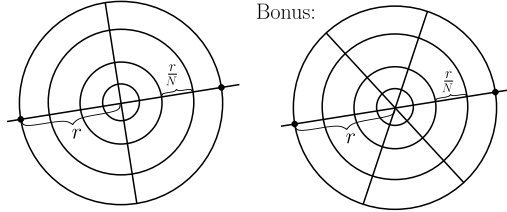


Úloha I.3 ... odpor k pavučinám

6 bodů

Mějme pavučinu tvořenou kružnicí o poloměru r se dvěma kolmými příčkami, které prochází jejím středem. Do kružnice vložíme $N - 1$ soustředných kružnic tak, že se příčky protínají vždy ve vzdálenostech r/N . Jaký odpor je mezi konci jedné příčky? Materiál pavučiny má délkový odpor λ a uzly jsou vodivě propojené.

Bonus: Určete totéž pro tři příčky pootočené o 120° .



Jarda má rád úlohy se zvířátky.

Hlavní část úlohy

Klíčem k vyřešení úlohy je symetrie. Zapojíme-li zdroj na jednu ze dvou přímek pavučiny, ta druhá na něj bude kolmá. Ukážeme, že v takovém případě ze symetrie plyne, že na přímce kolmé na zapojenou přímku bude nulové napětí, a tedy nulový proud. V řešení ji tedy můžeme zanedbat.

Očíslujme od středu obruče indexem n . Pro vnitřní obruč tak máme $n = 1$ a pro vnější máme $n = N$. Pak definujme oko pavučiny jako prostor ohraničený dvěma sousedními kružnicemi a oběma příčkami, které kružnice protínají. Zavedme pro situaci souřadný systém, jehož střed bude totožný se středem pavučiny, úsečka, kterou jsme zapojili do sítě, bude shodná s osou x a úsečka na ni kolmá se zase bude shodovat s osou y . BÚNO¹ můžeme zvolit libovolné oko sítě (v libovolném kvadrantu), tedy například levý horní kvadrant. Uvnitř smyčky platí II. Kirchhoffův zákon, který tvrdí

$$U_{n+1} + U_{n+1,y} - U_n - U_{n+1,x} = 0, \quad (1)$$

kde U_n a U_{n+1} jsou napětí na částech obručí n a $n+1$ vymezených levým kvadrantem. $U_{n+1,y}$ je napětí na úsečce y ohraničené obručemi n a $n+1$

Nyní sestavme II. Kirchhoffův zákon pro smyčku mezi n až $n+1$ obručemi v pravém kvadrantu. Máme, že

$$V_{n+1} - V_{n+1,x} - V_n - U_{n+1,y} = 0. \quad (2)$$

Situace je symetrická a úsečka x je rozdělená na stejně velké části o stejných odporech, které jsou samozřejmě sériové, tedy všechna napětí $U_{n,x}$ a $V_{n,x}$ budou nabývat stejné velikosti. Tedy $U_{n,x} = V_{n,x}$. Na obloucích platí stejný argument a tedy $U_n = V_n$. Toto dosadíme do rovnic (1) a (2) a ty od sebe následně odečteme. Tedy

$$0 = U_{n+1} + U_{n+1,y} - U_n - U_{n+1,x} - \\ - U_{n+1} + U_{n+1,y} + U_n + U_{n+1,x}.$$

¹bez újmy na obecnosti

Z toho vyvodíme, že

$$2U_{n+1,y} = 0 \Rightarrow U_{n+1,y} = 0.$$

Odpor na jednom dílku na ose x nebo na ose y označíme jako ρ . Máme, že

$$I_{n,y} = \frac{U_{n,y}}{\rho} = 0.$$

Vidíme, že svislou osou skutečně nepoteče proud a nemusíme ji tak započítat do obvodu.

Odpor na jedné polovině n -tého okruží označíme $\tilde{R}_n$. Z pravidel pro sčítání odporů sestavme rekurentní vztah. Označíme-li odpor celé pavučiny R_N , pak odpor pavučiny o $N - 1$ obručích označíme odporem R_{N-1} . Odpor R_N tak reprezentuje odpor obvodu, který se skládá ze tří paralelních linií. Na dvou z nich sedí odpory $\tilde{R}_N$ a na třetí máme odpor $2\rho + R_{N-1}$. Dostáváme tedy rekurentní vztah

$$\frac{1}{R_N} = \frac{2}{\tilde{R}_N} + \frac{1}{2\rho + R_{N-1}} \Rightarrow R_N = \frac{1}{\frac{2}{\tilde{R}_N} + \frac{1}{2\rho + R_{N-1}}}. \quad (3)$$

Tento vztah tak můžeme iterovat až se dostaneme na odpor R_1 , který je pak vyjádřen jako

$$R_N = \frac{1}{\frac{2}{\tilde{R}_N} + \frac{1}{2\rho + \frac{1}{\frac{2}{\tilde{R}_{N-1}} + \frac{1}{2\rho + \dots \frac{1}{2\rho + R_1}}}}}. \quad (4)$$

Nyní vyjádříme odpory ρ , $\tilde{R}_n$ a R_1 . Odpor ρ je úměrný N -tině poloměru r . Dostáváme vztah

$$\rho = \lambda \frac{r}{N}. \quad (5)$$

Dále máme odpor $\tilde{R}_n$. Ten je úměrný délce jednoho půlobloubku, tedy

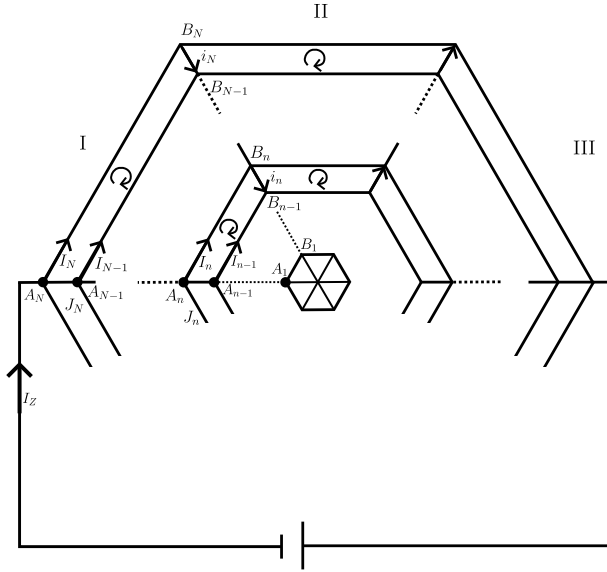
$$\tilde{R}_n = \lambda \pi r_n = \lambda \pi \frac{r}{N} n. \quad (6)$$

Teď spočítáme odpor R_1

$$\frac{1}{R_1} = \frac{2}{\tilde{R}_1} + \frac{1}{2\rho} \Rightarrow R_1 = \frac{1}{\frac{2}{\tilde{R}_1} + \frac{1}{2\rho}} \Rightarrow R_1 = \frac{1}{\frac{2N}{\lambda \pi r} + \frac{N}{2\lambda r}}. \quad (7)$$

Dosaďme vztahy (5), (6) a (7) do vztahu (4) a tak dostaneme náš výsledek

$$R_N = \frac{1}{\frac{2}{\lambda \pi r} + \frac{1}{\frac{2\lambda r}{N} + \frac{1}{\frac{2N}{\lambda \pi r(N-1)} + \frac{1}{\frac{2\lambda r}{N} + \dots \frac{1}{\frac{2\lambda r}{N} + \frac{2N}{\lambda \pi r} + \frac{N}{2\lambda r}}}}}}}. \quad (8)$$



Bonus

Bohužel na rozdíl od minulého případu se nám situace nezjednoduší natolik, aby byla rozumně vyřešitelná, budeme tedy muset postupovat numericky. Jinými slovy sestavíme pomocí Kirchhoffových zákonů soustavu rovnic, kterou budeme řešit pomocí nějakého počítačového solveru.

Opět uijíme symetrie. Pavučina je symetrická podél osy, na kterou jsme zapojili zdroj. Nyní místo jedné příčné osy máme dvě osy, které s osou, na které je zdroj svírají 60° . Nyní zavedme značení. Příčky dělí horní část pavučiny do tří sektorů. Zleva doprava je pojmenujme jako I, II, III. Proud tekoucí na n -té obruči v sektoru I pak označíme jako I_{nI} a proud, který teče po té stejné obruči v sektoru III, označíme I_{nIII} . Dále pojmenujme proudy, které tečou po příčkách. Proud, který teče po vodorovné příčce mezi n a $n-1$ obručemi v sektorech I a III, po řadě pojmenujme J_{nI} a J_{nIII} . Pavučinu BÚNO zapojíme podél příčky, kterou nazveme vodorovnou. Pokud do středu pavučiny umístíme souřadný systém, pak příčku, která dělí v levém horním kvadrantu I. a II. sektor, označíme jako příčku I a příčku, která v pravém horním kvadrantu dělí sektor II a III, označíme jako III. Pak proud, který protéká mezi n a $n-1$ obručemi označíme jako i_n . Obdobně proud, který mezi těmi samými obručemi proudí označíme jako i_{nIII} . Ještě označíme odpory. Odpor, který je na libovolné ze tří příček protínající pavučinové soukruží mezi n a $n-1$ příčkou pojmenujeme jako ρ , vzorec pro jeho výpočet je totožný s (5). Připomeňme, že

$$\rho = \lambda \frac{r}{N}.$$

Příčky dělí obruč na šestiny. Odpor na jedné šestině n -té obruče označíme jako $\tilde{R}_n$. Je dán jako

$$\tilde{R}_n = \lambda \frac{1}{6} 2\pi r_n = \frac{\pi}{3} \lambda \frac{r}{N} n. \quad (9)$$

Celá pavučina je symetrická podle vodorovné osy procházející středem, tedy proudy, které prochází horní částí budou symetrické s proudy, které prochází dolní částí, neboť neexistuje

žádný důvod, proč by tomu mělo být jinak. Z celé pavučiny musí vycházet stejně velký proud jako do ní vchází. Zdrojový proud označme I_z . Protože pavučina je symetrická podél svislé osy procházející středem, musí platit, že vytékající proudy v jednotlivých obručích musí nabývat stejné velikosti. Tedy bude platit, že

$$I_{nI} = I_{nIII} \equiv I_n J_{nI} = J_{nIII} \equiv J_n .$$

Protože se dvojice proudů rovnají, pojmenovali jsme je jedním znakem.

Nyní vezměme libovolná dvě oka v sektorech I a III a napišme rovnice druhého Kirchhoffova zákona. Tedy

$$\tilde{R}_n I_n + \rho i_{nI} - \tilde{R}_n I_{(n-1)} - \rho J_n = 0 , \quad (10)$$

$$\tilde{R}_n I_n - \rho i_{nIII} - \tilde{R}_n I_{(n-1)} - \rho J_n = 0 . \quad (11)$$

Odečtením vztahů (10) a (11) dostaneme

$$i_{nI} = -i_{nIII} .$$

Vidíme, že proudy tekoucí v šikmých příčkách mají stejnou velikost, ale opačný směr.

Přejdeme k sestavování rovnic. Body, kde se vodorovná osa protíná s obručemi, pojmenujme od středu (samotný střed nepojmenováváme) po okraje jako $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots, A_N$. Průsečky osy I s obručemi pojmenujme od středu (opět bez středu) po okraje jako $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots, B_N$. Protože situace je symetrická podle vodorovné i svislé osy, jsou informace nutné k vyřešení úlohy obsaženy v jediné čtvrtině pavučiny. Tedy třeba BÚNO v levém horním kvadrantu, ve kterém jsme nyní definovali body. Můžeme sestavit rovnice, které budou platit pro libovolné n . Ovšem budeme muset rozlišit speciální případy $n = 1$ a $n = N$. Příklad $n = 1$ musíme rozlišit, neboť oka v obruči $n = 1$ jsou jsou obepínané 3, a ne 4 dráty, jako tomu je u ostatních ok kromě prvního. Situaci $n = N$ zase musíme vyčlenit, neboť do těchto ok nepřitékají žádné proudy i_{N+1} , čímž se liší od ostatních ok.

Sestavme Kirchhoffovy zákony pro $n = 1$. Máme, že

$$I : \tilde{R}_1 I_1 + \rho i_1 - \rho J_1 = 0 ,$$

$$II : \tilde{R}_1 I_{1II} - 2\rho i_1 = 0 ,$$

$$A_1 : J_2 = 2I_1 + J_1 \Rightarrow 2I_1 + J_1 - J_2 = 0 ,$$

$$B_1 : I_1 + i_2 = i_1 + I_{1II} \Rightarrow I_1 + i_2 - i_1 - I_{1II} = 0 .$$

Nyní sestavme rovnice pro $n \in \{2, \dots, N-1\}$.

$$I : \tilde{R}_n I_n + \rho i_n - \tilde{R}_{n-1} I_{n-1} - \rho J_n = 0 ,$$

$$II : \tilde{R}_n I_{nII} - 2\rho i_n - \tilde{R}_{n-1} I_{(n-1)II} = 0 ,$$

$$A_n : J_{n+1} = 2I_n + J_n \Rightarrow 2I_n + J_n - J_{n+1} = 0 ,$$

$$B_n : I_n + i_{n+1} = i_n + I_{nII} \Rightarrow I_n + i_{n+1} - i_n - I_{nII} = 0 .$$

Zbývá už jenom dořešit případ $n = N$,

$$I : \tilde{R}_N I_N + \rho i_N - \tilde{R}_{N-1} I_{N-1} - \rho J_N = 0 ,$$

$$II : \tilde{R}_N I_{NII} - 2\rho i_N - \tilde{R}_{N-1} I_{(N-1)II} = 0 ,$$

$$A_N : I_Z = 2I_N + J_N ,$$

$$B_N : I_N = I_{NII} + i_N \Rightarrow I_{NII} + i_N - I_N = 0 .$$

Nyní můžeme maticově sepsat soustavu, kterou budeme řešit,

$$\begin{pmatrix} -\rho & \rho & \bar{R}_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\rho & 0 & \bar{R}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \bar{R}_{n-1} & 0 & -\rho & \rho & \bar{R}_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\bar{R}_{n-1} & 0 & -2\rho & 0 & \bar{R}_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\bar{R}_{N-1} & 0 & -\rho & \rho & \bar{R}_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\bar{R}_{N-1} & 0 & -2\rho & \bar{R}_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ i_1 \\ I_1 \\ I_{11} \\ J_2 \\ i_2 \\ \vdots \\ I_{n-1} \\ I_{(n-1)11} \\ J_n \\ i_n \\ I_n \\ I_{n11} \\ J_{n+1} \\ i_{n+1} \\ \vdots \\ I_{N-1} \\ I_{(N-1)11} \\ J_N \\ i_N \\ I_N \\ J_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Přestože by se tato roztomilá soustava dala jakožto jednoduché cvičení z lineární algebry řešit třeba Gaussovou eliminací, asi se všichni shodneme, že řešit ji počítačově bude lepší. Kupříkladu by se daly užít programy jako python, C++, matlab, Wolfram mathematica. Struktura programu nemusí být nikterak složitá, neboť soustava rovnic je díky své repetitivní struktuře kromě případů $n = 1$ a $n = N$, které musejí být rozebrány zvlášť, řešitelná pomocí cyklu for. Když nám počítač vyhodí všechny nutné hodnoty, můžeme odpor pro libovolně zadané I_z spočítat jako podíl celkového napětí a proudu I_z . Celkové napětí je dáno jako součet napětí po libovolně zvolené cestě pavučinou. Můžeme si tedy například vybrat tu nejjednodušší, a to přímou, cestu po vodorovné příčce. Odpor této pavučiny můžeme tedy spočítat jako

$$R_N = \frac{2\rho \sum_{i=1}^N J_i}{I_z}.$$

Jaromír Potůček

jaromir.potucek@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastrešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.