

Úloha I.4 ... dortíková

8 bodů

Jardovi se při jezení dortík na jeho talíři často převrhne na stranu. Jaká je práce potřebná k takovému neštěstí? Uvažujte polárně (nebo polárkově) symetrický dort o hmotnosti M a poloměru R , jehož těžiště se nachází ve výšce h ; řešte obecně pro jeho rozkrojení na n stejných kousků.

Bonus: Upečte svůj vlastní dort a pošlete fotku i recept. Nejlepší zveřejníme do vzorového řešení!

Jardu potkáte spíš ve Světozoru než ve škole.

Uvažujme, že dort má poloměr R , hmotnost M a jeho těžiště se nachází ve výšce h . Pak hmotnost jednoho kousku je M/n a je to útvar s podstavou kruhové výšece a nějakou výškou, která je na ni kolmá. Pro výpočet práce, která je potřeba na překlacení dortíku na stranu je nutné spočítat, o kolik se musí zvednout těžiště, aby se dortík mohl sám překlopot. Samovolné překlacení nastane v okamžiku, kdy je těžiště kousku dortu nad jeho hranou, podél které otáčíme. Pokud je těžiště ještě kousek směrem nad stabilní polohu, tak se dortík otočí zpátky na svoji podstavu, pokud je ale překročen zmíněný mezní bod, pak dortík přepadne, protože moment tíhové síly, která působí v těžišti, už překoná reakci talíře, která působí na hraně v místě dotyku.

Z výše zmíněného je zřejmé, že není potřeba znát výšku dortu, důležitá je pouze poloha jeho těžiště. Ta je pro každý kousek dortu stále ve výšce h . Je ale také potřeba znát všechny ostatní souřadnice těžiště. Ze symetrie je zřejmé, že se těžiště nachází na ose symetrie kousku. Jak je ale daleko od jeho rohu, který byl před rozkrojením středem celého dortu? Označme středový úhel jako 2α , přičemž platí

$$2\alpha = \frac{2\pi}{n} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{n}.$$

Radiální souřadnici těžiště takového útvaru můžeme najít pomocí vzorců uvedených na internetu, pro celistvost tohoto řešení ji zde ale odvodíme. Pokud hledáme polohu těžiště objektu, který si myšlenkově můžeme rozdělit na i kousků, pak v kartézském souřadnicovém systému platí pro polohu těžiště celého objektu

$$\mathbf{r}_T = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_{Ti}}{\sum m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_{Ti}}{m},$$

kde m_i je hmotnost i -tého kousku, který má těžiště v místě $\mathbf{r}_{Ti}$ a m je celková hmotnost vyšetřovaného tělesa.

Tohoto využijeme při našem výpočtu. Náš kousek dortu si myšlenkově rozdělíme na velmi tenké kruhové výšece s vrcholovým úhlem $d\beta$. Tyto útvaru už budou na svém konci tak málo zakulacené, že jejich podstavu můžeme považovat za rovnoramenný trojúhelník s rameny o délce R . Jeho těžiště leží na jeho ose ve vzdálenosti $2/3$ délky těžnice směrem od vrcholového úhlu $d\beta$. Protože tento trojúhelník je velmi úzký, tak můžeme tvrdit, že délka této těžnice je také rovna R , takže těžiště tohoto trojúhelníku je ve vzdálenosti $2R/3$ od jeho vrcholu.

Abychom určili radiální souřadnici těžiště R_T , z obrovského počtu těchto trojúhelníků poskládáme zpátky náš kus dortu. Protože máme velmi tenké kousky, místo sumy použijeme integrál ve tvaru

$$R_T = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2}{3} R \cos \beta \rho \frac{R^2}{2} d\beta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \rho \frac{R^2}{2} d\beta} = \frac{[\cos \beta]_{-\alpha}^{\alpha} \frac{R^3}{3}}{\alpha R^2} = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha},$$

kde kosinus vystihuje vzdálenost těžiště každého kousku od kolmice k ose symetrie našeho dortíku, ρ je (plošná) hustota dortíku, podstava kousků je $R d\beta$, a jejich obsah je tak $R^2 d\beta/2$.

Odvodili jsme tak polohu těžiště pro homogenní kruhovou výseč. Těžiště kousku dortu, které bude nad hranou, okolo které se kousek otáčí, bude v tomto okamžiku ve výšce H . Ta je daná vzdáleností těžiště kousku dortu od této hrany. Je zřejmé, že vertikální vzdálenost je h , horizontální je pak $R_T \sin \alpha$, což je kolmá vzdálenost polohy těžiště výseče k jedné z jejích hran. Nyní již můžeme zapsat výšku H jako

$$H = \sqrt{h^2 + \left(\frac{2R \sin^2 \alpha}{3\alpha} \right)^2},$$

a změnu potenciální energie, na kterou se spotřebuje naše vykonaná práce W , jako

$$\begin{aligned} \Delta E_p = W = mg(H - h) &= \frac{M}{n} g \left(\sqrt{h^2 + \left(\frac{2R \sin^2 \alpha}{3\alpha} \right)^2} - h \right) = \\ &= \frac{M}{n} g \left(\sqrt{h^2 + \left(\frac{2Rn \sin^2 \frac{\pi}{n}}{3\pi} \right)^2} - h \right). \end{aligned}$$

Tento vztah platí pro všechna $n > 1$. Pro $n = 1$, tedy celý dort, známe polohu těžiště rovnou (je uprostřed ve výšce h), takže je potřebná práce

$$W_1 = Mg \left(\sqrt{R^2 + h^2} - h \right).$$

Za zmínku zde stojí, že nyní již dort neotáčíme kolem rovných hran na stranu, jak požaduje zadání, ale kolem kulatého okraje. Mohli bychom se zabývat i tím, kolik práce je potřeba k přetočení dortu na jeho kulatý okraj. Pro některá n by nám vyšlo, že tato práce je menší než při překlacení na hranu; na tuto možnost se ovšem zadání neptalo.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.