Úloha V.5 ... vzhůru, entropie

9 bodů; (chybí statistiky)

Marek má dvě stejné kovové kostky o konstantní tepelné kapacitě C, jednu o teplotě T_1 a druhou o teplotě T_2. Na jaké nejvyšší a nejnižší teplotě se mohou obě ustálit, pokud je uvede do kontaktu a může je používat pouze na pohánění tepelného stroje?

Nápověda: *Když už nebudete vědět, uvažte, že entropie nikdy neklesne.*

Marek hledal alespoň tepelnou rovnováhu, když ne tu vnitřní.

Určitě se musí zachovat energie. Označme proto vnitřní energii první kostky U_1, druhé U_2 a práci tepleného stroje W. Pak platí

$$\Delta U_1 + \Delta U_2 + W = 0$$

Bez újmy na obecnosti můžeme uvažovat $T_2 > T_1$. Pokud se systém ustálí na teplotě T_f, změnu vnitřní energie kostek můžeme vyjádřit pomocí teplené kapacity C jako

$$\Delta U_1 = C\left(T_\mathrm{f} - T_1\right) ,$$
$$\Delta U_2 = C\left(T_\mathrm{f} - T_2\right) .$$

Dosazením dostaneme

$$2T_\mathrm{f} - T_1 - T_2 + \frac{W}{C} = 0 \,. \tag{1}$$

T_1, T_2 a C máme zadané, T_f nás zajímá – jediná proměnná je tedy W. To je nezáporná veličina díky čemuž vidíme, že nejvyšší hodnota T_f bude, pokud $W = 0$. Maximální teplota tedy bude

$$T_\mathrm{max} = \frac{T_1 + T_2}{2} \,,$$

jak bychom čekali.

Co umíme říct o nejnižší teplotě? Určitě bude vyšší než T_1 a nastane, když bude práce maximální. Tady přichází do hry to, že celková entropie nemůže klesnout

$$\Delta S \geq 0 \,.$$

Pokud označíme entropii první a druhé kostky S_1 a S_2 a změnu entropie stroje S_s, platí

$$\Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_\mathrm{s} \geq 0 \,.$$

Ideální stroj bude mít $\Delta S_\mathrm{s} = 0$, pro kostky platí Clausiův vztah

$$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T}\frac{\delta Q}{\mathrm{d}T}\,\mathrm{d}T = \frac{C}{T}\,\mathrm{d}T \,.$$

Integrováním například pro první kostku získáme

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_\mathrm{f}} \mathrm{d}S = C\int_{T_1}^{T_\mathrm{f}} \frac{1}{T}\,\mathrm{d}T = C\log\frac{T_\mathrm{f}}{T_1} \,.$$

Podmínka na entropii je pak

$$\begin{aligned}\log\frac{T_\mathrm{f}}{T_1}+\log\frac{T_\mathrm{f}}{T_2}&\geq 0\,,\\ \log\frac{T_\mathrm{f}^2}{T_1T_2}&\geq 0\,,\\ \frac{T_\mathrm{f}^2}{T_1T_2}&\geq 1\,,\\ T_\mathrm{f}&\geq\sqrt{T_1T_2}\,.\end{aligned}$$

Je dolní mez této nerovnosti dosažitelná? Vraťme se k zachování energie pro ověření toho, že toto řešení odpovídá nezáporné práci. Z rovnice (1) vidíme, že práce bude maximální, když bude T_f minimální (což je z fyzikální úvahy jasné). Z toho vidíme, že maximální práce

$$W_\mathrm{max}=C\left(T_1+T_2-2\sqrt{T_1T_2}\right)=C\left(\sqrt{T_1}-\sqrt{T_2}\right)^2\geq 0\,.$$

Pro ověření můžeme ještě dosadit do (1) a dostaneme minimální teplotu

$$T_\mathrm{min}=\frac{T_1+T_2}{2}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{T_1}-\sqrt{T_2}\right)^2=\sqrt{T_1T_2}.$$

Marek Milička
`marek.milicka@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.