

Úloha VI.1 ... Planckova tužka

3 body; (chybí statistiky)

Na jakou nejkratší délku tužky se můžeme dostat jejím ořezáváním? Uvažujte, že ruka na tužku dokáže stiskem vyvolat maximální tlak p – ten je stejný pro celou plochu, na kterou ruka působí – na ořezávání je potřeba vyvolat moment síly M , průměr (válcovitě) tužky je d , délka ořezávátka h a koeficient statického tření mezi rukou a tužkou je f . Můžete předpokládat, že jsme schopni tužku v každém okamžiku uchopit ideálně. Stačí uvažovat jen běžné rozměry rukou a tužek. Za ořezanou tužku považujeme takovou, která má ostrý kuželovitý hrot.

Bonus: Jaká je nejvyšší dosažitelná účinnost při psaní tužkou? Účinností je myšlen podíl objemu tuhy, který se opravdu využije na psaní. Tužka je ze začátku ořezaná, tj. vyčnívající tuha má ostrý kuželovitý hrot, při psaní má tuha tvar válce o výšce l a poloměru R . Po ořezání je hrot tužky vždy kuželovitý. Předpokládejte, že tužka bude při psaní na papír vždy kolmá.

Marek J. preferuje trojúhelníkové tužky.

Naša skúsenosť so strúhaním ceruziek je, že to spočiatku ide ľahko a postupne, skracovaním ceruzky, sa strúha ťažšie a ťažšie. To je dané tým, že ako sa ceruzka skracuje tým máme k dispozícii menej plochy, pomocou ktorej sa ju môžeme pokúsiť otáčaním strúhať. Typicky sme na začiatku schopní využívať celú plochu dotyku s našou rukou, ale postupne sa táto plocha dotyku zmenšuje.

Zo zadania vieme, že na strúhanie potrebujeme vynaložiť moment sily o veľkosti aspoň M . Pre moment sily platí z definície

$$M = Fx,$$

kde x je kolmá vzdialenosť od osi otáčania, v našom prípade ide o polovicu priemeru ceruzky $x = d/2$. F je vlastne trecia sila od nášho stisku rukou, ktorou sa snažíme ceruzku v strúhadle otočiť. Máme pre ňu jednoduchý vzťah $F = F_n f$, kde F_n je sila kolmá na povrch a f je koeficient trenia zo zadania. Ďalej teda potrebujeme vyjadriť akú silu F_n sme schopní vyvinúť na plášť ceruzky, keď vieme, že maximálny tlak stisnutím je p . Použijeme vzťah $F_n = pS$, kde S je plocha, na ktorú je daný tlak vyvinutý a pre nás to je plášť ceruzky $S = \pi dl$, kde l je dĺžka ceruzky, ktorá trčí zo strúhadla. Dostávame tak podmienku

$$M \leq \frac{\pi p d^2 l f}{2},$$

čím potvrdzujeme našu skúsenosť, že skracovaním dĺžky ceruzky l , musíme zvyšovať stisk aby sme ju vôbec boli schopní strúhať. Keďže tlak p je už maximálny tlak aký vieme vynaložiť, dostávame pre minimálnu dĺžku trčiacej časti ceruzky

$$l_{\min} = \frac{2M}{\pi p d^2 f},$$

a pre celkovú (vrátane časti v strúhadle) najkratšiu možnú dĺžku zastrúhanej ceruzky L teda máme

$$L = l_{\min} + h = \frac{2M}{\pi p d^2 f} + h.$$

Bonus: Začínáme so zastrúhanou tuhou o objeme V . Trik je si uvedomiť, že akonáhle máme ceruzku zastrúhanú tak, že polomer hornej podstavy zrezaného kužela je len o limitne malý kúsok menší ako R (teda sme skoro danú časť ceruzky úplne vypísali), môžeme dosiahnuť účinnosť limitne rovnú jednej. Pretože vždy ako malý kúsok tuhy použijeme na písanie, okamžite tuhu

limitne málo zastrúhame a toto opakujeme s limitne malými stratami tuhy strúhaním. Uvažujme teda, že sme tuhu minuli do stavu kedy polomer hornej podstavy je rovný polomeru tuhy R (ceruzku sme úplne vypísali). Teraz nám už iba v infinitezimálnom priblížení stačí zastrúhať rohy ceruzky tak, aby polomer hornej podstavy bol $R - 2\varepsilon$. Výška týchto „trojuholníkových rohov“ sa však tiež škáluje s ε a teda ich plocha je úmerná ε^2 . Po zarotovaní dostávame objem úmerný $R\varepsilon^2$. Dôležité je, že ak pri zastrúhaní tuhy minieme objem V_s úmerný $R\varepsilon^2$, tak na písanie v prípade kužeľovitého tvaru máme dostupný objem V_p úmerný $R^2\varepsilon$. A teda pre účinnosť η dostávame

$$\eta = \frac{V_p}{V} = \frac{V - V_s}{V} = 1 - \frac{V_s}{V_p + V_s} \simeq 1 - \frac{R\varepsilon^2}{R^2\varepsilon + R\varepsilon^2},$$

čo pre $\varepsilon \rightarrow 0$ ide limitne k jednej.

Podobne ako v termodynamike, procesy s maximálnou účinnosťou (v našom prípade písanie so 100% využitím tuhy) sú nekonečne pomalé.

Marek Jankola
marekj@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.