

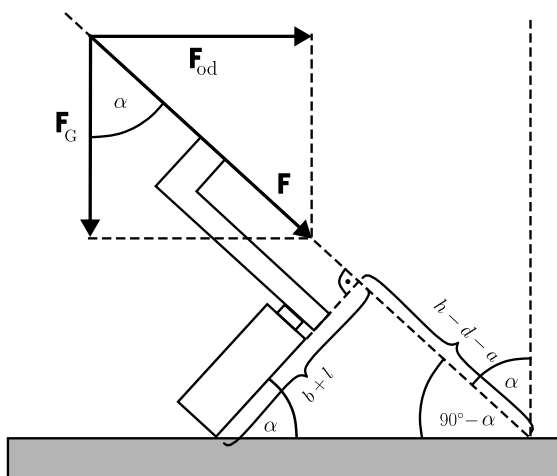
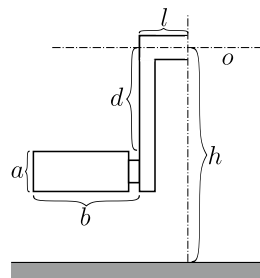
Úloha I.2 ... turbocyklista

3 body

Jakou maximální rychlostí může cyklista projet levotočivou zatáčku o poloměru $r = 7,5\text{ m}$, aby se kvádrovým pedálem nedotkl země? Cyklista a kolo váží dohromady $m = 80\text{ kg}$, jejich společné těžiště leží v rovině symetrie kola. Klika levého pedálu je po celou dobu jízdy v dolní poloze; samotný pedál není pootočen ani dopředu, ani dozadu, jeho poloha vůči klice tedy setrvává ve stejné pozici jako na přiloženém obrázku. Pedál je vysoký $a = 2,0\text{ cm}$ a široký $b = 10\text{ cm}$, rozměry kliky jsou $d = 15\text{ cm}$ a $l = 6,5\text{ cm}$, vizte obrázek. Když je kolo ve svislé poloze, vodorovná osa otáčení kliky kolem rámu o je ve výšce $h = 30\text{ cm}$ nad zemí. Svislá čerchovaná čára naznačuje svislou symetrii kola, v níž se nachází těžiště, délku l tedy měříme od prostředku středového složení. Tření považujte za dostatečné, aby kolo nepodklouzlo.

Terka přemýšlela, jestli se (zase) skoro zabije na kole.

Základem řešení úlohy je správný náčrt. Označme α maximální uhol, o který sa môže cyklista vychýliť zo zvislej polohy tak, aby ešte pedálom neškrtnal o cestu. Stav pedálu v tejto situácii je zobrazený na obrázku 1.



Obrázek 1: Náčrt pozície pedála a síl pôsobiacich na cyklistu s bicyklom v kritickej situácii.

Je zřejmé, že ak dôjde ku kontaktu so zemou, tak práve na krajnej spodnej hrane pedálu (na obrázku v zadaní je to ľavý dolný roh pedálu). Ako však vyplýva z náčrtu, maximálny uhol náklonu α možno určiť práve z polohy tejto hrany. Môžeme si všimnúť pravouhlý trojuholník, ktorého prepona splýva s povrchom cesty, a ktorého odvesny sú dané rovinou súmernosti bicykla (na obrázku v zadaní v podobe zvislej osi) a rovinou, ktorá je daná spodnou plochou pedálu (pomyselné predĺženie dlhšej spodnej hrany pedálu).

Dĺžku prvej odvesny určíme z obrázku zo zadania jednoducho ako „výšku spodnej hrany pedála nad zemou“, z čoho jednoduchým odčítaním dĺžok dostávame hodnotu $h - d - a$. Druhá odvesna na obrázku v zadaní predstavuje vodorovnú vzdialenosť okraja pedála od roviny

súmernosti, a opäť len sčítaním dostávame dĺžku $b + l$. Pre tangens uhla α potom z definície platí

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h - d - a}{b + l}. \quad (1)$$

Pri prejazde zákrutou na cyklistu na bicykli pôsobia dve sily: tiažová $\mathbf{F}_G$ a odstredivá $\mathbf{F}_{\text{od}}$ (uvažujeme sústavu spojenú s cestou), ktorých výslednicu označíme $\mathbf{F} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_{\text{od}}$. Tiažová sila $\mathbf{F}_G$ bude počas celého prejazdu pôsobiť nadol a jej veľkosť je daná ako

$$|\mathbf{F}_G| = F_G = mg, \quad (2)$$

kde $m = 80 \text{ kg}$ je hmotnosť cyklistu s bicyklom a $g \doteq 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ štandardné tiažové zrýchlenie. Ak uvažujeme zákrutu na rovinke, odstredivá sila $\mathbf{F}_{\text{od}}$ pôsobiaca na cyklistu bude celý čas smerovať kolmo na tiažovú silu, a zároveň kolmo na smer pohybu. Veľkosť tejto sily je definovaná ako

$$|\mathbf{F}_{\text{od}}| = F_{\text{od}} = \frac{mv^2}{r} \quad (3)$$

pre rýchlosť cyklistu v a polomer trajektórie $r = 7,5 \text{ m}$ daný polomerom zákruty.

Predstavme si ďalej naklonenie cyklistu v zákrute ako jeho pootočením okolo osi, ktorá prechádza bodmi kontaktu bicykla s cestou (a teda je rovnobežná so smerom pohybu). Ak uvažujeme, že vyššie zmienené sily budú pôsobiť v ťažisku sústavy cyklistu a bicykla, ktoré na tejto osi neleží; môže na sústavu voči osi pôsobiť nenulový moment sily.

Ak by výsledný moment sily cyklistu vychyľoval v protismere hodinových ručičiek (doľava), tak by sa nielen dotkol cesty pedálom, ale v istom momente by kolesá bicykla stratili kontakt s vozovkou a došlo by k pádu. Naopak, ak by výsledný moment vychyľoval v smere hodinových ručičiek (doprava), tak by cyklista musel začať spomaľovať, inak by po istom čase „vyletel“ zo zákruty. Z toho vyplýva, že ak má cyklista prejsť zákrutu konštantnou rýchlosťou, musí byť celkový moment sily voči osi prechádzajúcej bodmi dotyku kolies s cestou nulový. Pre veľkosť momentu sily M platí

$$M = FR \sin \varphi,$$

kde F je veľkosť pôsobiacej sily, R vzdialenosť osi rotácie od pôsobiska sily (rameno sily) a φ uhol medzi vektorom pôsobiacej sily a jej ramenom. Výsledná sila vzhľadom na rôzne smery $\mathbf{F}_G$ a $\mathbf{F}_{\text{od}}$ nulová nebude, rovnako ani veľkosť ramena R , keďže pôsobisko síl leží mimo uvažovanej osi. Ostáva preto zabezpečiť nulový uhol φ , inak povedané; priamka, na ktorej leží vektor výslednice síl $\mathbf{F}$, musí prechádzať osou rotácie. V našom prípade to prakticky znamená, že $\mathbf{F}$ musí ležať v rovine symetrie bicykla tak, ako je to vyobrazené na náčrte 1.

Výslednica $\mathbf{F}$ vznikne superpozíciou síl $\mathbf{F}_G$ a $\mathbf{F}_{\text{od}}$, ktoré sú navyše na seba kolmé. Táto trojica vektorov vytvára pravouhlý trojuholník, pričom z geometrických pomerov na obrázku je zrejmé, že zvyšné uhly v trojuholníku budú α a $90^\circ - \alpha$. Pre tangens uhla α podľa obrázku 1 a rovníc (2) a (3) platí

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{\text{od}}}{F_G} = \frac{v^2}{rg}.$$

Dosadením tohto výrazu do rovnice (1) získame

$$\frac{v^2}{rg} = \frac{h - d - a}{b + l},$$

odkiaľ vyjadríme a vyčíslíme hľadanú maximálnu rýchlosť v (kladnú). Pre hodnoty parametrov $a = 2,0$ cm, $b = 10$ cm, $d = 15$ cm, $l = 6,5$ cm a $h = 30$ cm dostávame výsledok

$$v = \sqrt{rg \left(\frac{h - d - a}{b + l} \right)} \doteq 7,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 27 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

Patrik Stercz

patrik.stercz@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.