využijme vztah (10) a dosaďme do něj hodnoty pro plochu a součinitel odporu, které byly naměřeny přímo pro cyklistu. První předpokládejme $S = 0,51\ m^2$ a $c_o = 1,1$, což odpovídá stavu, kdy cyklista je v "normální" pozici [**20**]

$$v = \sqrt{\frac{0,1 \cdot 70 \cdot 9,81}{1,204 \cdot 0,51 \cdot 1,1}} \sim 10,1\ [m \cdot s^{-1}] \tag{11}$$

V tomto případě je tedy výsledek v zásadě stejný, jako již výše získaný.
Tentokrát se může cyklista pohybovat proti větru 1 $m \cdot s^{-1}$ a po větru 19 $m \cdot s^{-1}$.
Ještě se podívejme na případ, kdy je cyklista v pozici nejvýhodnější, a tedy "závodní", kdy se jeho plocha sníží na cca $S = 0,36\ m^2$ a součinitel odporu na $c_o = 0,88$, poté

$$v = \sqrt{\frac{0,1 \cdot 70 \cdot 9,81}{1,204 \cdot 0,36 \cdot 0,88}} \sim 13,4\ [m \cdot s^{-1}] \tag{12}$$

V tomto případě tedy může dosáhnout proti větru cca 4 $m \cdot s^{-1}$ a po větru cca 22 $m \cdot s^{-1}$.
Je tedy zřejmé, že mimo samotnou rychlost cyklisty je nutné ptát se i na polohu, ve které se pohybuje, aby bylo možné ptát se na to, zda je odpor vzduchu zanedbatelný.

4.3 Valivý odpor

Nyní se podívejme na valivý odpor kol.
Valivý odpor je projevem toho, že kola nejsou dokonale tvrdá, a tedy dojde k jejich deformaci v důsledku tíhové síly.

Ve chvíli, kdy se cyklista nepohybuje nehraje tento fakt žádnou roli.
Ale ve chvíli, kdy se cyklista začne pohybovat dojde k tomu, že se působiště normálové síly přesune vpřed ve směru pohybu, což vede k tomu, že část normálové síly působí proti rotaci kol.
To se projeví, jako moment síly, který jak již jsem zmínil brání kolu v rotaci a platí pro něj

$$M_o = F_n \xi \tag{13}$$

, kde ξ odpovídá ramenu valivého odporu a vyjadřuje k jak velkému posunu bodu působení došlo.
Tento moment mohu přenést na posuvnou sílu působící ve středu kola

$$F_o = \frac{\xi}{R} F_n = \frac{\xi}{R}(m + m_k)g \tag{14}$$

, kde R odpovídá poloměru kola.
Čím jsem získal velikost samotného valivého odporu.
Otázka tedy spočívá v poloměru kol a velikosti ramene valivého oporu. Důležitější však leží v ramenu valivého odporu.
Buď je možné jej považovat za konstantní veličinu, a nebo se ho pokusit vztáhnout k rychlosti, kterou se cyklista pohybuje.
V naprosté většině případů se předpokládá, že valivý odpor je nezávislý na rychlosti.
Budu tedy předpokládat, že valivý odpor je neměnný a tedy ξ je konstantní

$$\begin{gathered} \frac{F_o}{F_0} = n \\ \frac{\frac{\xi}{R}(m + m_k)g}{mg} = n \\ \frac{\frac{\xi}{R}(m + m_k)}{m} = n \end{gathered} \tag{15}$$

V článcích se často uvádí koeficient valivého odporu, který vyjadřuje

$$C_v = \frac{\xi}{R} \tag{16}$$

Využitím tohoto koeficientu pro pneumatiky Continental GP4000 na dráze TCR (jeden z nejdelších cyklistických závodů napříč Evropou, během kterého se cyklisté pohybují ve "zvlněné" krajině po silnicích, i po cestách, a tedy daná data považuji za ideální pro zadání) $\mathsf{C_v} = 0,0387$ [**21**]

$$n = \frac{0,0387 \cdot (70 + 10)}{70} \sim 0,044 \tag{17}$$

A tedy přibližně 4,4%, což je z mé definice stále zanedbatelné.
V tomto případě tedy je valivý odpor zanedbatelný.

Pokud bychom se místo výše uvedené pneumatiky podívali např. na Continental Gatorskin s koeficientem $C_v = 0,0606$

$$n = \frac{0,0606 \cdot (70 + 10)}{70} \sim 0,053 \tag{18}$$

Zde by tedy z mé definice již valivý odpor zanedbatelný nebyl.
Lze tedy tvrdit, že valivý odpor je na hranici zanedbatelnosti, a záleží primárně na zvolené pneumatice.
Směr velikost tohoto odporu neovlivní, protože tvrdit, že ovlivní v důsledku toho, že cyklista sjede z cesty do houští nepovažuji za smysluplné.

4.4 Sklon

Další na řadě je otázka zanedbatelnosti sklonu dráhy.
Sklon jak již jsem psal způsobí dva hlavní efekty.
Dojde k rozložení tíhové síly, což způsobí snížení normálové síly a zjevení se síly stahující cyklistu dolů ze sklonu, kdy snížení normálové síly povede ke snížení smykového tření, a tedy síly, kterou je schopen cyklista využit na posun vpřed.
V důsledku sklonu dojde ke snížení normálové síly na

$$F_n = F_g \cos(\alpha) \tag{19}$$

, kde F_g odpovídá tíhové síly cyklisty a kola a α sklonu, po kterém se pohybuje.
Což způsobí snížení síly smykového tření na

$$\begin{aligned} F_t &= f_0 F_n \\ F_t &= f_0 (m + m_k) g \cos(\alpha) \end{aligned} \tag{20}$$

Tím je určena maximální síla, kterou se může cyklista pohybovat vpřed, aniž by došlo k prokluzování.
Síla, která bude stahovat cyklistu dolů bude mít velikost

$$F_1 = (m + m_k) g \sin(\alpha) \tag{21}$$

Nyní se má smysl zabývat odděleně dvěma případy, a to případ, kdy cyklista jede po, a nebo přímo proti sklonu, a poté případě, kdy se pohybuje po vrstevnici.
Zřejmě jakýkoliv jiný směr poté bude kombinací těchto dvou.

4.4.1 Cyklista vyjíždí/sjíždí z kopce

Pro začátek předpokládejme, že pro zanedbání výjezdu i sjezdu budeme vyžadovat stejnou podmínku, a to i přesto, že při sjíždění by cyklista měl naopak k dispozici o 5% větší sílu, a tedy by si naopak uchoval část své energie.
Aby byl sklon zanedbatelný musí platit, že F_1 představuje nejvýše 5% F_0, a

tedy

$$
\begin{aligned}
&\frac{F_1}{F_0} = 0,05 \\
&\frac{(m+m_k)g\sin(\alpha)}{mg} = 0,05 \\
&\frac{(m+m_k)\sin(\alpha)}{m} = 0,05 \\
&\sin(\alpha) = \frac{0,05 \cdot m}{m+m_k}
\end{aligned}
\tag{22}
$$

A tedy číselně pro maximální sklon α

$$
\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{0,05 \cdot 70}{80}\right) = 2,5\ [^\circ]
\tag{23}
$$

Bude-li sklon větší, než $2,5\ ^\circ$, tak cyklista při pohybu na něm ztratí více než 5% své zrychlující síly, a tedy z mé definice již nebude zanedbatelným.
Mohu ještě ověřit, že nedojde k tomu, že část této síly nebude moci využít, protože ztratí část smykového tření (i přesto, že z chování goniometrickým funkcí je zřejmé, že tomu tak nebude).
Musí platit, že mnou určená dostupná síla při sklonu $2,5\ ^\circ$je menší, než F_t, a tedy

$$
\begin{aligned}
&\frac{0,95 \cdot mg}{f_0(m+m_k)g\cos(\alpha)} \leq 1 \\
&\frac{0,95 \cdot 70}{0,9 \cdot 80 \cdot \cos(2,5)} \sim 0,92 \leq 1
\end{aligned}
\tag{24}
$$

A tedy nepřekvapivě nedojde k dostatečnému snížení normálové síly, aby cyklista nemohl zcela využít sílu, která mu zbude po překonání síly F_1.
Sklon je z pohledu sil rozhodně nejméně druhou nejpodstatnější ztrátou cyklisty a při nižších rychlostech v kopcovitém terénu rozhodně nejvyšší.
Navíc podíváme-li se na gradient výšky u "typické" dráhy pro cyklisty zjistíme, že se sklonu prostě nevyhneme.

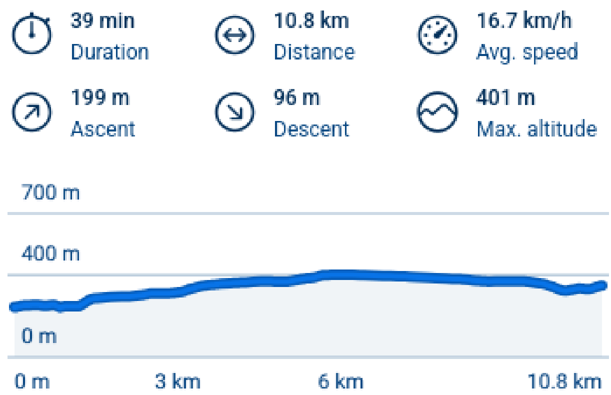


Figure 3: Výšková mapa dráhy demonstrující všudypřítomnost sklonu (Často se na dráze na kole pohybuji a při jízdě se zdá mimo 2 kopečky zcela rovnou). Pro získání mapy jsem využil: https://web.bikemap.net/

4.4.2 Cyklista se pohybuje po vrstevnici

Druhá možnost tedy spočívá v případě, kdy se bude cyklista pohybovat kolmo ke sklonu.
V tomto případě dochází primárně ke ztrátě normálové síly cyklisty, a tedy snížení maximální síly, kterou se může pohánět vpřed, aniž by docházelo k prokluzování.
První tedy určeme úhel, při kterém ztratí 5% své normálové síly, a tedy bude moci působit pouze 95% své síly.
Opět musí platit

$$\begin{aligned} \frac{F_t}{F_0} &= 0,95 \\ \frac{f_0(m+m_k)g\cos(\alpha)}{mg} &= 0,95 \\ \frac{f_0(m+m_k)\cos(\alpha)}{m} &= 0,95 \\ \cos(\alpha) &= \frac{0,95\cdot m}{f_0(m+m_k)} \end{aligned} \tag{25}$$

A číselně

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{0,95\cdot 70}{0,9\cdot 80}\right) = 22,54\ [^\circ] \tag{26}$$

A tedy již při sklonu 22,54°bude moci cyklista získat pouze 95% svého základního zrychlení, a tedy efekt již nebude zanedbatelný.
Je správné ještě ověřit, že nedojde ke klouzání ze sklonu kvůli síle F_1.

Aby k tomu došlo muselo by platit $F_1 \geq F_t$, a tedy

$$\begin{aligned} &(m+m_k)g\sin(\alpha) \geq f_0(m+m_k)g\cos(\alpha) \\ &\sin(\alpha) \geq f_0\cos(\alpha) \\ &\sin(22,54) \leq 0,9 \cdot \cos(22,54) \end{aligned} \tag{27}$$

A tedy cyklistu z kopce síla nestáhne.

4.5 Tření mechanismu

Poslední odporovou silou je poté odpor samotného mechanismu kola.
Určit zda je zanedbatelný, či nikoliv. A za jakých podmínek je dosti složité. protože záleží jak již jsem uvedl na samotném stavu kola, který může být všemožným.
Mimo to záleží účinnost i na převodu, který se využívá a rozdíl mezi nimi dosahuje až 10%. [**22**] Domnívám se, ale že tření mechanismu není zanedbatelné, protože minimálně 1 převod bude vždy mít nižší účinnost než 0,95%.

4.6 Smykové tření

Čistě jako důležitou zmínku ještě uveďme, že nejzásadnější chybou by bylo zanedbání změny povrchu, po kterém by se cyklista pohyboval.
protože pokud bych zanedbal rozdíl mezi smykovým třením na silnici (0,9) a na štěrkové cestě (0,6) došlo by opravdu k podstatné chybě. [**23**]
Dalo by se tedy říci, že nejpodstatnější ztrátou pro cyklistu do rozumných rychlostí je sjíždění ze silnice.

5 Závěr

Nejprve jsem velmi krátce popsal systém cyklisty a síly, které v něm působí.
Pokračoval jsem diskuzí a kvalitativním průzkumem jednotlivých odporových sil, které na cyklistu působí, a které musí překonávat. Mimo to jsem se pokusil i diskutovat, k jaké změně by došlo, pokud bychom jednotlivé síly zanedbali.
K závěru jsem se poté pokusil určit podmínky, při kterých nebude možné jednotlivé síly zanedbat. Dospěl jsem k tomu, že odpor vzduchu není možné zanedbat, pokud za bezvětří překročí cyklista rychlost cca 10 $m \cdot s^{-1}$, pokud pojede proti větru, a nebo pokud pojede ve směru větru rychlostí vyšší než cca 20 $m \cdot s^{-1}$. U valivého odporu jsem dospěl k tomu, že leží na hranici mnou zvolené zanedbatelnosti, ale při vyšších rychlostech ji překročí, a tedy bych jej nepovažoval za rozumné zanedbat. Sklon se dále ukázal jako jeden z nejpodstatnějších odporů, kterým musí cyklista čelit a již při $2,5°$ je nezanedbatelný. Tření mechanismu je poté nejsložitější, ale pro "osobní" kolo je rozhodně nezanedbatelným.
Velmi krátce jsem se vyjádřil i ke změně povrchu, po kterém se cyklista pohybuje, který má naprosto zásadní efekt, ale zabývat se jím bych považoval za odklonění se od zadání.

Domnívám se, že provedené odhady, a určené podmínky budou relativně realistické, přesto jim lze vytknout mnoho.
Od konstantních sil, které by dlouhodobě člověk nebyl schopen způsobovat po samotný způsob, kterým jsem rozhodoval o zanedbatelnosti. Přesto se ale domnívám, že zvolit naopak postup konstantního výkonu by nebylo rozumné, a nevedlo by to ke zvýšení přesnosti odhadu, protože typický cyklista má k dispozici přehazovačku, která mu umožňuje výkon zásadně měnit (mimo to očekávat od člověka konstantní výkon nepovažuji za realističtější, než konstantní sílu).

Osobně mne překvapil vliv sklonu, od kterého jsem neočekával tak rychlý nárůst. Inverzně mne překvapil valivý odpor, který jsem považoval za podstatnější.
Překvapil mne i nemožnost se dobrat k rozumným datům vztahujícím se k valivému odporu kol, či odporu vzduchu cyklistů, kde jsem se byl nucen spokojit s více či méně nevědeckými daty, a pokud data byla, tak byla relativně pochybná (např. měření se 100% odchylkou v případě valivého odporu).
Výsledně se domnívám, že jsem zadání úspěšně splnil, a v důsledku úlohy si dvakrát rozmyslím vydat se na cyklistický výlet za větrného počasí.

References

[1] Wikipedia contributors. (2025, August 19). Bicycle and motorcycle dynamics. Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Bicycle_and_motorcycle_dynamics

[2] Calder, S. (2025, January 20). At speeds above 25 km/h, aerodynamic drag becomes the dominant force a cyclist must overcome, accounting fo. . . Rule 28. https://www.rule28.com/blogs/thoughts/the-physics-of-cycling-aerodynamics-a-technical-guide

[3] Blocken, Bert & Druenen, Thijs & Toparlar, Yasin & Andrianne, Thomas. (2019). CFD analysis of an exceptional cyclist sprint position. Sports Engineering. 22. 10.1007/s12283-019-0304-7.

[4] Speed Up Effects: Hill Effect. (n.d.). WindPower. http://ele.aut.ac.ir/~wind/en/tour/wres/hill.htm

[5] What is rolling resistance and why does it matter? (n.d.). https://www.bikeradar.com/features/tech/rolling-resistance-explained

[6] Wil, S. A. (2025, January 15). Bike Tire Rolling Resistance Ratings: Boost Your Ride! - The Cyclist Guy — Blog on Cycling Resources & The Cyclist Guy — Blog on Cycling Resources & Accessories. https://cyclistguy.com/bike-tire-rolling-resistance-ratings/

[7] CRR Speed Test — Bicycle Rolling Resistance. (n.d.). https://www.bicyclerollingresistance.com/specials/crr-speed-test

[8] Bicycle Drag Force Formulas. (n.d.). https://sheldonbrown.com/rinard/aero/formulas.html

[9] Liew, Y. W., Matthews, O., Dao, D. V., & Li, H. (2025). Power Transmission Mechanism and Tribological Performance of Modern Bicycle Drivetrains—A Review. Machines, 13(1), 66. https://doi.org/10.3390/machines13010066

[10] Urunkar, Rahul & Deshpande, PP. (2014). Study of drive mechanisms of bicycle, tricycle or like vehicles to optimize operating performance-a review. International Journal of Engineering Research and Applications. 4. 214-219.

[11] Thijs van Druenen, Bert Blocken, Aerodynamic impact of cycling postures on drafting in single paceline configurations, Computers & Fluids, Volume 257, 2023, 105863, ISSN 0045-7930, https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2023.105863

[12] RoyMech - Human Strength / Endurance Notes. (n.d.). https://steeljis.com/roymech/human/human_strength.php

[13] Harper, G. (2025, July 30). Whatistheaverageweightofabike?BikePush. https://bikepush.com/average-weight-bike/

[14] Llc, E. E., & Edge, E. (n.d.). Coefficient of Friction Equation and Table chart. https://www.engineersedge.com/coeffients_of_friction.htm

[15] Wikipedia contributors. (2025a, July 13). Reynolds number. Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Reynolds_number

[16] Editor Engineeringtoolbox. (2025, March 27). Air viscosity: dynamic and kinematic viscosity at various temperatures and pressures. https://www.engineeringtoolbox.com/air-absolute-kinematic-viscosity-d_601.html

[17] Editor Engineeringtoolbox. (2025b, June 16). Air density, specific weight, and thermal expansion coefficients at varying temperatures and pressures. https://www.engineeringtoolbox.com/air-density-specific-weight-d_600.html

[18] Wikipedia contributors. (2025a, June 9). Drag coefficient. Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Drag_coefficient

[19] Přispěvatelé projektů Wikimedia. (2025, February 13). Beaufortova stupnice. https://cs.wikipedia.org/wiki/Beaufortova_stupnice

[20] Van Dalen, A. (n.d.). Energy requirements of cycling. Avdweb. https://avdweb.nl/solar-bike/misc/energy-requirements-of-cycling

[21] How tire rolling resistance affects cycling speed – Ride far. (n.d.). https://ridefar.info/bike/cycling-speed/rolling-resistance/

[22] R. Bolen, & C. M. Archibald. (n.d.). An Experimental Study on the Efficiency of Bicycle Transmissions. 2017 ASEE Zone II Conference. https://asee-ncs.org/proceedings/2017/3/78.pdf

[23] Tire friction and rolling coefficients. (n.d.). https://www.hpwizard.com/tire-friction-coefficient.html

P... jedeme na kole

Kosma Šatánek

5. října 2025

1 Zadání

Představte si, že za větrného dne jedete na kole ve zvlněném terénu. Kvalitativně diskutujte vlastnosti pohybu různými směry a různou rychlostí; diskutujte také, jak by se změnil popis tohoto pohybu, kdybychom zanedbali

- odpor vzduchu,
- valivý odpor kol,
- sklon terénu,
- různé odporové síly.

Pomocí vztahů pro příslušné fyzikální veličiny nalezněte podmínky, za jakých si můžete dovolit jednotlivé síly při popisu pohybu zanedbat.

2 Úvod

Cílem úlohy je diskutovat síly, které způsobují ztráty při jízdě cyklisty za větrného počasí ve zvlněném terénu.
Nejprve se krátce budu zabývat silami, které působí na cyklistu, dále se pokusím kvalitativně diskutovat jednotlivé odporové síly.
Pokusím se diskutovat je z pohledu pohybu v různých směrech a efekt jejich zanedbání.
Následně se pokusím odhadnout podmínky, při kterých má smysl jejich zanedbání, aniž bychom se dopustily zásadní chyby.

3 Větrný den ve zvlněném povrchu

První část zadání dává velkou možnost pro vlastní interpretaci.
Kvalitativně diskutujte vlastnosti pohybu různými směry a různou rychlostí z mého pohledu nesděluje, co by mělo být cílem první části řešení úlohy.
Proveďme pro začátek zběžný výčet sil, které působí na kolo a cyklistu. [6]
Cyklista na kole je přitahován k zemi tíhovou silou, která způsobí, že se kolo při rozumných rychlostech nevznese.
Síly, která na kolo a cyklistu působí v horizontálním směru jsou poté projevem posuvné síly, kterou vyvolává cyklista šlapáním (v důsledku šlapacího mechanismu existuje tření, která snižuje velikost efektivní posuvné síly).
Jako protiakce země vzniká tření, která způsobí, že kolo nezačne klouzat.
Mimo to , protože kola nejsou dokonale tvrdá dochází k jejich deformaci, což způsobí vznik valivého odporu.
Na cyklistu působí také odpor vzduchu, neboť při svém pohybu má nenulovou relativní rychlost vůči němu a je nucen ho odtlačovat.
Má smysl se zmínit i o silách, které jsou projevem rotace, a to odstředivé síle, která na cyklistu bude působit při průjezdu zatáčky a efekt gyroskopu, který je projevem rotace kol a udržuje kolo s cyklistou vzpřímeně.

Nyní když je nám již známa základní problematika pohybu na kole, je možné se zabývat jednotlivými odporovými silami, které na cyklistu působí.

3.1 Sklon terénu

Sklon terénu bude mít na svědomí dva hlavní efekty.
Jednak způsobí, že cyklista získá, a nebo naopak ztratí část své energie na to, aby změnil svoji potenciální energii.
Druhý méně významný bude ztráta části normálové síly, která drží cyklistu na podložce, což zřejmě sníží sílu, kterou bude moci cyklista šlapat, aniž by docházelo k prokluzování kola.
První zmíněný efekt si však zahraje pouze v případě, kdy se cyklista bude pohybovat ve směru, a nebo naopak po směru sklonu.
Zatímco druhý si zahraje i v případě, kdy by se cyklista pohyboval po vrstevnici, neboť i zde bude ztrácet část své normálové síly, a bude mu hrozit skluz.
To však nebude platit, pokud se bude pohybovat zatáčkou, kde mu správný sklon v důsledku existence odstředivé síly umožní pohybovat se rychleji, než

pokud by se pohyboval vodorovnou zatáčkou.
Poslední efekt, který však bude spíše zanedbatelný je možná změna směru a úhlu, ze kterého do cyklisty naráží vítr (zároveň je však dosti pravděpodobní, že u země bude vítr následovat sklon).

V případě, kdy bychom se rozhodli při popisu pohybu cyklisty zcela vypustit existenci sklonu, tak by výsledná chyba zcela záležela na velikosti daného sklonu a na časovém intervalu, na kterém bychom se na cyklistu dívali.
Pokud by se pohyboval po relativně rovné cestě, tak v řádu jednotek minut nebudeme pravděpodobně pozorovat podstatnou změnu, ale např. na 10 minutách si rozhodně všimneme, že cyklista musí pro udržení dané rychlosti vykonávat nižší, nebo naopak vyšší práci.
Naopak, pokud bychom pozorovali cyklistu jedoucího z kopce, tak bez započítání sklonu bude model zcela nevyhovující na krátkém časovém obzoru.
Pokud by se však pohyboval mezi kopečky, a pokud bychom se dívali na dostatečně velké časové úseky, tak by bezpochyby bylo možné nahradit n podobných kopečků rovinou.

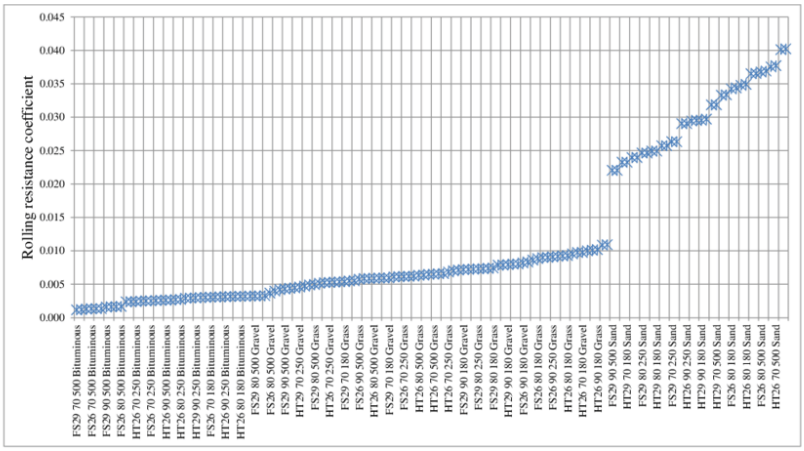
3.2 Odpor vzduchu

Mezi podstatnými vlivy zvlášť při vyšších rychlostech patří odpor vzduchu, který určuje maximální rychlost, které může cyklista dosáhnout.
Samotný odpor vzduchu se již při cca 12 $km \cdot h^{-1}$ stává hlavní odporovou silou, kterou musí cyklista překonávat, a poté dále roste. [4]
Mimo rychlost větru a cyklisty (a tedy relativní rychlosti cyklisty vůči okolnímu vzduchu) ovlivňuje velikost tohoto odporu i povrch (a tvar) samotného cyklisty a kola.
Z pohledu odporu je však podstatnější vliv samotného cyklisty (75-80%), než kola na kterém se pohybuje.
Existuje tedy relativně podstatný rozdíl v odporu, který cyklista pociťuje v závislosti na tom jaké oblečení má na sobě (přiléhavé oblečení sníží velikost odporové síly) a v jaké pozici se pohybuje na kole.[5]
Rozdíl v pohybu v jednotlivých směrech poté spočívá primárně ve změně relativní rychlosti cyklisty vůči okolnímu vzduchu (při nárazech ze strany cyklisty lze předpokládat, že vliv na samotnou jízdu cyklisty bude minimální, neboť jeho normálová plocha v tomto směru je relativně nízkou).

Pokud bychom při našem popisu chování cyklisty zanedbali odpor vzduchu, tak nejen, že by to zda je větrný den nemělo žádný vliv, ale také by pohyb cyklisty při vyšších rychlostech byl zcela neodpovídající realitě.

3.3 Valivý odpor

Dalším z efektů, které cyklistu ovlivňují je valivý odpor, který je projevem deformace kola.
Neboť kolo, které cyklista používá s určitostí nemá dokonale tuhá kola, tak dojde k jejich deformaci, a styk kol s podložkou bude probíhat na plošce, což způsobí posun normálové síly, který se projeví jako odpor kol proti rotaci.
Velikost efektu závisí na mnoha faktorech, od hmotnosti kola a cyklisty po terén, po kterém se cyklista pohybuje.
S vyšším tlakem kol a nižší hmotností cyklisty bude docházet ke snížení valivého odporu, a tedy k jednoduššímu pohybu pro cyklistu. [1][2]
Zároveň valivý odpor roste se zvyšující se rychlostí, kterou se cyklista pohybuje. [2] V případě 4 (a více) kolových vozidel dochází k zvýšení valivého odporu i při průjezdu zatáčkou, neboť dojde k narušení rovnováhy deformace, která existuje mezi jednotlivými koly. Tento efekt ale bude u cyklisty pravděpodobně zcela zanedbatelný. [2]
Jak již jsem zmínil, hodnota valivého odporu je odlišná pro různé povrchy.
Je ji nutné určovat pomocí měření pro dané kolo a zátěž. Lze však tvrdit, že čím snazší je deformovat podložku, tím je vyšší i valivý odpor. Tzn. na asfaltové silnici je valivý odpor relativně nízký, na štěrku lehce vzroste a na písku je poté téměř 6-násobný.[1][3]



Z pohledu pohybu v různých směrech není valivý odpor zvlášť zajímavý, neboť lze předpokládat, že povrch po kterém se cyklista pohybuje je ve všech směrech stejný.
Zároveň pokud se cyklista bude pohybovat po kopci, a tedy na povrchu se sklonem nedojde ke změně samotného koeficientu. Dojde pouze ke snížení absolutní hodnoty odporu, což bude projev snížení absolutní hodnoty normálové síly.

Při zanedbání valivého odporu bychom pozorovali v zásadě inverzní efekt, než u odporu vzduchu.
V tomto případě by největší rozdíl v chování cyklisty nastával při nižších rychlostech.
Předpoklad, který by v tomto případě bylo nutné učinit by byl nekonečný tlak v pneumatikách, a tedy dokonale tvrdé pneumatiky.

3.4 Smykové tření

I přes to, že toto pravděpodobně nebylo cílem zadání, tak považuji za správné zmínit i toto tření, které lze rozhodně charakterizovat jako odporovou sílu.
Samotné smykové tření je závislé pouze na povrchu, po kterém se cyklista pohybuje, a za předpokladu homogenního povrchu nezáleží na směru, ve kterém se cyklista pohybuje.

Při zanedbání tohoto tření by bezpochyby bylo možné pozorovat zajímavé chování (neboť klouzající cyklista není typickým obrazem), pokud by cyklista měl na počátku nenulovou hybnost. V druhém případě by však pouze z kola spadl.

3.5 Vnitřní tření samotného kola

Existují samozřejmě tření i v samotném mechanismu kola, které snižují efektivní práci cyklisty, která se využije na rotaci kol.
Jeho velikost je však u většiny moderních kol velmi nízká, a účinnost převodu rotační energie ze šlapek na kolo je cca $95 - 98,5$ %. [7]
Vzhledem k velikosti ztrát nepovažuji zanedbání efektu této třecí síly na relativně krátkých časových intervalech za problém.
Podstatný vliv se projeví až ve chvíli, kdy bychom nechali cyklistu pohybovat se na dlouhých trasách, kde by i relativní malá ztráta představovala velkou ztrátu absolutní.

4 Podmínky pro zanedbání jednotlivých sil

Po krátkém výčtu sil, které v soustavě cyklisty působí je možné se pustit do určení podmínek, při kterých je možné jednotlivé síly zanedbat.
Základní otázkou však je jakým způsobem rozhodnout o zanedbatelnosti dané síly.
Buď je možné zanedbatelnost síly vztahovat k zrychlení, které je schopen cyklista získat, a nebo je možné jejich zanedbatelnost vztahovat k energii, kterou cyklista kvůli dané síle ztratí za daný čas.
Rozhodl jsem se pro první možnost, a tedy podmínky, při kterých daná odporová síla tvoří 10 % síly, kterou je cyklista schopen vyvolat.

4.1 Maximální zrychlení

Nejprve je tedy nutné určit maximální zrychlení, kterého je schopen cyklista dosáhnout.
Zanedbejme tedy veškeré odporové síly (mimo smykového tření) a předpokládejme, že cyklista je schopen dosáhnout libovolného výkonu, aby zrychlil.
Jako základní povrch zvolme suchou silnici.
Poté je možné tvrdit, že koeficient tření je přibližně rovný $f_0 = 0,8$.[8]
Aby se kolo rozjelo a neprokluzovalo musí platit, že posuvná síla F_0, kterou vyvolává cyklista je nejvýše rovna třecí síle F_t mezi povrchem a pneumatikou kola (nebudu se zabývat existencí dvou kol, neboť by pouze došlo k rozložení hmotnosti a výsledek by zůstal nezměněný)

$$F \leq F_t \tag{1}$$

Poté maximální síla, kterou je schopen cyklista zrychlovat je nutně rovná

$$F_0 = f_0 m g \tag{2}$$

, kde m odpovídá hmotnosti cyklisty a kola.
Uvažujme, že cyklista se nepohybuje na závodním, ale ani na horském kole, a proto jeho kolo váží 15 kg.[9]
A on sám váží 60 kg, poté

$$\begin{aligned} F_0 &= f_0(m_k + m_c)g \\ F_0 &\sim 0,8 \cdot (60 + 15) \cdot 9,81 \sim 588,6\ [N] \end{aligned} \tag{3}$$

Předpokládejme tedy, že tělo cyklisty je schopno vyvinout maximálně 588 N síly.
Což není příliš vzdáleno realitě. [10]

4.2 Sklon

Jak již jsem zmínil výše sklon má různý efekt v závislosti na tom, zda se pohybujeme po/proti sklonu, a nebo po vrstevnici daného sklonu.

4.2.1 Pohyb po/proti sklonu

V tomto případě dochází ke dvěma efektům.
V důsledku sklonu se sníží síla, kterou je schopen cyklista vyvinout, neboť

se sníží normálová síla na podložku.
Zároveň část tíhové síly působí na cyklistu vpřed, a nebo naopak zpět.
Soustřeďme se první na 2. možnost, kdy cyklista vyjíždí do kopečka.
V důsledku sklonu podložky se normálová síla sníží na

$$F_n = F_g \cos(\alpha) \tag{4}$$

, kde α odpovídá sklonu podložky.
Což způsobí snížení síly, kterou je schopen cyklista maximálně vyvinout aniž by začal prokluzovat na (síly, kterou je schopen se pohybovat vpřed)

$$F_{max} = f_0(m_k + m_c)g\cos(\alpha) \tag{5}$$

Zároveň proti pohybu vpřed působí síla

$$F_1 = (m_k + m_c)g\sin(\alpha) \tag{6}$$

Určeme první podmínku, kdy v důsledku síly F_1 ztratí cyklista 10% své posuvné síly

$$\begin{aligned}
&\frac{F_0 - F_1}{F_0} = 0,9 \\
&\frac{f_0(m_k + m_c)g - (m_k + m_c)g\sin(\alpha)}{f_0(m_k + m_c)g} = 0,9 \\
&\frac{f_0 - \sin(\alpha)}{f_0} = 0,9 \\
&f_0 - 0,9f_0 = \sin(\alpha)
\end{aligned} \tag{7}$$

A tedy pro tento sklon α

$$\alpha = \sin^{-1}(0,8 - 0,8 \cdot 0,9) \sim 4,6\ [^\circ] \tag{8}$$

Při tomto sklonu je tedy cyklista schopen šlapat tak, aby dosáhl posuvné síly

$$\begin{aligned}
&F = (m_k + m_c)g(f_0 - \sin(\alpha)) \\
&F \sim (60 + 15) \cdot 9,18 \cdot (0,8 - \sin(4,6)) \sim 530\ [N]
\end{aligned} \tag{9}$$

Ověřme ještě, že $F \leq F_{max}$

$$\begin{aligned}
&F \leq F_{max} \\
&f_0(m_k + m_c)g - (m_k + m_c)g\sin(\alpha) \leq f_0(m_k + m_c)g\cos(\alpha) \\
&f_0 - \sin(\alpha) \leq f_0\cos(\alpha) \\
&0,72 \leq 0,797
\end{aligned} \tag{10}$$

A tedy cyklista může vyvinout sílu F, aniž by začaly kola prokluzovat.
Stačí tedy pouze $4,6°$ sklon k tomu, aby cyklista ztratil 10% svého zrychlení a sklon již nebyl zanedbatelný (tento sklon v případě sjíždění z kopce znamená, že cyklista se může uvolnit a šlapat pouze 90% své síly).

4.2.2 Pohyb po vrstevnici

V případě, kdy se cyklista pohybuje po vrstevnici je možné předpokládat, že jediná změna spočívá ve snížení maximální síly, kterou se může pohybovat vpřed, aniž by došlo k prokluzování.
Působí samozřejmě i síla F_1, která se zde snaží stáhnout cyklistu dolů. můžeme ale předpokládat, že cyklista se nakloní tak aby nespadl z kola, a ke klouzání kola dolů nedojde, neboť s určitostí bude platit $F_1 < F_{max}$ ve chvíli, kdy bude platit $F_0 \cdot 0,9 = F_max$, a proto je možné tento vliv zcela zanedbat.
Proto tedy zde dojde pouze ke snížení maximální síly, kterou se může cyklista pohybovat.
Opět se sníží tlak na podložku na

$$F_n = F_g \cos(\alpha) \tag{11}$$

Což opět způsobí snížení síly, kterou je schopen cyklista maximálně vyvinout aniž by začal prokluzovat

$$F_{max} = f_0(m_k + m_c)g\cos(\alpha) \tag{12}$$

Otázkou tedy je, kdy tato maximální síla bude rovná 90% síly F_0, a tedy

$$\begin{aligned} &\frac{F_0 - F_{max}}{F_0} = 0,1 \\ &\frac{f_0(m_k + m_c)g - f_0(m_k + m_c)g\cos(\alpha)}{f_0(m_k + m_c)g} = 0,1 \\ &1 - \cos(\alpha) = 0,1 \end{aligned} \tag{13}$$

A číselně pro α

$$\alpha = \cos^{-1}(0,9) \sim 25,84\ [°] \tag{14}$$

A tedy cyklista v tomto případě bude schopen využít pouze

$$F_{max} = 0,8 \cdot (60 + 15) \cdot 9,81 \cdot \cos(25,84) \sim 530\ [N] \tag{15}$$

ze své síly.
Stačí tedy aby se pohyboval po vrstevnici kopce se sklonem $25,84°$, aby již nebyl sklon zanedbatelný.

4.3 Odpor vzduchu

Nejprve je nutné určit, zda se bude odpor vzduchu působící na cyklistu řídit Stokesovým, a nebo Newtonovým vztahem.
Proto nejprve určeme Reynoldsovo číslo cyklisty.
Pro Reynoldsovo číslo cyklisty [11]

$$Re = \frac{\rho v L}{\mu} \tag{16}$$

, kde ρ odpovídá hustotě vzduchu, v relativní rychlosti cyklisty vůči vzduchu, L odpovídá charakteristické délce cyklisty a μ dynamické viskozitě vzduchu. Dosazením pro $\rho = 1,324\ kg \cdot m^{-3}$, $v = 10\ m \cdot s^{-1}$ (tato hodnota rychlosti odpovídá přibližně rozmezí rychlostí, na kterých se cyklista může pohybovat), $L = 1$ m, $\mu = 0,0168\ mPa \cdot s$ [12][13]

$$Re = \frac{1,324 \cdot 10 \cdot 1}{0,0168 \cdot 10^{-3}} \sim 7,9 \cdot 10^{-5} \tag{17}$$

Vzhledem k hodnotě Reynoldsova čísla má tedy smysl pracovat s Newtonovým odporem.
Pro odpor vzduchu podle Newtonovy rovnice

$$F_v = \frac{1}{2} \rho v^2 c_o A \tag{18}$$

, kde c_o odpovídá odporovému koeficientu a A odpovídá ploše průřezu cyklisty kolmé ke směru pohybu.
Zde se nabízí dvě možnosti.
Za prvé je možné aproximovat cyklistu i s kolem na některý z tvarů, a následně využít daný odporový koeficient.
Druhá možnost spočívá ve využití uváděného odporového koeficientu, $C_o = c_o A$ pro cyklistu.
Podívejme se na obě možnosti.

4.3.1 Cyklista a kolo jako koule

Pro jednoduchost aproximujme kolo s cyklistou na polokouli, která je vrcholem otočena proti větru, a jejíž koeficient odporu $c_d = 0,42$. [14]
Následně předpokládejme, že tato polokoule má poloměr $R = 0,75$ m, a tedy kolmo na směr větru je její průřez rovný

$$A = \pi R^2 \tag{19}$$

Nyní tedy hledejme rychlost, kdy bude platit

$$\frac{F_0 - F_v}{F_0} \sim 0,9 \tag{20}$$

A tedy

$$\begin{aligned} \frac{f_0(m_k + m_c)g - \frac{1}{2}\rho v^2 c_o A}{f_0(m_k + m_c)g} &\sim 0,9 \\ 1 - \frac{\frac{1}{2}\rho v^2 c_o A}{f_0(m_k + m_c)g} &\sim 0,9 \\ 0,1 \sim \frac{\frac{1}{2}\rho v^2 c_o A}{f_0(m_k + m_c)g} & \\ v = \sqrt{\frac{0,2 \cdot f_0(m_k + m_c)g}{\rho c_o \pi R^2}} & \end{aligned} \tag{21}$$

A číselně

$$v = \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8 \cdot (60+15) \cdot 9,81}{1,324 \cdot 0,42 \cdot \pi \cdot 0,75^2}} \sim 11\ [m \cdot s^{-1}] \tag{22}$$

A tedy při relativní rychlosti cyklisty vůči vzduchu rovné cca 11 $m \cdot s^{-1}$ ztrácí cyklista na překonání odporu vzduchu 10% svých sil.
Což znamená, že pokud se bude cyklista za bezvětří pohybovat, tak abychom mohli zanedbat odpor vzduchu, tak by bylo nutné aby jel rychlostí nižší než 40 $km \cdot h^{-1}$.
Uvažujme následně větrný den, který definuji jako stav, kdy šumí koruny stromů, a rychlost větru je rovná cca 30 $km \cdot h^{-1}$. [15]
V tom případě tedy pokud cyklista pojede proti větru můžeme odpor vzduchu zanedbat pouze do cca 10 $km \cdot h^{-1}$, a pokud pojede po větru, tak až do 70 $km \cdot h^{-1}$.
Nepovažuji za nutné diskutovat boční nárazy větru do cyklisty, neboť aby došlo k zásadní změně bylo by nutné, aby rychlost větru byla výrazně vyšší.

4.3.2 Uváděný odporový koeficient

Zvolme tedy nyní koeficient odporu rovný $c_d = 1,1$, který odpovídá typické poloze cyklisty (neodpovídá závodní, při které je $c_d \sim 0,9$). [16]
Následně zvolme plochu cyklisty rovnou $A = 0,51\ m^2$.[16]
Poté z (21)

$$v = \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8 \cdot (60+15) \cdot 9,81}{1,324 \cdot 1,1 \cdot 0,51}} \sim 12,6\ [m \cdot s^{-1}] \tag{23}$$

A tedy v tomto případě postačí cca 12,6 $m \cdot s^{-1}$, aby nebyl odpor vzduchu zanedbatelný.
Za bezvětří tedy může jet až 45 $km \cdot h^{-1}$, proti větru cca 15 $km \cdot h^{-1}$, a pokud pojede po větru, tak až 75 $km \cdot h^{-1}$, a stále bude odpor vzduchu z mé definice zanedbatelný.

4.4 Valivý odpor

Jak již jsem zmínil, valivý odpor spočívá v deformaci kola, v důsledku čehož se kolo brání rotaci.
Jako takový není valivý odpor příliš závislý na rychlosti, a neexistuje žádný "rozumný" vztah, který by toto chování popisoval.
Větší smysl dává zabývat se valivým odporem v jednotlivých prostředích a při různých tlacích pneumatiky.
Při deformaci pneumatiky dojde k posunutí bodu působení normálové síly o vzdálenost ξ vpřed, což se projeví jako moment síly, který bude působit proti rotaci kola.
Pro tento moment síly platí [17]

$$\begin{aligned} M &= \xi F_n \\ M &= \xi (m_k + m_c) g \end{aligned} \tag{24}$$

, kde ξ odpovídá ramenu valivého odporu.
Pro sílu působící ve středu kola, která je ekvivalentní tomuto momentu síly

$$\begin{aligned} F_o &= \frac{M}{R} \\ F_o &= (m_k + m_c) g \frac{\xi}{R} \end{aligned} \tag{25}$$

, kde R odpovídá poloměru kola.
A tedy pro procentuální podíl, který si cyklista uchová po působení této síly

$$\begin{aligned} n &= \frac{F_0 - F_o}{F_0} \\ n &= \frac{f_0(m_k + m_c)g - (m_k + m_c)g\frac{\xi}{R}}{f_0(m_k + m_c)g} \\ n &= 1 - \frac{\xi}{Rf_0} \end{aligned} \tag{26}$$

Je zřejmé, že zda bude tato síla zanedbatelná ($n \leq 0,1$), či nikoliv bude závislé na ramenu valivého odporu a poloměru samotného kola.
Využijme tedy data z již zmíněného článku, kde sice měřili horská kola, ale lepší měření bohužel v této oblasti není dostupné. [3]
Vzhledem k rozdílu v definici valivého odporu v anglické a české literatuře je pouze nutné si uvědomit, že v článku uváděné hodnoty "koeficientu valivého odporu" c_d odpovídají

$$c_d = \frac{\xi}{R} \tag{27}$$

Na asfaltové silnici poté s $c_d = 0,002$

$$n = 1 - \frac{0,002}{0,8} \sim 0,998 \tag{28}$$

Zde je tedy z mé definice valivý odpor zcela zanedbatelný.
V druhém případě, a tedy jízdy na štěrku

$$n = 1 - \frac{0,006}{0,8} \sim 0,993 \tag{29}$$

Opět z mé definice zcela zanedbatelný.
V případě trávy

$$n = 1 - \frac{0,007}{0,8} \sim 0,991 \tag{30}$$

Z mé definice zanedbatelný úbytek. A v případě písku

$$n = 1 - \frac{0,03}{0,8} \sim 0,96 \tag{31}$$

Zde je úbytek větší, ale stále zanedbatelný.
Nabízí se ještě provést výpočet se započítáním změny smykového tření f, neboť na trávě bude s určitostí jiné, než na asfaltu.
To ale nic nezmění, neboť v důsledku snížení smykového tření bude sice cyklista moci šlapat méně, ale svoji sílu si uchová, a tak jednoduše zcela překoná valivý odpor a bude schopen dosáhnout maximální možné posuvné síly na daném povrchu.

4.5 Smykové tření

Zde se nabízí ptát se, zda je možné zaměnit jednotlivé povrchy, a předpokládat, že cyklista, který se pohybuje po trávě může vyvinout stejné zrychlení jako cyklista na asfaltové silnici.
Opět pro zanedbání žádejme změnu maximálně 10%.
Na daném povrchu může cyklista vyvinout maximální posuvnou sílu aniž by došlo k prokluzování rovnou

$$F = f(m_k + m_c)g \tag{32}$$

A tedy oproti F_0

$$\begin{aligned} n &= \frac{F_0 - F}{F_0} \\ n &= \frac{f_0(m_k + m_c)g - f(m_k + m_c)g}{f_0(m_k + m_c)g} \\ n &= 1 - \frac{f}{f_0} \end{aligned} \tag{33}$$

Bohužel není mnoho měřeních smykového tření na různých površích pro pneumatiky pro kola, a tedy se budu nucen spokojit s měřením pro automobily.
Vycházeje z měření pro mokrou silnici tedy mohu psát [18]

$$n = 1 - \frac{0,6}{0,8} \sim 0,25 \tag{34}$$

A tedy dojde ke změně o 25%, a tedy zřejmě není možné zanedbat ani případné namočení povrchu.
Pro štěrkovou cestu dále máme

$$n = 1 - \frac{0,5}{0,8} \sim 0,38 \tag{35}$$

Je tedy zřejmé, že až na velmi lehké změny není možné zanedbat změnu povrchu při popisu pohybu cyklisty.

4.6 Vnitřní tření

Jak již jsem uvedl účinnost kola, které je správně uchováváno a naolejováno je rovná cca $95 - 98,5$ %. [7] Což je z mé definice zcela zanedbatelné.
Samozřejmě je hodnota účinnosti velmi závislá na typu, modelu, stáří atd... kola, a proto se může pohybovat až k 80%, kde již zanedbatelnou není. [19]
Domnívám se tedy, že pokud je cyklista profesionálem, a stará se o své kolo a má ho v perfektním stavu, poté je ztráta v mechanizmu zanedbatelná, naopak pokud se na kole projede pouze občas, tak zřejmě není.
Zároveň popsat za jakých podmínek je kolo v perfektním stavu je příliš složitý problém, aby se jím mělo smysl zabývat.

5 Závěr

Domnívám se, že jsem provedl relativně podrobnou kvalitativní diskusi ohledně odporových sil, které mohou potkat cyklistu za větrného dne ve zvlněném terénu. Mimo to jsem se na počátku krátce zabýval i samotným popisem sil působících na cyklistu a kolo. Dále jsem poté provedl výpočty, jejichž cílem bylo určení podmínek, při kterých je možné z modelu pohybu cyklisty zanedbat jednotlivé odporové síly, a tedy podmínky při kterých je ztráta síly, kterou cyklista pohání kolo rovná 10% maximální síly, kterou je schopen cyklista vykonat.
Výsledně jsem dospěl k tomu, že sklon je možné v závislosti na tom, zda cyklista vyjíždí do kopce, či jede po vrstevnici možné zanedbat při cca 4,5° a 26° sklonu respektive. Dále jsem určil, že odpor vzduchu je zanedbatelný do rychlosti pohybu cca 40 $km \cdot h^{-1}$ vůči okolnímu vzduchu. U valivého odporu jsem vzhledem k stanoveným podmínkám zanedbatelnosti dospěl k tomu, že je prakticky vždy zanedbatelný. Krátce jsem se věnoval i možnosti zanedbání změny povrchu, kde se ukázalo, že ve většině případů není změnu povrchu možné zanedbat. U vnitřního tření se poté ukázalo, že zda je zanedbatelné záleží primárně na stavu kola.
Domnívám se, že většina výsledků bude odpovídat realitě.

Nejvíce mne překvapila rychlost růstu odporu vzduchu, kterou si člověk často neuvědomí, snad pouze v případě, kdy je nucen šlapat proti větru :D.
Podobně překvapivou pro mne byla zanedbatelnost valivého odporu, kterému bych přisoudil větší vliv.
Zajímavým a neočekávaným zjištěním je, že z pohledu odporu vzduchu je možné cyklistu na kole relativně úspěšně aproximovat pomocí polokoule o poloměru 75 cm.
Výsledně se tedy domnívám, že jsem zadání úlohy splnil úspěšně.

Reference

[1] Prof Wynand Steyn, & Janike Warnich. (n.d.). The impact of tyre diameter and surface conditions on the rolling resistance of mountain bikes. In E S S a Y S I N N O V a T E 1 0 2 0 1 5. https://www.up.ac.za/media/shared/404/Articles/innovate_10_2015_the-impact-of-tyre-diameter-and-surface-conditions-on-the-rolling-resistance-of-mountain-bik zp73367.pdf

[2] Wikipedia contributors. (2025, May 23). Rolling resistance. Wikipedia.https://en.wikipedia.org/wiki/Rolling_resistance#Dependence_on_curvature_of_roadway

[3] Steyn, Wynand & Warnich, Janike. (2014). Comparison of tyre rolling resistance for different mountain bike tyre diameters and surface conditions. South African Journal for Research in Sport, Physical Education and Recreation. 36. 179-193.

[4] Bicycle Drag Force Formulas. (n.d.). https://sheldonbrown.com/rinard/aero/formulas.html

[5] How air resistance of the cyclist affects cycling speed – Ride far. (n.d.-b). https://ridefar.info/bike/cycling-speed/air-resistance-cyclist/

[6] Bicycle Drag Force Formulas. (n.d.). https://sheldonbrown.com/rinard/aero/formulas.html

[7] Liew, Y. W., Matthews, O., Dao, D. V., & Li, H. (2025). Power Transmission Mechanism and Tribological Performance of Modern Bicycle Drivetrains—A Review. Machines, 13(1), 66. https://doi.org/10.3390/machines13010066

[8] Llc, E. E., & Edge, E. (n.d.-b). Coefficient of Friction Equation and Table chart. https://www.engineersedge.com/coeffients_of_friction.htm

[9] Cayley. (2022b, September 8). What is the mass of a bicycle (2025) — Bike Avenger. Bike Avenger. https://www.bikeavenger.com/what-is-the-mass-of-a-bicycle/

[10] C.R. Mehta, P.S. Tiwari, S. Rokade, M.M. Pandey, S.C. Pharade, L.P. Gite, S.B. Yadav, Leg strength of Indian operators in the operation of tractor pedals, International Journal of Industrial Ergonomics, Volume 37, Issue 4, 2007, Pages 283-289, ISSN 0169-8141, https://doi.org/10.1016/j.ergon.2006.10.025.

[11] Wikipedia contributors. (2025b, July 13). Reynolds number. Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Reynolds_number

[12] Editor Engineeringtoolbox. (2025b, June 16). Air density, specific weight, and thermal expansion coefficients at varying temperatures and pressures. https://www.engineeringtoolbox.com/air-density-specific-weight-d_600.html

[13] Editor Engineeringtoolbox. (2025a, March 27). Air viscosity: dynamic and kinematic viscosity at various temperatures and pressures. https://www.engineeringtoolbox.com/air-absolute-kinematic-viscosity-d_601.html

[14] Wikipedia contributors. (2025b, June 9). Drag coefficient. Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Drag_coefficient

[15] Louka, M. S. V. (n.d.). Tabulka větrů. Myslivecký Spolek Volavec Louka. https://www.myslivostlouka.cz/inpage/tabulka-vetru/

[16] Van Dalen, A. (n.d.). Energy requirements of cycling. Avdweb. https://avdweb.nl/solar-bike/misc/energy-requirements-of-cycling

[17] Bohumil Vybíral, & Lenka Zdeborová. (n.d.). Odporové síly. In Studijní Text Pro Řešitele FO. http://fyzikalniolympiada.cz/texty/odpsil.pdf

[18] Mackenzie, Jamie & Anderson, Robert. (2009). The potential effects of Electronic Stability Control interventions on rural road crashes in Australia: Simulation of real world crashes.

[19] Bicycle Drag Force Formulas. (n.d.-b). https://sheldonbrown.com/rinard/aero/formulas.html

Úvod

Diskuzi jsem se rozhodl pojmout tak, že budu hledat příspěvky sil, které musí cyklista překonávat. Budu zkoumat oblast hodnot, v nichž dominují či jsou vůbec relevantní. Na základě těchto sil bych pak měl být schopen určit rychlostní profil trasy cyklisty.

Aby se nám tyto deklarované cíle podařilo naplnit, musíme uvážit několik předpokladů.

- Uvážíme, že cyklista jede po celou dobu s konstantním výkonem ($P = \text{konst}$). Tento předpoklad je hodně hrubý, závislost výkonu na čase je v praxi silně arbitrární. Ovšem tento předpoklad využijeme až v posledním kroku a umožní nám spočíst rychlostní profil trasy. Trochu neintuitivním by se tento předpoklad mohl jevit v případě přeřazování, ale uvažme, že když přeřadíme na „lehčí“ převod, síla potřebná ke šlapání se sice k-krát zmenší, ovšem frekvence šlapání se musí k-krát zvýšit, chceme-li si uchovat stálou rychlost (což v praxi tak většinou bývá). Při přeřazování se tedy výkon moc nemění no a jsme-li poctiví cyklisté, šlapeme vždy pro daný převod tak nějak stejně intenzivně – naplno. A pro naše tělo bychom mohli očekávat jakousi nepřímou úměru mezi frekvencí cviku a jeho silovou zátěží, obecně. Tudíž výkon by měl být vždy zhruba konstantní (neboť platí $P = Fv$). A i kdyby ne, uvažme modelového cyklistu, jenž s konstantním výkonem jede. Výjimkou bude potom jízda z kopce.
- Úhel náklonu kopce, po němž cyklisté jezdí, jsou typicky poměrně malé. Všechny použité goniometrické funkce budeme rozvíjet pouze **do prvního řádu**. Tj.

  $$\sin\alpha = \alpha + \cancel{\mathcal{O}\left(\alpha^3\right)} \approx \alpha\,,$$
  $$\cos\alpha = 1 + \cancel{\mathcal{O}\left(\alpha^2\right)} \approx 1\,.$$

  Tohle bude mít za důsledek například to, že absolutní rychlost pohybu bude identická s horizontální rychlostí, poněvadž jsou mezi sebou úměrné přes $\cos\alpha = 1$. Nebudeme je mezi sebou tedy odlišovat.
- Zanedbáme sílu potřebnou na zrychlování, přeci jen jízdní trasy nejsou zas tak dynamické, aby cyklista strávil nějaký netriviální čas zrychlováním a zpomalováním.

Jízda do kopce

V této sekci si spočteme, jakou protisílu vytváří jízda do kopce. Na nakloněné rovině s úhlem náklonu α se dá tíhová síla rozložit na složku kolmou a rovnoběžnou s rovinou. Rovnoběžná složka se dá spočíst jako $mg\sin\alpha \approx mg\alpha$. Tudíž máme první příspěvek do síly, kterou je potřeba překonávat.

$$F = mg\alpha$$

V případě, že jedeme z kopce, je úhel záporný a sklonový člen $mg\alpha$ srazí jiné odporové síly – gravitace nám pomůže je překonat. Takže jsme-li piráti silnic a nebrzdíme při jízdě z kopce, bude tah gravitace vyrovnávat další síly odporu. Pokud bychom chtěli uvážit brždění, můžeme položit podmínku nějaké maximální rychlosti $v_{\max}$, o tom možná později.

Valivý odpor

Další vlivná část odporových sil je valivý odpor kol po terénu a kuliček v ložiskách kola. Ta druhá část je typicky zanedbatelná. Pro valivý odpor platí

$$F_{\mathrm{o}} = mg\frac{\xi}{R}\,,$$

kde R je poloměr kola a ξ rameno valivého odporu. Vzhledem k tomu, že většina kol má dost podobné R a ξ skoro nikdy nebudeme znát, má větší smysl zadefinovat pro jednoduchost konstantu analogickou k součiniteli smykového tření $f := \xi/R$. Obecně by měla odporová síla být tvaru tlaková síla krát f, ovšem tlaková síla je $mg\cos\alpha \approx mg$. Do naší síly F nám tak přibyl další člen.

$$F = mg\alpha + mgf$$

Odpor vzduchu

Posledním důležitým faktorem bude odpor vzduchu. Pohybuje-li se těleso rychlostí v v tekutém prostředí o hustotě ϱ, působí proti směru jeho pohybu odporová síla

$$F_{\mathrm{o}} = \frac{1}{2}\varrho SCv^2\,,$$

kde S značí obsah průřezu tělesa kolmého na směr pohybu a C Newtonův odporový koeficient.

Tento vzorec předpokládá turbulentní proudění. Bylo by tedy rozumné ověřit, že proudění vzduchu kolem cyklisty skutečně probíhá turbulentně. To uděláme pomocí Reynoldsova čísla.

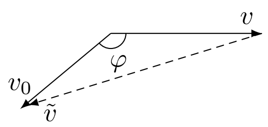
$$\mathrm{Re} = \frac{\varrho v d}{\eta}$$

Dynamická viskozita vzduchu je[1] asi $\eta \doteq 2{\cdot}10^{-5}\,\mathrm{Pa{\cdot}s}$ (při normální teplotě). Hustota vzduchu je asi $\varrho \doteq 1\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Charakteristický rozměr cyklisty na kole, řekněme, $d \sim 1\,\mathrm{m}$ a budeme se pohybovat řádově v rychlostech $v \sim 1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. To nám dá Reynoldsovo číslo

$$\mathrm{Re} \sim 10^4\,.$$

Tato hodnota již odpovídá spíše turbulentnímu proudění. Dobrá tedy.

Náš problém je, že rychlost v vystupující ve vzorci není obecně rychlostí pohybu. Je-li větrné počasí, skládá se nějak rychlost větru v_0 a rychlost jízdy v. Dejme tomu, že vůči soustavě spojené s terénem se pohybuje cyklista rychlostí v a pod úhlem φ (viz obrázek) fouká vítr rychlostí v_0.



Je zřejmé, že rychlosti se nyní složí tak, že vytvoří vektor zaznačený čárkovaně. Jeho velikost lze určit kosinovou větou jako

$$\tilde{v} = \sqrt{v^2 + v_0^2 - 2vv_0\cos\varphi}\,.$$

Abychom určili složku síly, která působí čistě proti směru jízdy, musíme promítnout čárkovaný vektor do směru jízdy. Takový průmět má velikost

$$v - v_0\cos\varphi\,.$$

Z toho tedy vyplývá, že proti jízdě bude vítr působit silou

$$F_o^{\|} = \frac{1}{2}\varrho S C \tilde{v}^2 \cdot \frac{v - v_0\cos\varphi}{\tilde{v}} = \frac{1}{2}\varrho S C (v - v_0\cos\varphi)\sqrt{v^2 + v_0^2 - 2vv_0\cos\varphi}\,.$$

Abychom si uvědomili tu závislost síly na úhlu, můžeme položit $v = v_0$ jako modelový příklad. To se tak typicky bude stávat. Dle Beaufortovy stupnice[2] má běžný mírný vítr (stupeň 4) rychlost přes $20\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Což je i taková typická rychlost při jízdě po rovince. Odporová síla ve směru jízdy je tedy

$$F_\mathrm{o}^{\|} = \frac{1}{2}\varrho S C v^2 \sqrt{2}\,(1-\cos\varphi)^{3/2}$$

Fouká-li vítr ve směru jízdy ($\varphi = 0$), máme vyhráno. Nepociťujeme žádný odpor. Naopak pokud fouká proti nám, pociťujeme odpor 4-krát větší, než kdyby nefoukalo. Ano, díky druhé mocnině není síla lineární a aditivní v rychlosti. Takže to je důvod, proč působí jízda proti větru takové problémy (alespoň mně). Zajímavé, že pokud fouká kolmo k nám, je síla jen $\sqrt{2}$ krát větší, což není tak mnoho. Pro větší úhly pak začne síla rapidně růst.

Problémy s rovnováhou také může působit složka síly kolmá na směr jízdy. Jak jsem empiricky vypozoroval, když jezdím rychleji bez držení za větru, mám tendenci sjíždět ke straně. A teď proč? Postupem analogickým k tomu výše dopočítáme kolmou složku.

$$F_\mathrm{o}^{\perp} = \frac{1}{2}\varrho S C v_0 \sin\varphi\sqrt{v^2 + v_0^2 - 2vv_0\cos\varphi}$$

Uvažme nyní, že jedeme vcelku rychleji než fouká vítr, pak lze vzorec výše aproximovat na

$$F_\mathrm{o}^{\perp} \approx \frac{1}{2}\varrho S C v_0 v \sin\varphi$$

a boční síla je tak přímo úměrná rychlosti jízdy. Což vysvětluje, proč i při slabším větříku začíná při vyšších rychlostech jízdy cyklista ztrácet rovnováhu.

Nicméně do práce, kterou cyklista vykonává, se započítává pouze $F_\mathrm{o}^{\|}$, proto nás bude zajímat primárně ta. Naše celková brzdná síla dosáhla následujícího tvaru.

$$\boxed{F = mg\alpha + mgf + \frac{1}{2}\varrho S C (v - v_0\cos\varphi)\sqrt{v^2 + v_0^2 - 2vv_0\cos\varphi}}$$

[1] https://e-konstrukter.cz/prakticka-informace/dynamicka-a-kinematicka-viskozita-vzduchu

[2] https://cs.wikipedia.org/wiki/Beaufortova_stupnice

Určení rychlostního profilu

Jak víme z mechaniky, platí vzorec pro výkon $P = Fv$. Jestliže je výkon konstantní, lze určit rychlost nepřímou úměrou síly F:

$$v = \frac{P}{F(v)}\,.$$

Problém je, že i síla $F(v)$ závisí na rychlosti, v obecnosti, a poměrně netriviálně. Nějakou polynomickou rovnici řádu vyššího než dva bychom dostali. Zkusme si tedy rozebrat situace, v nichž můžeme některý člen zanedbat, abychom dosáhli nějakých praktických výsledků.

- **Sklonový člen** – ten je zanedbatelný, když je sklon hodně malý. Je však potřeba být na pozoru, protože v absolutních číslech může působit sklon už jen pár stupňů větší zátěž než jiné odporové síly.
- **Valivý odpor** – je zanedbatelný zejména pro silniční kola, která jedou hodně rychle a typicky jsou tak limitována spíše odporem vzduchu. Pro terénní jízdy bahnem, štěrkem, pískem apod. je intuitivně asi výrazně větší.
- **Odpor vzduchu** – je dominantní při vyšších rychlostech pohybu. Nebo při hodně silném větru. Bohužel menší prvek netriviality je do problému přimíchán závislostí na úhlu φ, díky kterému se může stát, že i při silném větru a rychlé jízdě nebude cyklista vzduchem vůbec bržděn.

Uvažme prvně silniční kolo jedoucí do prudšího kopce za bezvětrného počasí – $f \ll \alpha$. Při jízdě do kopce nejsou cyklisté zas tak rychlí, proto i odporová síla vzduchu je zanedbatelná. Zaznačme horizontální délku jako x a výšku jako y. Úhel α je při aproximaci malých úhlů

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,.$$

Síla F pro takový případ má tvar pouze $F = mg\alpha$ a tedy

$$v = \frac{P}{mg}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\,.$$

Jestliže rychlost pohybu v je $\dot{x}$, pak

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{P}{mg}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{P}{mg} = \mathrm{konst}\,.$$

Dostali jsme zajímavý výsledek, že rychlost vertikálního stoupání je konstantní, nehledě na sklon terénu. Je to základní „integrál pohybu“ při jízdě do silničního kopce na kole. Tato hypotéza by se mohla měřit například tím, že se pokusíme vyjet jeden kopec různě dlouhými cestami, pokud nám všechny cesty zaberou stejný čas, je vertikální rychlost skutečně integrálem pohybu.

Mimochodem k tomuto zjištění ani nepotřebujeme aproximaci malých úhlů. Bude platit obecně, neboť překonáváme pouze potenciální energii mgy konstantním výkonem P. Nicméně narážíme na nějaké fyziologické limitace, které stejně ty malé úhly zajistí. Navíc ještě často se děje (alespoň já to tak mám), že do prudších kopců mají lidé tendenci nasadit vyšší výkon, navýší tak trochu vertikální rychlost.

Dále můžeme uvážit silniční kolo, které jede po rovince a tedy hodně rychle. Dominantní tedy bude odpor vzduchu. Dejme tomu, že jede za slabšího větru, takže $v \gg v_0$. Dostáváme rovnici

$$v = \frac{P}{F} = \frac{P}{\frac{1}{2}\varrho S C v^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt[3]{\frac{2P}{\varrho S C}}\,.$$

Je vidět, že odpor vzduchu je nekompromisní. Abychom zrychlili k-krát, musíme zvýšit výkon k^3-krát. Čili terminální rychlost se těžko navyšuje v nějaké netriviální míře.

Můžeme taky zkusit uvážit nebržděnou a zároveň neurychlovanou silniční jízdu z kopce ($\alpha < 0$). Pak $P = 0$ a tedy i $F = 0$ v rychlostním ekvilibriu.

$$F = mg\alpha + \frac{1}{2}\varrho S C v^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{-2mg\alpha}{\varrho S C}}$$

Všimněme si zajímavé závislosti $v \sim \sqrt{m/S}$. Můžeme říct, že většinu plochy průřezu zaujímá člověk sedící na kole. U lidí s podobnou tělesnou konstitucí, což cyklisti často bývají, můžeme říct, že se univerzálně S škáluje s druhou mocninou jejich charakteristického rozměru l, třeba výšky. Kdežto hmotnost m se třetí, proto

$$\frac{m}{S} \sim l\,.$$

A tedy rychlost při volné jízdě z kopce je $v \sim \sqrt{l}$. Je to jeden z důvodů, proč nabývá pravdy ono empirické moudro, že těžším a větším lidem to jede z kopce rychleji. Všeobecně, na lyžích, kole… No a toto bude platit, i když započítáme např. valivý odpor (ovšem pokud nepřevýší sílu sklonu kopce).

$$v = \sqrt{\frac{-2mg(\alpha + f)}{\varrho SC}} \sim \sqrt{l}$$

Dále lze zjistit, že při jízdě na horském kole je rychlost

$$v = \frac{P}{mg(\alpha + f)} \,.$$

Což je vcelku jasný a pramálo zajímavý výsledek.

Závěr

Kvalitativně jsme diskutovali jízdu na kole při započítání tří odporových faktorů (sklon, vzduch, valivý odpor). Napsali jsme jednotnou sílu započítávající všechny tři druhy odporů. Dále jsme si rozmysleli podmínky, za nichž jsou jednotlivé odpory zanedbatelné, a na základě nich sestavili pár konkrétních modelů pro různé typy jízd, v nichž jsme se zaměřili zejména na určení rychlosti jízdy v závislosti na relevantních parametrech.