

Úloha V.E ... gde proboha su?

13 bodů

Pokuste se co nej přesněji změřit svoji zeměpisnou šířku bez použití GPS nebo jiného prostředku využívajícího informace o vaší poloze. Svoji zeměpisnou délku můžete považovat za známou.

Lukáš se ztratil.

Úvod

Jak lze již ze zadání úlohy poznat, je zaměřená na astrofyziku. Po úvodním rozmyšlení docházíme hned ke dvěma způsobům, kterými můžeme požadovaný experiment provést v domácích podmínkách bez profesionálního vybavení, a to měřením délky slunečního stínu v pravé astronomické poledne při rovnodennosti a měřením výšky Polárky nad obzorem. Ve vzorovém řešení rozebereme oba způsoby.

Teorie

Měření délky slunečního stínu Při měření první metodou využíváme toho, že při rovnodennosti se Slunce nachází v rovině zemského rovníku, takže sluneční paprsky dopadají kolmo na zemskou osu (odborně mluvíme o tzv. jarním nebo podzimním bodu, které se nacházejí v průsečíku ekliptiky a nebeského rovníku, viz rozkreslení situace na obr. 1). Můžeme tedy předpokládat, že v okamžiku pravého astronomického poledne v den rovnodennosti se Slunce nachází nad rovníkem, konkrétně na jeho průsečíku s místním poledníkem. Pro lepší pochopení situace si můžeme například představit, že během rovnodennosti stojíme na rovníku se severní šířkou 0° N – v takovém případě se bude Slunce nacházet právě nad našimi hlavami. Oproti tomu v ten samý čas na pólu s 90° N bude Slunce právě na obzoru. Z této úvahy (nebo z nákresu na obrázku 2 lze jednoduše odvodit, že severní šířka bude úhel mezi Sluncem a nadhlavníkem. Ten jako takový by se špatně měřil, ale můžeme použít nepřímé měření pomocí slunečního stínu. Pro provedení experimentu tedy stačí v tomto případě změřit délku stínu, který vrhá kolmá tyč o známé délce v pravé poledne. Z tohoto trojúhelníku vyjádříme hledaný úhel pomocí goniometrických funkcí. Pro severní šířku pozorovatele tedy získáme

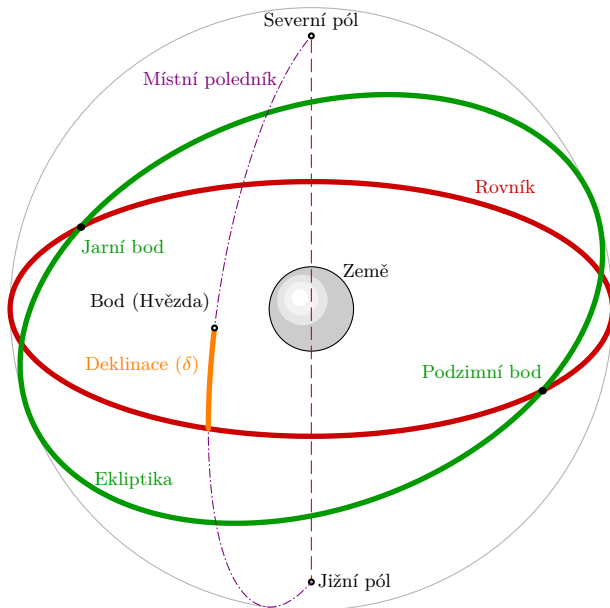
$$\alpha = \arctg\left(\frac{d}{h}\right). \quad (1)$$

Protože se jedná o složitější funkci, budeme absolutní chybu tohoto výrazu určovat dle výrazu odvozeného z Gaussova zákona pro přenos chyb

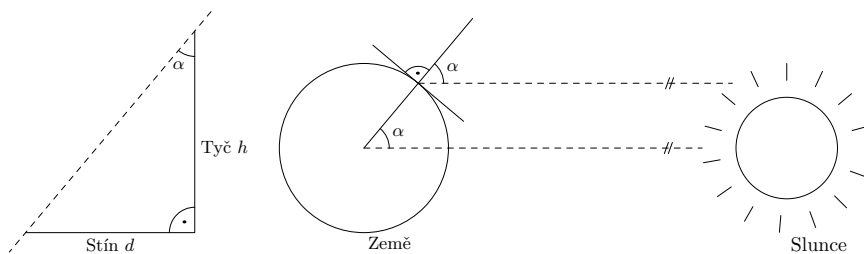
$$\sigma_\alpha = \sqrt{\left(\frac{d}{d^2 + h^2} \sigma_h\right)^2 + \left(\frac{h}{d^2 + h^2} \sigma_d\right)^2}, \quad (2)$$

kde σ_d je absolutní chyba veličiny d a σ_h je absolutní chyba veličiny h .

Měření výšky Polárky nad obzorem Využíváme toho, že Polárka (též známá jako Severka) se nachází téměř přesně nad severním pólem Země. Její deklinace je asi $89^\circ 15'$, severní pól by měl přesně 90° . Tím pádem si můžeme představit, že Země rotuje nejen kolem severního pólu, ale vlastně také kolem Polárky, která po celou dobu zůstává na obloze na jednom místě. Navíc si lze jednoduše představit, že pokud je její úhlová výška nad obzorem α_P , bude tato hodnota zároveň severní šířka místa pozorování (za předpokladu, že se nachází přímo nad severním pólem), viz náčrtek na obr. 3. Také si lze rozmyslet situace při pozorování Polárky ze

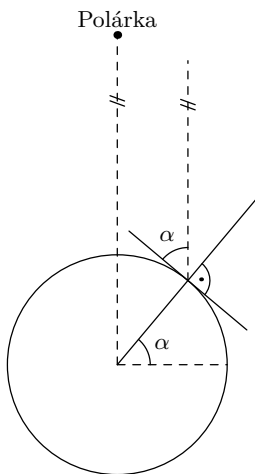


Obrázek 1: Znázornění polohy jarního a podzimního bodu.



Obrázek 2: Náčrtek situace při měření délky stínu Slunce.

severního pólu nebo z rovníku, podobně jako v předchozí sekci. Jak ale změříme výšku Polárky nad obzorem? Jde k tomu využít například nejjednodušší verze sextantu jak můžete vidět na obrázku 4, který doma v nejjednodušším případě sestavíme z úhloměru, provázku, závaží a kousku lepenky.



Obrázek 3: Náčrt situace při měření výšky Polárky nad obzorem.

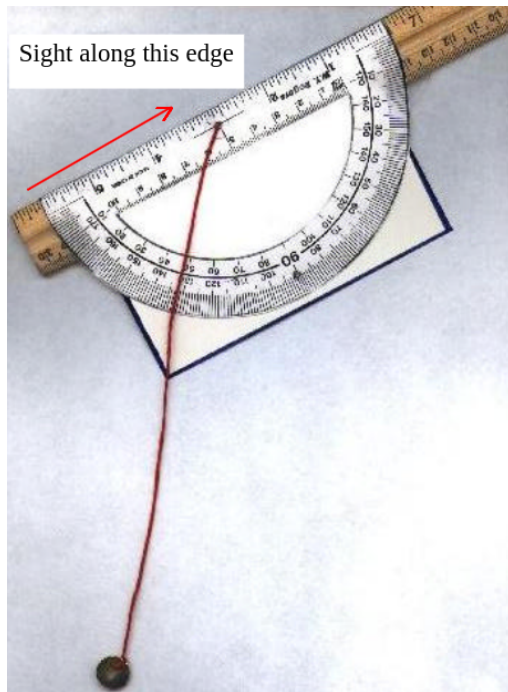
Výsledky a zpracování měření

Měření délky slunečního stínu Pro měření výšky Slunce nad obzorem jsme použili násadu od smetáku se známými parametry. Naměřené hodnoty uvádíme do tabulky 1.

Tabulka 1: Naměřené hodnoty délky slunečního stínu.

$\frac{d}{\text{cm}}$	
96,5	97,5
97,5	96,7
97,2	97,0
97,6	97,2
96,8	97,9
96,7	97,7
97,7	97,8
97,4	98,1

Vzhledem k tomu, že všechny tyto hodnoty jsme naměřili se stejnou chybou, kterou jsme odhadli jako $\sigma_n = 0,4\text{cm}$, budeme při dalším zpracování pracovat s aritmetickým průměrem těchto hodnot. Chybu tohoto průměru vypočítáme přes vzorec pro součet n hodnot se stejnou



Obrázek 4: Nejjednodušší sextant. Převzato z:
https://solarscience.msfc.nasa.gov/suntime/sxtnt_tchr.pdf

absolutní chybou σ_n . Celková systematická chyba takového aritmetického průměru z n hodnot je potom

$$\sigma_B = \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}. \quad (3)$$

Délku tyče, kterou jsme k měření použili, jsme změřili jako $h = 81,9$ cm s chybou $\sigma_h = 0,3$ cm, kterou jsme odhadli na základě toho, že se obtížně určoval vrchol tyče (vzhledem k tomu, že se ve skutečnosti jednalo o zaoblenou násadu od smetáku. . .). Do další tabulky uvádíme přehled hodnot, které budeme dále zpracovávat, s jejich chybami.

Tabulka 2: Přehled hodnot pro další zpracování.

veličina	hodnota	chyba
h	81,9 cm	0,3 cm
\bar{d}	97,3 cm	0,1 cm

V poslední řadě u zpracování dat vezmeme hodnoty z této tabulky a dosadíme je do vzorců (1) a (2). Při počítání si musíme dávat pozor na to, že budeme dostávat výsledky v radiánech, takže je důležité výsledek i chybu správně převést na stupně. Nakonec ještě musíme takto zjištěnou systematickou chybu složit s chybou statistickou. Tu získáme ze známého vzorce

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}, \quad (4)$$

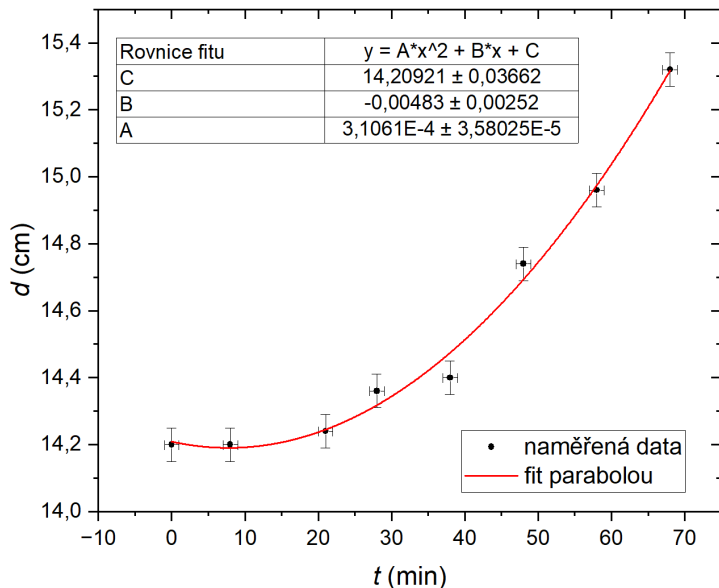
kde n je počet měření, x_i je i -té měření a \bar{x} je aritmetický průměr. Statistickou chybu (σ_A) nyní složíme s chybou vypočítanou z Gaussova zákona přenosu chyb. Ta se tradičně značí σ_B , u nás v této roli vystupuje hodnota σ_α . Použijeme vzorec

$$\sigma_{\text{tot}} = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_\alpha^2}. \quad (5)$$

Po dokončení zpracování získáme celkový výsledek měření zeměpisné délky metodou měření délky slunečního stínu

$$\alpha_1 = (49,9 \pm 0,3)^\circ.$$

Měření délky slunečního stínu – alternativně Při způsobu měření, který jsme uvedli v minulé části, zanedbáváme jednu podstatnou skutečnost, a to, že délka stínu se v průběhu času mění. Pokud bychom chtěli postupovat tak, abychom tuto chybu odstranili, můžeme použít alternativní způsob zpracování měření. Tuto metodu lze také použít v případě, kdy neznáme přesný čas pravého poledne. Připravíme si papír a na označené místo postavíme předmět s jasně určenou špičkou. Polohu stínu této vzdálenost špičky stínu od základny objektu, získáme tedy závislost délky stínu na čase. Když tuto závislost vyneseme do grafu, můžeme jím proložit parabolu. Její vrchol představuje nejkratší stín a odpovídá času pravého poledne. Z fitu tedy můžeme určit délku stínu přesně v pravé poledne. Dále postupujeme jako dříve, jen statistickou chybu nebudeme počítat ze vzorce, ale určíme ji z chyb parametrů fitu.



Obrázek 5: Závislost délky stínu na čase od začátku měření.

Z fitu ve tvaru $y = Ax^2 + Bx + C$ jsme určili hodnoty parametrů s chybami jako

$$A = (3,2 \pm 0,4) \cdot 10^{-4} \text{ cm} \cdot \text{min}^{-2},$$

$$B = (-4 \pm 2) \cdot 10^{-3} \text{ cm} \cdot \text{min}^{-1},$$

$$C = (14,21 \pm 0,04) \text{ cm}.$$

Velikost stínu v pravé poledne určíme jako y -složku vrcholu paraboly dle vzorce

$$V_y = C - \frac{B^2}{4A}.$$

Délku stínu v pravé poledne tedy vychází

$$V_y = (14,20 \pm 0,06) \text{ cm},$$

kde chybu jsme složili ze statistické chyby vypočítanou z Gaussova zákona pro přenos chyb z parametrů fitu a ze systematické chyby měření, kterou jsme odhadli na 0,5 mm kvůli nepřesnostem v zaznamenání špičky stínu. Pro výpočet zeměpisné šířky z takto naměřené hodnoty použijeme stejné vzorce jako v předchozí úloze. Výšku použitého objektu jsme určili pomocí posuvného měřidla jako $h = (11,92 \pm 0,01) \text{ cm}$. Takto získáme naši severní šířku

$$\alpha_2 = (50,0 \pm 0,1)^\circ.$$

Měření výšky Polárky nad obzorem Pro měření výšky Polárky nad obzorem jsme použili nejjednodušší formu improvizovaného sextantu, který jsme sestavili z úhlooměru a provázku se závažím. Jeden konec provázku jsme upevnili do počátečního místa úhlooměru. Při samotném měření jsme základnu úhlooměru namířili na Polárku a pomocí provázku jsme určili vychýlení základny vůči kolmému směru. Tím jsme změřili úhlovou výšku Polárky nad obzorem a tedy i severní šířku v místě měření.

Tabulka 3: Naměřené hodnoty výšky Polárky nad obzorem.

α ($^\circ$)	
48	49
47	52
50	51
49	50
49	50

Takto jsme provedli celkem 10 měření, z nichž jsme určili výsledek jako aritmetický průměr $\bar{\alpha} = 49,5^\circ$. Vzhledem k tloušťce provázku jsme odhadli systematickou chybu úhlooměru na 1° , jiné systematické chyby do měření nebudou vstupovat. Další statistické zpracování dat se neliší od toho, které jsme provedli při měření délky slunečního stínu v první uvedené variantě, takže zde postup uvedeme zkratkovitě. Systematickou chybu aritmetického průměru určíme dle vzorce (3) jako $\sigma_B = 0,3^\circ$, statistickou dle vzorce (4) jako $\sigma_A = 1,4^\circ$. Celkový výsledek měření po složení chyb dle vzorce (5) bude tedy

$$\alpha_3 = (50 \pm 1)^\circ .$$

Diskuze

Tři metody, které jsme použili, se ve způsobu vzniku chyb i jejich velikosti liší, takže rozebereme každou zvlášť. Při prvním způsobu měření vznikaly chyby nepřesností v určení délky tyče a stínu, dále pak hrál významnou roli fakt, že měření byla rozložena v čase, takže se délka stínu v průběhu měření nepatrně měnila. Také mohly přispívat nerovnosti povrchu, křivost tyče a její možná odchylka od svislého směru.

Většinu z těchto zdrojů chyb jsme se snažili zmenšit nebo úplně eliminovat pomocí alternativního postupu měření. Závislost délky stínu na čase jsme využili ve svůj prospěch, použitím posuvného měřidla jsme dosáhli větší přesnosti v určování délky tyčky a stínu. Chyby vznikaly kvůli nerovnostem povrchu a nepatrným pohybům měřící soupravy během průběhu experimentu (ten den bylo opravdu větrno).

Při provádění experimentu s pozorováním Polárky vznikaly chyby při zaměřování hvězdy úhlooměrem. Zdrojem chyb byla také improvizovaná konstrukce sextantu, měřící přístroj nemusel být přesně zkalibrován (například provázek nemusel být zachycen přesně ve středu).

Při všech experimentech jsme zanedbávali odchylku od předpokládané deklinace. Skutečná deklinace Slunce byla v okamžiku měření $0,037^\circ$, přičemž my jsme předpokládali 0° . V případě Polárky byla skutečná deklinace $89^\circ 15'$ a předpokládaná 90° . V obou případech se tedy jedná o zanedbatelné rozdíly vzhledem k naší předpokládané přesnosti měření.

Skutečná zeměpisná šířka v místě měření je podle online map $50,12^\circ$. Všechny naměřené hodnoty se v rámci chyby shodují s tou skutečnou. Relativní chyby měření se liší a sahají od 0,2% do 2% v závislosti na použité metodě.

Závěr

V rámci této experimentální úlohy jsme změřili naši severní šířku třemi různými metodami. Měřením slunečního stínu jsme získali výsledky $\alpha_1 = (49,9 \pm 0,3)^\circ$ resp. $\alpha_2 = (50,0 \pm 0,1)^\circ$ alternativní metodou. Pomocí určování výšky Polárky nad obzorem improvizovaným sextantem nám vyšlo $\alpha_3 = (50 \pm 1)^\circ$. Všechny výsledky se v rámci chyby shodují se skutečnou hodnotou v místě měření $50,12^\circ$.

Tereza Voltrová

tereza.voltrova@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.