

Úloha VI.4 ... zásah, potopená!

7 bodů; (chybí statistiky)

V trupu ponorky o objemu V se po zásahu torpédem objevila díra o ploše S . Stihne se ponorka vynořit? Na počátku se nachází v hloubce h_0 , k hladině stoupá rychlostí v , čerpadla zvládnou odčerpávat každou sekundu objem vody V_1 a kritický objem vody v ponorce je $V_{\text{krit.}} \ll V$? Předpokládejte, že rychlost v_v , kterou voda proudí do ponorky, lze vyjádřit Torricelliho vzorcem nezávisle na množství vody v ponorce a po překročení $V_{\text{krit.}}$ začne ponorka pozvolna klesat ke dnu, dokud ji nerozdrtí tlak okolní vody. Viktor přemýšlel o tom, jaké to je být na dně.

Označme hloubku, ve které se ponorka nachází v čase t , jako h . Platí pro ni

$$h = h_0 - vt.$$

Rychlost v_v , kterou voda proudí do ponorky, můžeme spočítat pomocí Torricelliho vztahu jako

$$\frac{1}{2}\rho v_v^2 = \rho hg,$$

$$v_v = \sqrt{2hg},$$

kde ρ je hustota vody a g je tíhové zrychlení. Označme V_2 objem vody vtékající do ponorky za sekundu. Zřejmě platí

$$V_2 = v_v S,$$

$$V_2 = \sqrt{2hg}S.$$

Rychlost vody proudící do ponorky se postupně snižuje. Zpočátku tedy do ponorky vtéká více vody, než jsou čerpadla schopná odčerpávat, a objem v ponorce se zvyšuje; v určitém bodě v čase od zásahu torpédem se vtékající a odčerpávaný objem vody vyrovnají a od tohoto bodu bude objem vody v ponorce pouze klesat. Tedy alespoň pokud do té doby objem nepřekročí $V_{\text{krit.}}$. Označme čas mezi zásahem ponorky a minimální hloubkou (resp. maximální výškou ode dna), které dosáhne a ve které platí $V_1 = V_2$ jako T^1 . Je-li $V(t)$ objem vody v ponorce v čase t , je $V(T)$ jeho maximum. Z toho a z monotonie $V(t)$ na intervalu $t \in \{t; V_1 < V_2(t)\}$ diskutované výše můžeme odvodit, že ponorka se nepotopí, pokud bude platit

$$V(T) < V_{\text{krit.}}.$$

Pro čas T můžeme spočítat

$$V_1 = \sqrt{2hg}S,$$

$$V_1 = \sqrt{2g(h_0 - vT)}S,$$

$$T = \frac{h_0}{v} - \frac{1}{2vg} \left(\frac{V_1}{S} \right)^2.$$

Objem $V(T)$ pak získáme integrací jako

$$V(T) = \int_0^T \left(\sqrt{2g(h_0 - vt)}S - V_1 \right) dt.$$

¹Zde je opravdu důležité zvolit podmínku na T jako čas, ve kterém je v ponorce maximální objem vody. Pokud bychom jako podmínku na T zvolili čas vynoření ponorky a pokračovali jako dále v řešení, integrovali bychom i záporný vytékající objem a získali hodnotu nižší, než $V_{\text{krit.}}$. Vzhledem k chování popsanému v zadání by se však ponorka v průběhu potopila při „přelézání“ maxima.

Řešením integrálu je

$$V(T) = \left[-\frac{2\sqrt{2g}S}{3v} (h_0 - vt)^{\frac{3}{2}} - V_1 t \right]_0^T,$$

po dosazení integračních mezí

$$V(T) = \frac{2\sqrt{2g}S}{3v} \left[h_0^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{2g} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{V_1}{S} \right)^3 \right] - \frac{V_1}{v} \left[h_0 - \frac{1}{2g} \left(\frac{V_1}{S} \right)^2 \right].$$

Jak již bylo diskutováno na počátku, ponorka se nepotopí, je-li výraz výše menší než $V_{\text{krit.}}$.

Petr Sacher

`petr.sacher@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.