

Úloha I.1 ... vodnická

3 body

Na dně Mrtvého moře žije vodník, jenž v hrnečcích vězní dušičky lidí, kteří se zde utopili. Protože se ale lidská dušička do hrnečku nevejde, musí její objem nejprve izotermicky pětkrát zmenšit. Jednoho dne už ho tahle lokalita začala nudit, a tak si řekl, že se přestěhuje do vodní nádrže Orlík. Pokud si chce nechat své hrnečky i s obsahem, v jaké minimální hloubce musí žít, aby dušičky neodklopily hmotná víčka hrnečků a neutekly mu?

Původně žil vodník v hloubce 33 m tak, že i při nejmenším nazdvihnutí hrnečků by došlo k jejich otevření. Dušičky považujte za ideální plyn o teplotě okolní vody, v okamžiku utonutí člověka (před jejich stlačením) mají atmosférický tlak. Teplota Mrtvého moře je 23°C , teplota nádrže Orlík 6°C , hustota Mrtvého moře je $1,24\text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$, zatímco hustota vody v nádrži Orlík je $0,99\text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$. Uvažujte konstantní vlastnosti vody v celém objemu pro obě vodní plochy. Během stěhování byly hrnečky po celou dobu uzavřeny.

Terka by chtěla jet k moři na dovolenou, ze které se vrátí živá.

Na začátku vodník stlačá dušičky do hrnečkov izotermicky, a teda celý proces prebieha pri teplote Mrtvého mora $T_1 = 23^{\circ}\text{C}$. Dušičky, modelované ideálnym plynom o normálnom atmosférickom tlaku $p_0 = 101\,325\text{ Pa}$; potrebuje zmenšit *päťnásobne*, aby sa vošli do hrnečkov, a aby objem každej dušičky zodpovedal objemu hrnečka V . Pre stavy dušičky pred a po stlačení môžeme zapísať Boylov-Mariottov zákon pre izotermický dej v tvare

$$5Vp_0 = Vp_1,$$

odkiaľ určíme tlak dušičky v hrnečku p_1 ako

$$p_1 = 5p_0 \doteq 0,51\text{ MPa}.$$

Keďže aj pri najmenšom nadvihnutí hrnečkov z hĺbky $h_1 = 33\text{ m}$ v Mŕtvom mori by sa ich viečka odklopili, môžeme predpokladať, že vo výške h_1 je výslednica síl pôsobiacich na viečko nulová. Plocha prierezu viečka S je z oboch strán zrejme rovnaká, z definičného vzťahu pre tlak potom nutne plynie, že tlak na obe strany viečka je rovnako veľký.

Zvnútra na viečko pôsobí dušička vlastným tlakom p_1 , vonkajší tlak vyplýva z gravitačného pôsobenia Zeme. Prvou zložkou vonkajšieho tlaku je tlak samotného viečka p_v , ktorý vzniká v dôsledku jeho vlastnej hmotnosti m . Na viečko taktiež pôsobí okolitá voda hydrostatickým tlakom p_{h1} a v konečnom dôsledku aj atmosférický tlak p_0 . Celkovo dostávame pre Mŕtve more rovnicu

$$p_1 = p_v + p_{h1} + p_0.$$

Na viečko pôsobí tiažová sila F_G , ktorá mu udeľuje štandardné tiažové zrýchlenie $g \doteq 9,81\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Potom sila F_G pôsobí na viečko tlakom

$$p_v = \frac{F_G}{S} = \frac{mg}{S}.$$

Pre hydrostatický tlak p_{h1} kvapaliny v hĺbke h_1 platí

$$p_{h1} = \rho_1 gh_1,$$

kde $\rho_1 = 1,24\text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ je hustota kvapaliny; v tomto prípade hustota vody v Mŕtvom mori. Dosadením z rovníc (1), (3) a (4) za príslušné tlaky do rovnice (2) získavame rovnicu tvaru

$$5p_0 = \frac{mg}{S} + \rho_1 gh_1 + p_0.$$

Po presune do nádrže Orlík hľadáme pre vodníka *minimálnu* hĺbku, v ktorej sa mu hrnčeky neotvoria. To však zodpovedá situácii z Mŕtveho mora, kde rovnako žil v minimálnej možnej hĺbke. Opäť preto uvažujeme nulovú výslednicu síl pôsobiacich na viečko a pre stav v Orlíku by sme mohli napísať rovnicu analogickú rovnosti tlakov (2)

$$p_2 = p_v + p_{h2} + p_0, \quad (6)$$

kde p_2 je tlak dušičky v hrnčeku v Orlíku a p_{h2} je hydrostatický tlak v hľadanej hĺbke h_2 v tejto nádrži. Atmosférický tlak p_0 a „vlastný tlak“ viečka p_v sa pri presune nezmenia. V Orlíku je však chladnejšia voda, o teplote len $T_2 = 6^\circ\text{C}$. Objem hrnčeka V sa nezmení, dôjde teda k izochorickému ochladeniu, v dôsledku čoho sa zmení tlak na hodnotu p_2 . Tú určíme z Charlesovho zákona pre izochorický dej ako

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \Rightarrow p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} = 5p_0 \frac{T_2}{T_1}.$$

Nakoniec určíme hydrostatický tlak p_{h2} v hĺbke h_2 v Orlíku analogicky ako v rovnici (4)

$$p_{h2} = \rho_2 g h_2$$

pre hustotu vody v nádrži $\rho_2 = 0,99 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$. Spätným dosadením odvodených výrazov do druhej rovnosti tlakov (6) získame rovnicu

$$5p_0 \frac{T_2}{T_1} = \frac{mg}{S} + \rho_2 g h_2 + p_0. \quad (7)$$

Ostáva vyriešiť sústavu rovníc (5) a (7). Na prvý pohľad však obsahuje 3 neznáme: hmotnosť viečka m , plochu jeho prierezu S a hľadanú minimálnu hĺbku h_2 pre nádrž Orlík. Keďže potrebujeme určiť len poslednú z nich, môžeme k celému výrazu $p_v = mg/S$ pristupovať ako k jednej neznámej, čím už dostávame sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych, ktorá bude mať práve jedno riešenie. Vyjadríme teda zlomok mg/S z rovnice (5) ako

$$\frac{mg}{S} = 4p_0 - \rho_1 g h_1$$

a získaný výraz dosadíme do rovnice (7), vďaka čomu ostáva vyriešiť rovnicu

$$5p_0 \frac{T_2}{T_1} = 4p_0 - \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 + p_0.$$

Na záver už len vyjadríme a vyčíslime hĺbku h_2 , v ktorej sa má vodník usadiť, ako

$$h_2 = \frac{1}{\rho_2 g} \left(5p_0 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) + \rho_1 g h_1 \right) \doteq 38 \text{ m}.$$

Ešte dodáme, že pri vyčíslení je dôležité nezabudnúť použiť absolútnu (termodynamickú) teplotu namiesto tej v stupňoch Celsia. Pre zjednodušenie boli pre obe lokality uvažované rovnaké hodnoty tiažového zrýchlenia g a atmosférického tlaku p_0 .

Erratum – komentár k chybe v pôvodnom zadaní

Na webe sa zadanie prvýkrát objavilo s hodnotou hĺbky vodníkových hrnčekov v Mŕtvom mori $h_1 = 50$ m. Napriek tomu, že rovnakým postupom sa dalo dospieť k výsledku (približne 60 m), nebolo takéto zadanie fyzikálne správne. Pozorní riešitelia si po spätnom dosadení hodnôt mohli všimnúť, že zlomok mg/S vychádzal záporný.

Za chybu a prípadné zmätenie sa ospravedlňujeme. Zmena parametra v zadaní je zohľadnená pri opravovaní riešení. Zároveň by sme radi poďakovali pozorným riešiteľom, ktorí si túto chybu všimli a upozornili nás na ňu.

Patrik Stercz

patrik.stercz@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.