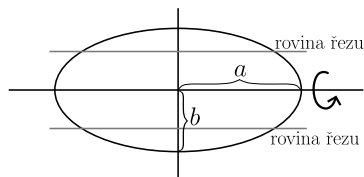


Úloha I.5 ... eliptická čočka

9 bodů

Mějme protáhlý rotační elipsoid z průhledného materiálu o indexu lomu $n = 1,5$. Uvažujme rovinu, která je rovnoběžná s rotační osou a protíná elipsoid blízko vedlejšího vrcholu. Touto rovinou provedeme řez a analogický řez provedeme i na druhé straně. Oba odříznuté kousky k sobě slepíme plochou stranou tak, že dostaneme tenkou čočku.

Jak se zobrazí světelný bod od středu čočky vzdálený $d = 4$ m, jenž leží na optické ose? Průmět původního tělesa je elipsa na přiloženém nákrese s hlavní poloosou $a = 3$ m a vedlejší $b = 2$ m.



Jardu inspirovaly tablety nurofenu.

V dané oblasti má elipsoid v různých řezech jiné poloměry křivosti. To je podstatný rozdíl oproti situaci kulového rozhraní, kde můžeme využít sférické symetrie a úlohu řešit jen v rovině. Zde naopak budeme řešit zobrazení každým řezem čočky zvlášť.

Nejprve si vyjádříme všechny poloměry křivosti jednoho rozhraní čočka–vzduch v závislosti na nějakém parametru. Zavedeme kartézskou souřadnou soustavu a povrch elipsoidu v ní vyjádříme jako

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

kde elipsoid je rotačně symetrický kolem osy x , v jejímž směru je nejdelší. Elipsoid nyní budeme prokládat rovinou

$$x \sin \varphi - y \cos \varphi = 0,$$

kteřá prochází počátkem souřadnic a je kolmá k rovině $z = 0$. Parametrem jejího natočení kolem osy z je úhel φ , který svírá její průsečnice s rovinou $z = 0$ s osou x . Průnik této roviny a elipsoidu je elipsa. Její vedlejší vrchol je pak i vrcholem naší tenké čočky.

Delší poloosa této elipsy má délku

$$c = \sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2 \tan^2 \varphi} + \frac{a^2 b^2 \tan^2 \varphi}{b^2 + a^2 \tan^2 \varphi}} = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}},$$

kteřou jsme určili z Pythagorovy věty. Je to vzdálenost bodu, který je průsečíkem vertikální roviny s elipsoidem v rovině $z = 0$, od počátku.

Délka poloosy c se tedy mění v závislosti na úhlu φ podle toho, v jakém směru elipsoid řežeme. Protože máme tenkou čočku a pracujeme v aproximaci geometrické optiky, budeme ve vedlejší vrcholu elipsu aproximovat (hyperoskulační) kružnicí. Její poloměr je

$$R = \frac{c^2}{b} = \frac{a^2 b}{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}.$$

Čočka tak má spojitě mnoho poloměrů křivosti. V rámci jednoho řezu čočkou můžeme najít ohniskovou vzdálenost podle obecného vztahu, který platí pro tenkou čočku

$$f = \frac{n_1 R_1 R_2}{(n_2 - n_1)(R_2 - R_1)},$$

kde n_1 je index lomu okolního prostředí, n_2 je index lomu čočky a R_1 a R_2 jsou poloměry křivosti první a druhého rozhraní. V našem případě můžeme uvažovat $n_1 = 1$ pro čočku ve vzduchu,

$n_2 = n$ a $R_2 = -R_1 = -R$, neboť obě poloviny čočky jsou stejné a dodržujeme znaménkovou konvenci, ve které uvažujeme vzdálenost předmětu před čočkou jako kladnou, vzdálenost obrazu za čočkou jako kladnou, poloměr křivosti jako kladný, pokud je rozhraní vypouklé směrem k předmětu, a ohniskovou vzdálenost spojky jako kladnou. Ohnisková vzdálenost čočky v závislosti na směru řezu je

$$f = \frac{R}{2(n-1)} = \frac{a^2 b}{2(n-1)(b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi)}. \quad (1)$$

Čočka má tedy celý interval ohniskových vzdáleností, od b až do a^2/b ve výrazu (1).

Pro nalezení polohy obrazu daného předmětu použijeme zobrazovací rovnici ve tvaru

$$d' = \frac{df}{d-f},$$

kde d je vzdálenost předmětu před čočkou a d' je vzdálenost obrazu za čočkou. Dosazením za naše ohniska dostáváme

$$d' = \frac{d}{\frac{2d(n-1)}{a^2 b} (b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi) - 1}.$$

Nyní musíme výsledek analyzovat pro konkrétní hodnoty ze zadání, což po úpravách je

$$d' = \frac{36}{18 \cos^2 \varphi + 8 \sin^2 \varphi - 9} \text{ m} = -\frac{36}{5 \cos 2\varphi - 4} \text{ m}.$$

Tato funkce má obor hodnot $(-\infty, -36 \text{ m})$ a $(4 \text{ m}, \infty)$. Zdroj se tedy pro zadané hodnoty zobrazí na dvě polopřímky – jednu za čočkou, kde vzniká reálný obraz, a jednu před čočkou, kde vzniká zdánlivý obraz.

Pokud by zadaná vzdálenost d neležela v intervalu $\langle b, a^2/b \rangle$, vzniknul by obraz zdroje na nějakém uzavřeném intervalu buď jako reálný, nebo zdánlivý.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.