

Úloha VI.E ... padající předmět

12 bodů; průměr 9,10; řešilo 42 studentů

Změřte závislost dráhy a rychlosti na čase pro volný pád. Použijte lehký symetrický předmět (ideálně pingpongový míček) a pouštějte jej z výšky minimálně 5 metrů tak, aby se ve vašem měření projevila vliv odporu vzduchu. Naměřené závislosti porovnejte s vhodným teoretickým modelem.

Nápověda: Pád natočte na video, které zpracujete pomocí vhodného programu, např. Tracker. Jarda si představoval, jaké by to bylo skočit z okna koleje.

Teorie

Cílem úlohy je pozorovat vliv odporu vzduchu při volném pádu předmětu z počáteční výšky H_0 . Nevystačíme si tedy s rovnicemi

$$s = \frac{1}{2}gt^2, \\ v = gt,$$

kteří popisují závislosti uražené dráhy s a rychlosti v na čase od vypuštění t , a platí pro pohyb s konstantním zrychlením g způsobeném tíhovým polem v místě pádu. V našem případě totiž musíme započítat kromě tíhové síly F_g i vliv odporové síly F_o , která působí proti směru pohybu. Pohybová rovnice daná druhým Newtonovým zákonem je tak

$$ma = F_g - F_o = mg - F_o,$$

kde m je hmotnost tělesa a a jeho zrychlení směrem dolů. Náš teoretický model pohybu založme na odporové síle ve tvaru

$$F_o = \frac{1}{2}CS\rho v^2,$$

kde C je činitel odporu, S je plocha příčného průřezu tělesa, ρ je hustota prostředí, ve kterém objekt padá, a v jeho okamžitá rychlost. V našem případě pouštíme pingpongový míček, který má tvar koule o poloměru $r = 2,0$ cm. To odpovídá hodnotě činitele odporu $C \doteq 0,5$ a ploše průřezu $S = \pi r^2 \doteq 0,00126$ m². Hmotnost pingpongového míčku je $m = 2,7$ g. Toto těleso jsme zvolili pro jeho dobře definované vlastnosti, jejichž hodnoty jsou garantovány výrobcem, a symetrický tvar. Pouštíme jej ve vzduchu o teplotě 15 °C, což odpovídá hustotě $\rho = 1,23$ kg·m⁻³ podle Wikipedie.¹

Pohybová rovnice pro pingpongový míček je tedy

$$ma = mg - \frac{1}{2}CS\rho v^2 = mg - kv^2.$$

Její řešení pomocí diferenciálního počtu je uvedeno např. na stránkách Fyzikální olympiády². Závislosti rychlosti na době od vypuštění je

$$v(t) = \sqrt{\frac{gm}{k}} \operatorname{tgh}\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}t\right)$$

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Density_of_air

²<http://fyzikalniolympiada.cz/texty/odpor.pdf>

a uražené dráhy

$$s(t) = \frac{m}{k} \ln \left(\cosh \left(\sqrt{\frac{gk}{m}} t \right) \right).$$

Experimentální uspořádání a zpracování dat

Jak jsme uvedli v předchozí části, jako padající předmět jsme zvolili pingpongový míček o hmotnosti $m \doteq 2,7 \text{ g}$ a poloměru $r \doteq 2,0 \text{ cm}$. Pouštěli jsme jej ve vzduchu o teplotě 15°C , což odpovídá hustotě $\rho \doteq 1,23 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Vypouštěcí místo bylo zvoleno jako zábradlí balkonu rodinného domu ve výšce $H = 7 \text{ m}$. Pád byl opakován pětkrát pro statistické vyhodnocení. Dráha míčku byla natáčena digitálním fotoaparátem v rozlišení 4K s frekvencí snímku $f = 100 \text{ fps}$, odpovídající času mezi jednotlivými zaznamenanými polohami $T = 0,01 \text{ s}$. Fotoaparát byl umístěn ve vzdálenosti 10 m od paty domu na stativu ve výšce 140 cm. Na snímku byl rovněž umístěn rozložený skládací metr o délce 2,00 m, který sloužil jako kalibrace pro převod ze souřadnic na snímku do skutečné vzdálenosti.

Záznamy pádů byly zpracovány v programu *Tracker*. Zde je možné program „naučit“ rozpoznávat předmět, jehož poloha se mění mezi jednotlivými snímky. Program sám spočítá aktuální polohu předmětu na daném snímku videa. Pomocí skládacího metru byla zavedena kalibrace, takže výsledná vzdálenost daná programem již byla přepočítána na reálnou, kterou předmět skutečně urazil. Naměřené závislosti byly exportovány do textového souboru.

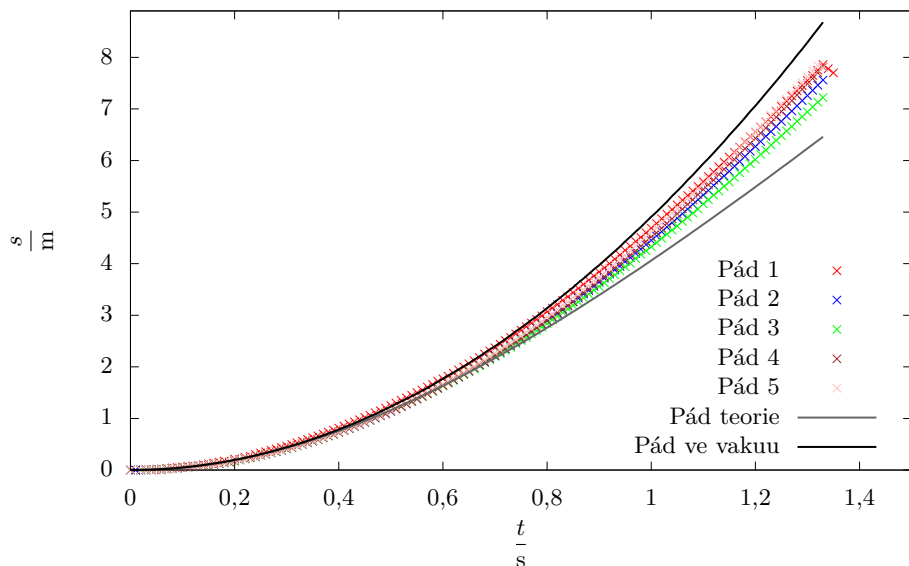
K dalšímu zpracování byl použit programovací jazyk *Python*. Rychlost v závislosti na čase byla určena pomocí funkce `numpy.gradient()`, která spočítá derivaci. Toto je velmi výhodné, protože samotnou rychlost jsme neměřili, pouze dráhu v závislosti na čase. Protože je ale rychlost derivace dráhy podle času, můžeme ji pomocí této funkce získat.

Výsledky by mohly výrazně záviset na určení snímku, na kterém došlo k puštění míčku. Ten se totiž na začátku pohybuje velmi pomalu, takže se nachází na přibližně stejné pozici. V tomto případě nám pro zpracování pomůže právě výše zmíněná závislost rychlosti na čase. Na začátku je rychlost nulová, dokud míček držíme v ruce. Jakmile však už padá, roste rychlost přibližně lineárně s časem, protože odporová síla závislejší na rychlosti je ještě malá. Počáteční dobu pádu tedy můžeme proložit přímkou, která symbolizuje volný pád bez odporových sil. Tam, kde se tato přímka protíná s nulovou rychlostí, došlo k vypuštění míčku. Od tohoto okamžiku tedy budeme pracovat se všemi daty.

Výsledky a diskuze

Zobrazme závislost dráhy na čase od vypuštění pro všechny pokusy (graf 1) a porovnejme ji s dráhou, kterou by míček urazil ve vakuu („Pád ve vakuu“), a s dráhou, kterou urazí podle našeho teoretického modelu („Pád teorie“). Vidíme, že uražená vzdálenost je pro libovolný čas menší než ve vakuu a že míček je opravdu brzděn. Toto zpoždění je tím větší, čím déle míček padá, více se projevuje vliv odporové síly.

Pro porovnání s naším modelem zobrazíme také závislost rychlosti na čase v grafu 2, kromě modelu se zanedbáním odporu vzduchu („Pád ve vakuu“) znovu vykreslíme také funkci, která odporovou sílu bere v potaz („Pád teorie“). Vidíme, že datové body rychlosti jsou více zašuměné, což je dáno tím, že jsme provedli numerickou derivaci, která šum naměřených dat zvýrazňuje. Je ale evidentní, že rychlost neroste lineárně s časem, jak by tomu bylo při pádu ve vakuu, ale



Obrázek 1: Závislost uražené dráhy na čase pro různé pokusy. Uražená dráha je vždy menší pro pohyb míčku ve vzduchu než při volném pádu ve vakuu.

je vždy nižší a vypadá to, že se její hodnota trochu saturuje, tedy konverguje ke konstantní hodnotě.

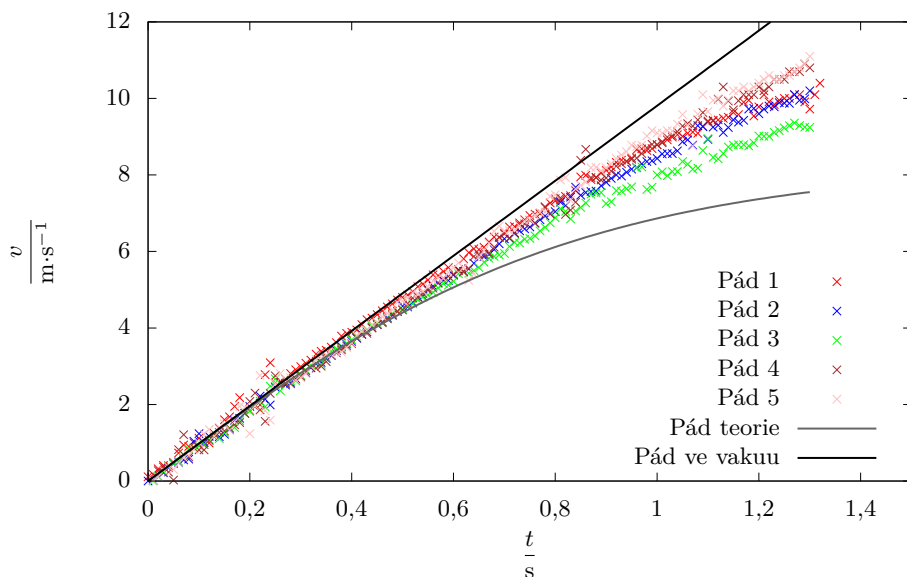
Na druhou stranu, funkce rychlosti („Pád teorie“) podle naší teorie a hodnot uvedených v předchozí sekci udává rychlost nižší, než jsou naše naměřené hodnoty. Musíme proto konstatovat, že se naše data neshodují s teoretickým modelem. Podobný efekt je pak samozřejmě vidět i v závislosti dráhy na čase. Vysvětlení může být několik. Systematické chyby jsme se dopustili tím, že jsme nekorigovali efekt trojrozměrného prostoru zaznamenaného na čip fotoaparátu. Reálná uražená vzdálenost v okolí místa vypuštění je jiná než v místě dopadu, ačkoli na záznamu může být stejná. Je to dáno úhlem, pod kterým jsme trajektorii pádu pozorovali. Naměřená data tak nemusí přesně odpovídat realitě.

Dále jsme opravdu nemuseli použít správný fyzikální model. Použití odporové síly

$$F_o = \frac{1}{2}CS\rho v^2,$$

je omezeno pro turbulentní obtékání tělesa tekutinou. Jako podmínka pro tento režim obtékání se typicky uvádí hodnota *Reynoldsova čísla* $R = vr/\nu > 1000$, kde ν je kinematická viskozita tekutiny. Toto číslo je úměrné v , ta je ale na začátku nulová a poté malá, takže tento režim ještě nenastává. Minimálně v počáteční fázi patrně není odporová síla úměrná druhé mocnině rychlosti, což vede na celkovou odchylku od předpokládané funkce.

Jistou roli také mohl hrát vítr, který trochu posouval míček v průběhu letu. Jeho směr nemusel být striktně rovnoběžný se zemí, ale mohl ovlivňovat pohyb i ve vertikálním směru.



Obrázek 2: Závislost rychlosti na čase pro různé pokusy. Rychlost je vždy menší pro pohyb míčku ve vzduchu než při volném pádu ve vakuu.

I přesto, že se náš model s naměřenými daty neshoduje kvantitativně, vidíme dobrou kvalitativní podobnost. Na začátku pro krátké časy t je růst rychlosti lineární s konstantou úměrnosti g , jak je vidět díky shodě experimentálních dat s funkcí „Pád ve vakuu“. To odpovídá zanedbatelné odporové síle. Při delších časech, přibližně pro $t > 0,5$ s, je již rychlost nižší než při pádu ve vakuu. Tento rozdíl se s rostoucím časem zvětšuje.

Závěr

Naměřili jsme volný pád lehkého symetrického předmětu – pingpongového míčku – ve vzduchu. Porovnali jsme naměřené závislosti uražené dráhy na čase s pádem ve vakuu, kde nejsou odporové síly, přičemž uražená dráha byla vždy kratší při pádu ve vzduchu. Pro porovnání s teoretickým modelem, který uvažoval kvadratickou závislost odporové síly na rychlosti, jsme vynesli rychlost jako funkci času.

Naše data vykazovala kvalitativní shodu s teoretickým modelem – při malých rychlostech rostla rychlost s časem lineárně, postupně ale bylo zrychlení nižší, což odpovídá odporové síle rostoucí s rychlostí. Vliv odporu vzduchu jsme tedy pozorovali. Kvantitativní shodu s teoretickým modelem jsme ovšem nenaměřili, což může být způsobeno nevhodným popisem či systematickou chybou měření.

Jaroslav Herman

jardah@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.