

Úloha VI.3 ... fast and FYKOS

6 bodů; (chybí statistiky)

Auto v akčním filmu jede po silnici rychlostí v_0 . Před ním jede kamion rychlostí $v_k < v_0$, který má otevřený nákladový prostor připravený na to, aby do něj auto vjelo. Jakou rychlostí se bude pohybovat auto poté, co se jeho roztočená kola dostanou na pohybující se kamion?

Předpokládejte, že přední kola automobilu budou uvnitř kamionu velice krátkou dobu prokluzovat. Zajímá nás rychlost po tom, co prokluzovat přestanou. Zanedbejte veškeré tření kromě toho mezi koly a dnem kamionu. Hmotnost celého auta je M , poloměr jednoho jeho kola r a moment setrvačnosti J . Zároveň předpokládejte, že hmotnost kamionu je výrazně vyšší než hmotnost auta, kamion tedy svou rychlost nijak nemění a jeho kola po cestě neprokluzují.

Lego si vzpomněl na Boříče mýtu.

Keď predné kolesá vojdú na pohybujúci sa nákladiak, začnú po ňom prešmykovať. Bude teda medzi nimi a nákladiakom pôsobiť trecia sila. Táto trecia sila bude na auto pôsobiť v smere dopredu: čiže ho zrýchli, presne ako by sme čakali. Zároveň ale táto trecia sila pôsobí proti otáčaniu kolies – čiže kolesá spomalí svoje otáčanie, tým pádom je hneď jasné, že auto nezrýchli na rýchlosť $v_0 + v_k$.

Kým ide auto po ceste je obvodová rýchlosť kolies rovná rýchlosti auta, čiže ich uhlová rýchlosť bude $\omega_0 = v_0/r$. Prešmykovanie prestane keď bude platiť, že rýchlosť auta v_a bude rovná súčtu obvodovej rýchlosti predných kolies $v_p = \omega r$ a rýchlosti kamióna v_k .

Ak si označíme treciu silu medzi každým kolesom a kamiónom F_t , tak na predné kolesá pôsobia momenty síl $M = F_t r$, čiže ich uhlové zrýchlenie je $\varepsilon = M/J = F_t r/J$. Po čase t prešmykovania bude ich uhlová rýchlosť

$$\omega(t) = \omega_0 - \varepsilon t = \omega_0 - \frac{t F_t r}{J},$$

tým pádom ich obvodová rýchlosť bude

$$v_p(t) = \omega(t)r = \omega_0 r - \frac{t F_t r^2}{J} = v_0 - \frac{t F_t r^2}{J}.$$

Zložitejšia je rýchlosť samotného auta. Urychľuje ho sila $2F_t$. Lenže okrem predných kolies má aj zadné a tie nemajú prešmykovať po ceste, čiže sa so zrýchľovaním auta musia otáčať rýchlejšie. Toto uhlové zrýchlenie sprostredkuje trenie medzi nimi a cestou, lenže toto trenie zas spomalí samotné auto. Predpokladajme že auto bude zrýchľovať so zrýchlením a . V takom prípade musia zadné kolesá zrýchľovať s uhlovým zrýchlením $\varepsilon_z = a/r$, pričom na ne musí pôsobiť moment sily $M_z = \varepsilon_z J$, čiže trecia sila medzi nimi a cestou je v takom prípade $F_{tz} = M_z/r = \varepsilon_z J/r = aJ/r^2$. Môžeme teda napísať rovnicu pre zrýchlenie auta

$$\begin{aligned} F_{\text{celk}} &= Ma, \\ 2F_t - 2F_{tz} &= Ma, \\ F_t - a \frac{J}{r^2} &= \frac{1}{2} Ma, \\ \frac{F_t}{\frac{J}{r^2} + \frac{M}{2}} &= a. \end{aligned}$$

Po uplynutí času prešmykovania t bude rýchlosť auta

$$v_a(t) = v_0 + a t = v_0 + \frac{t F_t}{\frac{J}{r^2} + \frac{M}{2}}.$$

Všimneme si, že vo výsledných vzťahoch pre rýchlosť auta aj kolies sa trecia sila F_t a čas prešmykovania t vyskytujú jedine ako súčin tF_t . Nakoľko nás ich konkrétne hodnoty vôbec nezaujímajú, môžeme tento súčin substituovať ako $tF_t = I$. Pričom tejto veličine sa v skutočnosti hovorí impulz sily.

Dosadíme do podmienky na neprešmykovanie

$$\begin{aligned} v_p + v_k &= v_a, \\ v_0 - \frac{I r^2}{J} + v_k &= v_0 + \frac{I}{\frac{J}{r^2} + \frac{M}{2}}, \\ v_k &= \frac{I r^2}{J} + \frac{I}{\frac{J}{r^2} + \frac{M}{2}}, \\ I &= \frac{v_k}{\frac{r^2}{J} + \frac{1}{\frac{J}{r^2} + \frac{M}{2}}}, \end{aligned}$$

čím sme získali výsledný impulz sily, po ktorom sa už predné kolesá nebudú ďalej prešmykovať. Keď ho dosadíme naspäť do rýchlosti auta, dostaneme akou rýchlosťou v tom momente pôjde

$$\begin{aligned} v_a &= v_0 + \frac{I}{\frac{J}{r^2} + \frac{M}{2}}, \\ v_a &= v_0 + \frac{v_k}{\frac{r^2}{J} + \frac{1}{\frac{J}{r^2} + \frac{M}{2}}} \frac{1}{\frac{J}{r^2} + \frac{M}{2}}, \\ v_a &= v_0 + \frac{v_k}{\frac{r^2}{J} \left(\frac{J}{r^2} + \frac{M}{2} \right) + 1}, \\ v_a &= v_0 + \frac{v_k}{2 + \frac{r^2}{J} \frac{M}{2}}. \end{aligned}$$

Inými slovami, rýchlosť auta narastie o ten člen úmerný rýchlosti kamiónu. V menovateli tam je 2, pretože aj keby auto nič nevážilo, stále sú tam okrem predných kolies aj zadné. Druhý člen menovateľa hovorí práve o tom, koľkokrát je hmotnosť samotného auta dôležitejšia než moment zotrvačnosti kolies. Ak by bolo koleso homogénny valec s hmotnosťou m , tak $J/r^2 = m/2$. Auto by potom zrýchlilo o $v_k/(2 + M/m)$, čiže samotná 2 v menovateli by bola zrejme zanedbateľná a ďalej je jasne vidno, že čím sú kolesá ťažšie, tým menej budú chcieť meniť svoju rýchlosť otáčania a teda tým viac auto zrýchli. Platí to aj naopak, čím je auto ťažšie, tým menej zrýchli. Čiže vidíme, že auto pochopiteľne zrýchli, ale nakoľko je jednoduchšie zmeniť rýchlosť otáčania kolies, než rýchlosť pohybu auta, nezrýchli až o toľko veľa.

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.