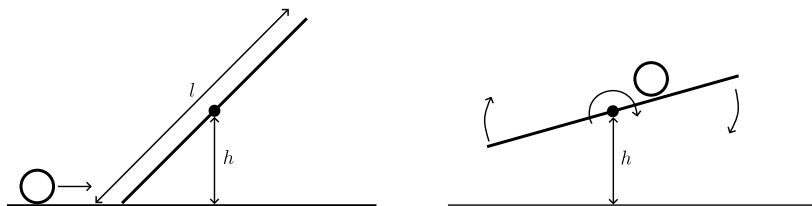


## Úloha V.4 ... houpačka na minigolfu

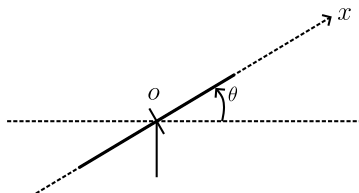
8 bodů; průměr 4,14; řešilo 35 studentů

Možná jste někdy byli na minigolfu, kde na jedné jamce byla překážka v podobě houpačky. Houpačku si můžeme představit jako desku s hmotností  $M$  a délkou  $l$ , která se může otáčet kolem horizontální osy, jež je ve výšce  $h$  nad zemí a prochází středem desky. Míček s hmotností  $m$  a poloměrem  $r$  na tuto rampu přijede ze směru kolmého na otáčející se osu a postupně desku převáží tak, aby se otočila a míček mohl sjet na druhou stranu. Míček se po celou dobu kutálí, aniž by došlo k prokluzu. Sestavte rovnice pohybu pro takový systém – řešit je nemusíte.



Úlohu řešili tři organizátoři dohromady 30 hod. – (ne)úspěšně.

Úloha se dá řešit několika způsoby. My si ukážeme ten více středoškolský. Před tím, než se pustíme do řešení úlohy, si projdeme, co se děje s kuličkou během přejezdu přes houpačku. Ze začátku bude kulička jenom zpomalovat s konstantním negativním zrychlením. V momentě, kdy přejede přes střed rampy, se houpačka začne přetáčet kvůli tíze kuličky a sklon nakloněné roviny se bude měnit. To zapříčiní také změnu zrychlení kuličky, což zase ovlivní rychlost otáčení houpačky a tak dále. Vidíme, že systém bude vykazovat nějakou zajímavou dynamiku. Ještě si uvedeme jedno důležité pozorování – kulička s houpačkou bude po celou dobu svého přejezdu v kontaktu. To se můžeme přesvědčit následující úvahou. Protože ze začátku se budou oba předměty dotýkat a nebudou se otáčet, bylo by nutné, aby zrychlovaly jiným tempem, aby se od sebe vzdálily. To se ale nestane, protože body houpačky budou zrychlovat právě kvůli tíze kuličky a pokud kulička nebude v kontaktu, houpačka nebude zrychlovat a kulička ji „dožene“.



Obrázek 1: Zvolená souřadnicová soustava.

Teď už si můžeme s klidným svědomím zavést souřadný systém jako na obrázku 1. Počátek umístíme do těžiště rotující desky – souřadnice  $x$  určuje vzdálenost kuličky od středu houpačky – kladná je ve směru počátečního pohybu kuličky a  $\theta$  úhel otočení houpačky. Děj si rozdělíme na dvě fáze – 1. pohyb kuličky až na střed houpačky (pokud má dostatek energie) a 2. pohyb kuličky a houpačky poté, co se dostane za střed. První případ je jednoduché užití zákona zachování energie, jelikož houpačka zůstává stabilní a pohybuje se pouze kulička. Podívejme se nyní, s jakou energií kulička vstupuje do děje 1. Ta se skládá z potenciální, kterou položíme

rovnou nule, a kinetické, která se skládá z energie posuvného pohybu a energie otáčení. Pro kouli poloměru  $r$  platí, že její moment setrvačnosti je roven  $J = (2/5)mr^2$ . Využitím vztahu  $\omega = v/r$ , kde  $\omega$  je úhlová rychlost kuličky a  $v$  její rychlost, dostáváme vztah pro kinetickou energii

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{7}{10}mv^2.$$

Co se týče energie při pohybu po houpačce, vztah pro kinetickou energii jsme si odvodili. Pro výpočet potenciální energie využijeme goniometrických vztahů, abychom pomocí našich souřadnic zjistili změnu ve výšce. Je důležité si zde uvědomit, že  $\theta_0$  je konstantní, jelikož ve chvíli, kdy se začne houpačka otáčet, kvůli velikosti kuličky se mění výška jejího těžiště "nad houpačkou", ale k tomu později. Potenciální energii tak vyjádříme členem

$$E_p = (l/2 + x) \sin(\theta_0) mg,$$

kde  $\theta_0$  je počáteční úhel náklonu houpačky a má hodnotu  $\theta_0 = \arcsin(2h/l)$ . Nyní jsme schopni vyjádřit pohyb kuličky rovnicí

$$(l/2 + x) \sin(\theta_0) mg + \frac{7}{10} m \dot{x}^2 = \frac{7}{10} m v_0^2$$

Zde tečka nad proměnnou značí její časovou derivaci, neboli její změnu v čase. V případě souřadnice  $x$  to pak značí její rychlost. Jelikož se technicky jedná o diferenciální rovnici (rovnici s derivací), je dobré určit počáteční podmínky, a to  $x(0) = -l/2$  a  $\dot{x}(0) = v_0$ .

Přejdeme nyní k druhé fázi, která nastane, pokud platí  $(7/5)mv^2 > l \sin(\theta_0)mg$ . První rovnici odvodíme z pohybu kuličky ve směru souřadnice  $x$  – radiální směr. Na kuličku působí v inerciální vztažné soustavě primárně dvě radiální síly – gravitační  $F_g = mg \sin(\theta)$  a síla třecí, kterou budeme značit  $F_T$ . Protože však soustava, vůči níž vyjadřujeme pohyb kuličky (osa  $x$ ) vůči inerciální vztažné soustavě, rotuje, přidávají se k působení těchto sil nepravé síly. Výslednou sílu působící na kuličku ve směru osy  $x$  v neinerciální rotující vztažné soustavě  $F_N$  můžeme dopočítat z rovnice

$$F_N = F_l - 2m\dot{\theta} \times \dot{x} - m\dot{\theta} \times (\dot{\theta} \times x) - m\ddot{\theta} \times x.$$

Nás ovšem zajímají pouze složky sil rovnoběžné s  $x$ , tedy po dosazení do vektorových součinů ještě vzniklé nepravé síly rozložíme do směru rovnoběžného s  $x$  a kolmého na  $x$  pomocí goniometrických identit v pravoúhlém trojúhelníku se stranami: průvodič těžiště kuličky  $r_k = \sqrt{x^2 + r^2}$ ,  $r$  a  $x$ . Dostáváme výsledek

$$F_N = -mg \sin \theta - F_T + m\dot{\theta}^2 x - m\ddot{\theta} r,$$

kde znaménko mínus u obou „pravých“ sil působících v inerciální vztažné soustavě je dáno tím, že pro kladné  $\theta$  obě působí proti směru pohybu kuličky. Můžeme si povšimnout, že Coriolisova síla úplně vymizí, protože působí kolmo na  $x$ , a že oproti pohybu hmotného bodu přibude člen  $m\ddot{\theta}r$  – složka tzv.: Eulerovy síly, která vzniká v důsledku zrychlování rotace vztažné soustavy – ze zápisu si můžeme všimnout, že její směr ve směru  $x$  je dán poloměrem kuličky, tedy pro hmotný bod by tento člen vymizel a dostali bychom typický vztah pro rotaci hmotného bodu ovlivněný pouze setrvačnou silou. Zbývá dosadit za  $F_T$ , která v inerciální vztažné soustavě způsobuje rotaci míčku podle vztahu

$$F_{Tr} = \frac{2}{5} mr^2 \varepsilon,$$

kde  $\varepsilon$  je úhlové zrychlení míčku, která můžeme přepsat z podmínky dokonalého odvalování na  $r\varepsilon = \ddot{x}$ . Spojením všech výše uvedených rovnic dostáváme výsledek

$$\frac{7}{5}m\ddot{x} = -mg \sin \theta + m\dot{\theta}^2 x - m\ddot{\theta} r. \quad (1)$$

Tím dostáváme první rovnici propojující dvě neznámé  $x; \theta$ . Pro úplný popis pohybu této soustavy ovšem potřebujeme získat ještě druhou vazebnou podmínku, kterou dostaneme, budeme-li uvažovat druhou impulsovou větu

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_F,$$

kde  $L$  je moment hybnosti těžiště kuličky kolem počátku naší souřadnicové soustavy a  $M_F$  je moment všech vnějších sil působících na těžiště kuličky. Nejprve vyjádříme  $L$

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} + J\boldsymbol{\omega},$$

kde  $\mathbf{r}$  je průvodič hmotného středu kuličky,  $\mathbf{p}$  je hybnost hmotného středu,  $J = (2/5)mr^2$  a  $\boldsymbol{\omega} = \dot{x}/r$  je úhlová rychlost kuličky. Rychlost hmotného středu kuličky je dána jednak rotací houpačky (kulička rotuje kolem počátku soustavy souřadnic se stejnou úhlovou rychlostí jako houpačka, viz diskuse na začátku) a jednak vlastním pohybem kuličky po houpačce, tedy

$$L = m(r^2 + x^2)\dot{\theta} + mr\dot{x} + \frac{2}{5}mr\dot{x},$$

kde jsme již  $L$  zapsali skalárně, vektor  $L$  by na nákrese výše mířil do nákresny. Nyní vyjádříme celkový moment vnějších sil, které ovlivňují pohyb těžiště.

$$\mathbf{M}_F = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Do sil působících na těžiště se počítají obě složky gravitační síly a zároveň síla  $T$ , kterou na kuličku působí houpačka (je obecně jiná než  $mg \cos \theta$  kvůli zrychlenému pohybu houpačky).

$$M_F = x(mg \cos \theta - T) - rmg \sin \theta,$$

kde jsme opět  $M$  již zapsali skalárně. Znaménka jsou dána tak, aby vektory  $M$  a  $L$  měly shodný směr. Stejnou rovnicí bychom vlastně popsali i výsledný moment sil v případě nepohyblivé nakloněné roviny (kolem paty nakloněné roviny). V tomto případě by ovšem platilo, že síla, kterou kulička tlačí do houpačky, je stejná jako síla, kterou houpačka tlačí do kuličky  $mg \cos \theta = T$ , tedy by se tento člen vykrátil. V momentu hybnosti by v případě nepohyblivé houpačky samozřejmě zmizel člen obsahující  $\dot{\theta}$ . Odtud již pouhou derivací  $L$  podle času dostaneme druhou pohybovou rovnici

$$mr^2\ddot{\theta} + 2mx\dot{x}\dot{\theta} + mx^2\ddot{\theta} + \frac{7}{5}mr\dot{x} = mxg \cos \theta - Tx - rmg \sin \theta.$$

V rovnici ovšem pořád vystupuje člen  $Tx$ , který nemáme nikde vyjádřen. Ten můžeme určit z rotace houpačky, protože ze zákona akce a reakce působí tato síla i na houpačku a zároveň je jediná, tedy právě tato síla způsobuje rotaci houpačku, tzn.

$$Tx = J_h\ddot{\theta},$$

kde  $J_h$  značí moment setrvačnosti houpačky kolem počátku soustavy souřadnic –  $J_h = (1/12)Ml^2$ . Tzn.: druhá pohybová rovnice má tvar

$$\frac{1}{12}Ml^2\ddot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} + 2mx\dot{\theta} + mx^2\ddot{\theta} + \frac{7}{5}mr\ddot{x} = mg\cos\theta - rmg\sin\theta. \quad (2)$$

Rovnice (1) a (2) jsou tedy dvě diferenciální rovnice pro dvě neznámé  $\theta$ ;  $x$ , tedy jsou pohybovými rovnicemi systému. Druhou možností, jak odvodit druhou pohybovou rovnici, je podívat se na situaci opět v neinerciální vztažné soustavě, ale tentokrát rozpracovat síly kolmé na houpačku. Ze vzorce převodu sil působících v inerciální vztažné soustavě do neinerciální, přičemž opět vezmeme pouze ty ve směru kolmém na  $x$ , dostaneme

$$F_N^k = -mg\cos\theta + T + 2m\dot{\theta}x + m\ddot{\theta}x + m(\dot{\theta})^2r.$$

Protože se kulička neodlepí od houpačky (a ani neprojde skrz), v neinerciální vztažné soustavě musí platit, že síla  $F_N^k$  působící na kuličku kolmo k  $x$  je nulová. To znamená, že dostáváme rovnici

$$mg\cos\theta = T + 2m\dot{\theta}x + m\ddot{\theta}x + m(\dot{\theta})^2r. \quad (3)$$

To se však neshoduje s předchozí rovnicí, znamená to problém? No, zkusme si s touto rovnicí ještě trochu pohrát, než vyneseme verdikt. Všimněme si, že oproti ostatním členům v rovnici (2) zde vystupuje navíc člen  $m(\dot{\theta})^2r$ , podobný člen ovšem najdeme i v rovnici (1) – zkusíme si jej tedy odtud vyjádřit

$$m\dot{\theta}^2xr = \frac{7}{5}mr\ddot{x} + mgr\sin\theta + m\ddot{\theta}r^2,$$

Když rovnici (3) přenásobíme  $x$ , dosadíme předchozí člen a stejnou úvahou jako předtím vyjádříme  $Tx$ , dostaneme

$$mgx\cos\theta = J_h\ddot{\theta} + 2mx\dot{\theta}x + m\ddot{\theta}x^2 + \frac{7}{5}mr\ddot{x} + mgr\sin\theta + m\ddot{\theta}r^2,$$

což je ovšem po přeuspořádání členů a dosazení za  $J_h$  stejná rovnice jako rovnice (2).

**Jiří Sýkora**  
jiri.sykora@fykos.cz

**Radovan Lev**  
radovan.lev@fykos.cz

---

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.