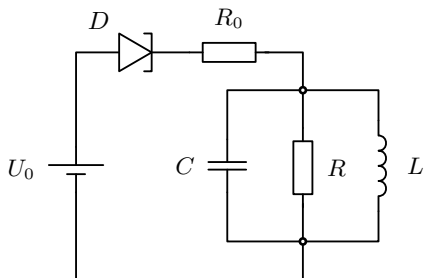


Úloha VI.5 ... DC-RLC

9 bodů; (chybí statistiky)

Věřte, nevěřte, existují i takové součástky, u kterých se může za určitých podmínek se zvyšováním napětí snižovat proud. Uvažujme diodu, u které se na intervalu napětí mezi $U_1 < U_2$ snižuje lineárně proud z I_1 na I_2 (všechny hodnoty kladné a $I_1 > I_2$). Takovou diodu zapojíme do série s rezistorem o odporu R_0 a paralelně zapojeným RLC obvodem (rezistor R , kondenzátor C a cívka L). K tomuto obvodu připojíme zdroj stejnosměrného napětí U_0 . Určete, jaký proud bude protékat obvodem. Při malém vychýlení z tohoto stavu však pozorujeme v obvodu harmonické kmity. Jaké musí být splněny podmínky a jaká je frekvence těchto kmitů? Uvažujte, že napětí a proudy na diodě jsou po celou dobu ve výše stanovených intervalech.



Podle zadání se máme nejprve zaměřit na stav, kdy nic nekmitá. V paralelní části obvodu teče proud přes cívku, která nemá odpor. Ve zbytku obvodu platí

$$U_0 = R_0 I + U_D,$$

kde proud $I = I_D$ v obvodu a napětí na diodě U_D jsou svázány vztahem, který nám udává lineární závislost ve voltampérové charakteristice diody, vizte Obrázek 1,

$$I_D = I_1 - k(U_D - U_1),$$

kde $k = (I_1 - I_2)/(U_2 - U_1)$. Dosazením za U_D do první rovnice dostaneme

$$U_0 = R_0 I + \frac{I_1 - I}{k} + U_1,$$

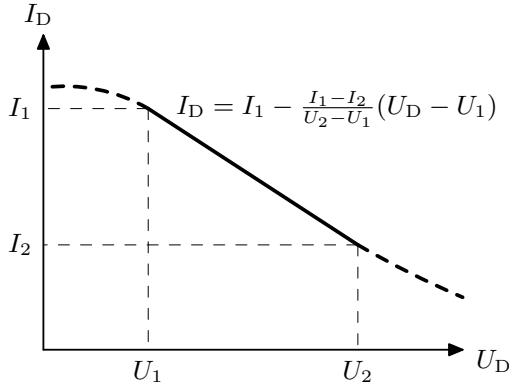
odkud můžeme vyjádřit proud I jako

$$I = \frac{U_0 - U_1 - \frac{I_1}{k}}{R_0 - \frac{1}{k}}.$$

Hodnoty U_0 a R_0 musí být nastavené tak, aby $I_2 < I < I_1$. Přesnými podmínkami se nebudeme zabývat, protože je podle zadání obvod splňuje.

Jakmile se obvod rozkmitá, je situace složitější. Základní myšlenka je taková, že když na diodě snížíme napětí, zvýšíme proud, čímž se zvýší napětí na rezistorech, takže se opět sníží napětí na diodě. Situace by tak byla nestabilní a hodnoty by se ustálily v bodě, kde by směrnice voltampérové charakteristiky diody nebyla záporná. Indukčnost cívky a kapacita kondenzátoru se však při změně proudu projeví natolik, že v obvodu vznikne harmonické kmitání – jak uvidíme z následujících výpočtů.

Nejdříve sestavíme rovnice, které budou popisovat časové závislosti napětí a proudu, poté zkusíme uhodnout jejich řešení a budeme hledat podmínky, pro které je toto řešení platné. Proud v rezistoru R_0 , diodě a zdroji U_0 označme jako I . V paralelní části se tento proud rozdělí na tři části podle větve, kterou protéká. Napětí zdroje U_0 se naopak rozdělí na součet napětí



Obrázek 1: Voltampérová charakteristika diody v oblasti lineární části.

paralelní části, napětí na rezistoru $R_0 I$ a napětí na diodě, které označme U_D . V paralelní části je na všech součástkách stejné napětí rovno

$$U_p = U_0 - R_0 I - U_D.$$

Rezistorem tak protéká proud $I_R = U_p / R$. Pro kondenzátor obecně platí vztah mezi nábojem Q_C , jeho kapacitou C a napětí na něm U_C jako $Q_C = C U_C$. Pokud tento výraz zderivujeme podle času, dostaneme rovnici

$$I_C = \frac{dQ_C}{dt} = C \frac{dU_C}{dt},$$

v závislosti na napětí získáme proud, který kondenzátorem protéká. Posledním prvkem v paralelní části je cívka, pro kterou platí vztah

$$U_L = -L \frac{dI_L}{dt},$$

kde U_L je napětí na cívce a I_L je proud v ní. Nakonec evidentně platí $I = I_C + I_R + I_L$, protože proud na rozdělení mezi částmi nevzniká a ani se nikde neztrácí. Tuto rovnici ale také můžeme zderivovat a za jednotlivé části dosadit z předchozích částí. Začneme zápisem

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d(I_C + I_L + I_R)}{dt} = \frac{dI_C}{dt} + \frac{dI_R}{dt} + \frac{dI_L}{dt}.$$

Nyní pojďme dosadit za jednotlivé derivace z předchozích rovnic. Ty v případě kondenzátoru a cívky také musíme zderivovat podle času. Dostaneme

$$\frac{dI}{dt} = C \frac{d^2 U_C}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dU_R}{dt} - \frac{U_L}{L}.$$

Už dříve jsme uvedli, že v našem případě $U_C = U_R = U_L = U_p = U_0 - R_0 I - U_D$. První časová derivace tohoto vztahu je

$$\frac{dU_p}{dt} = -R_0 \frac{dI}{dt} - \frac{dU_D}{dt},$$

druhá pak

$$\frac{d^2 U_D}{dt^2} = -R_0 \frac{d^2 I}{dt^2} - \frac{d^2 U_D}{dt^2},$$

Dosaďme tedy do rovnice výše, kde dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= C \left(-R_0 \frac{d^2 I}{dt^2} - \frac{d^2 U_D}{dt^2} \right) + \frac{1}{R} \left(-R_0 \frac{dI}{dt} - \frac{dU_D}{dt} \right) - \frac{U_0 - R_0 I - U_D}{L} \\ &= -R_0 C \frac{d^2 I}{dt^2} - \frac{R_0}{R} \frac{dI}{dt} - \frac{1}{R} \frac{dU_D}{dt} - C \frac{d^2 U_D}{dt^2} - \frac{U_0}{L} + \frac{R_0}{L} I + \frac{U_D}{L}. \end{aligned}$$

Nyní podle zadání uvažujme, že v obvodu pozorujeme harmonické kmity. Necht tedy můžeme napětí na diodě popsat jako

$$U_D = U_s + A \sin \omega t,$$

kde A je amplituda kmitů s úhlovou frekvencí ω superponovaná na napětí U_s . Proud se v oblasti, kterou uvažujeme, mění lineárně s napětím na diodě, takže jej můžeme popsat jako

$$I = I_1 - k(U_D - U_1) = I_1 - kU_s - Ak \sin \omega t + kU_1 = I_s - Ak \sin \omega t,$$

kde jsme označili $I_1 - kU_s + kU_1$ jako I_s . Vidíme tedy, že kde je napětí na diodě maximální, je proud minimální a naopak.

Tyto vztahy pro U_D a I zkusíme dosadit do připravené rovnice pro $\frac{dI}{dt}$. Prvně vyjádříme obě časové derivace

$$\begin{aligned} \frac{dU_D}{dt} &= A \omega \cos \omega t, \quad \frac{dI}{dt} = -kA \omega \cos \omega t, \\ \frac{d^2 U_D}{dt^2} &= -A \omega^2 \sin \omega t, \quad \frac{d^2 I}{dt^2} = kA \omega^2 \sin \omega t. \end{aligned}$$

Nyní již tedy dosadíme za napětí, proud a jejich derivace a dostáváme po přeskupení členů

$$\begin{aligned} -kA \omega \cos \omega t &= -R_0 C k A \omega^2 \sin \omega t + \frac{R_0}{R} k A \omega \cos \omega t - \frac{1}{R} A \omega \cos \omega t \\ &+ C A \omega^2 \sin \omega t - \frac{U_0}{L} + \frac{R_0}{L} I_s - \frac{R_0}{L} A k \sin \omega t + \frac{1}{L} U_s + \frac{1}{L} A \sin \omega t. \end{aligned}$$

Tato rovnice musí platit v každém čase, musí se proto na obou stranách rovnat absolutní členy, členy vynásobené sinem i kosinem. Dostáváme tak tři rovnice

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{U_0}{L} + \frac{R_0}{L} I_s + \frac{1}{L} U_s \\ 0 &= -R_0 C k A \omega^2 \sin \omega t + C A \omega^2 \sin \omega t - \frac{R_0}{L} A k \sin \omega t + \frac{1}{L} A \sin \omega t \\ -kA \omega \cos \omega t &= \frac{R_0}{R} k A \omega \cos \omega t - \frac{1}{R} A \omega \cos \omega t. \end{aligned}$$

Z první rovnice vidíme podmínku vypočítanou v první části pro stejnosměrný chod obvodu. Z druhé rovnice po vykrácení $A \sin \omega t$, vynásobení L a pokrácení $(1 - R_0 k)$ získáváme

$$0 = -R_0 C L k \omega^2 + C L \omega^2 - R_0 k + 1 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{1}{LC},$$

tedy podmínku na frekvenci střídavých kmitů. Tento výsledek není úplně neočekávatelný, je to známý vztah pro frekvenci vyvolanou standardním LC obvodem. Ze třetí rovnice pak analogicky dostáváme

$$1 = (R_0 + R)k,$$

je tedy zřejmé, že aby harmonické kmity v obvodu mohly vzniknout, je zapotřebí specifická volba rezistorů v závislosti na vlastnostech diody dané hodnotou k . Také vidíme, že kdyby na diodě ve zkoumaných částech její voltampérové charakteristiky proud s rostoucím napětím rostl (tedy k by bylo podle naší definice záporné), byly by pro generování harmonických kmitů potřeba záporné odpory.

Frekvence kmitání

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

tak nezávisí na hodnotách odporů. Na závěr ještě připomeňme hodnotu

$$k = \frac{I_1 - I_2}{U_2 - U_1},$$

ktehou jsme našli rozbořem voltampérové charakteristiky diody.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.