

Úloha IV.E ... antiduna

12 bodů

Najděte v kuchyni hladkou mouku a mák. Ověřte, jestli jejich sypný úhel závisí na výšce hromádky vytvořené sypáním. Dále změřte závislost sypného úhlu na hmotnostní koncentraci směsi hladké mouky a máku.

Karel přemýšlel nad solením a Tomáš nad bobalkami.

Teoretický úvod

Sypeme-li sypký materiál na jedno místo, nepozorujeme, že by se dokonale rozprostřel po zemi či zůstal na místě dopadu, ale naopak že se uspořádá do tvaru kužele. Úhel mezi povrchovou přímkou a podstavou daného kužele se označuje jako tzv. sypný úhel. Z mikroskopického hlediska se můžeme zabývat silami, které na jednotlivé částičky působí a které jsou ve výsledku zodpovědné za výsledné uspořádání. Víme totiž, že pokud se daná částička materiálu nehýbe, pak jsou na ni působící síly v rovnováze. Z kužele dolů táhne částičku síla tíhová, ovšem při valení se dolů z kužele se částička zasekává o ostatní a na makroskopické úrovni pak pozorujeme tření.

Právě pomocí koeficientu tření můžeme sypný úhel jednotlivých materiálů v prvním přiblížení odhadnout. Uvažme model běžného klouzání se třením z nakloněné roviny, který je ilustrován na obrázku 1. V mezním případě, kdy dojde k vyrovnání velikosti složky \vec{F} tíhové síly \vec{F}_G ve směru pádu částičky a maximální třecí síly \vec{F}_t

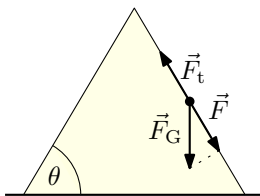
$$\vec{F} = -\vec{F}_t ;$$

z geometrie úlohy platí

$$mg \sin \theta = mgf \cos \theta ,$$

kde m je hmotnost pohybující se částičky, g tíhové zrychlení, θ je mezní úhel, tedy sypný úhel; a f je koeficient statického tření. Tedy

$$\operatorname{tg} \theta = f .$$



Obrázek 1: Síly působící na malou částičku na plášti kužele.

Sypný úhel je dále ovlivněn dalšími silami, které se mohou mezi částicemi materiálu uplatnit (např. adheze, koheze a kapilární jevy při navlhčení), jejichž vliv budeme při naší přesnosti měření považovat za zanedbatelný. Na sypný úhel může mít vliv i rychlost sypání materiálu na kužel. Částičky s vyšší rychlostí budou více odskakovat, je tedy potřeba je pro měření přisypávat pomalu.

Protože „tvar“ svahu kužele sypkého materiálu bude na výšce nezávislý, a tedy i makroskopické tření, které ovlivňuje pohyb padajících částiček, zůstává stejné, lze předpokládat, že

sypaný úhel by měl být na výšce také nezávislý. Při změně koncentrace směsi máku a mouky očekáváme, že se bude sypaný úhel měnit v rozmezí hodnot pro jednotlivé složky směsi.

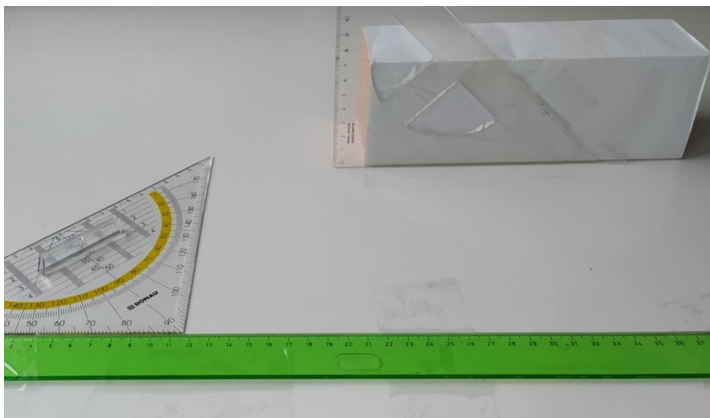
Hmotnostní koncentrace c látky o hmotnosti m_1 ve směsi s látkou o hmotnosti m_2 je definována jako

$$c = \frac{m_1}{m_1 + m_2}. \quad (1)$$

Měření

Pro měření byla využita aparatura na obrázku 2. Sypaný materiál (hladkou mouku, mák a jejich směs) jsme pomalu sypali na jedno místo pomocí trychtýře a parametry vzniklého kužele jsme měřili pomocí pravítek – jednoho připevněného k podložce s posuvným trojúhelníkem pro odečítání poloměru r a druhého upevněného vertikálně pro měření výšky h kužele. Z těchto hodnot jsme následně dopočetli sypaný úhel podle vztahu

$$\theta = \arctg \frac{h}{r}. \quad (2)$$



Obrázek 2: Použitá aparatura.

Přesnost pravítek by se dala odhadnout jako polovina nejmenšího dílku stupnice (tedy 0,5 mm), ovšem do měření vnáší další chyby to, že vertikální pravítko nemůžeme přiložit ke kuželu přímo, tedy odečet hodnot vnáší do měření další chybu. Poloměr kužele je také ovlivněn tím, že se nám nikdy nepodaří sypat zrníčka stále na stejné místo. Proto chyby obou veličin σ_r a σ_h odhadneme na 3 mm. Pro měření hmotnosti máku a mouky k výpočtu hmotnostního zlomku bylo využito kuchyňských vah s chybou $\sigma_m = 1$ g. Hmotnostní koncentraci máku ve směsi s moukou jsme určili podle rovnice (1).

Nejistoty vypočtených veličin jsme určovali pomocí vzorce pro přenos nejistot v nepřímém měření. Nejistota σ_c určení hmotnostní koncentrace je dána jako

$$\sigma_c = \sqrt{\left(\frac{m_2}{(m_1 + m_2)^2} \sigma_{m_1}\right)^2 + \left(\frac{m_1}{(m_1 + m_2)^2} \sigma_{m_2}\right)^2}, \quad (3)$$

kde m_1 a m_2 jsou hmotnosti máku a mouky ve výsledné směsi a σ_{m_1} , σ_{m_2} jsou jejich chyby dané nepřesností vah. Jelikož jsme postupně do směsi přidávali jenom mák, hmotnost mouky byla pro všechna měření 100 g.

Z naměřených parametrů kužele jsme dopočítali synpý úhel θ podle rovnice (2) s chybou σ_θ , kterou jsme určili podle rovnice (3) upravené na tvar

$$\sigma_\theta = \sqrt{\left(\frac{r}{h^2 + r^2}\sigma_h\right)^2 + \left(\frac{-h}{h^2 + r^2}\sigma_r\right)^2}. \quad (4)$$

Naměřené hodnoty jsou uvedeny v tabulkách 1, 2 a 3.

Tabulka 1: Naměřené hodnoty h, r, θ pro mouku.

$\frac{h}{\text{mm}}$	$\frac{r}{\text{mm}}$	$\frac{\theta}{^\circ}$
20	18	48 ± 9
28	27	46 ± 6
33	35	43 ± 5
36	34	47 ± 5
49	42	49 ± 4
53	59	42 ± 3
61	70	41 ± 3
75	79	44 ± 3
86	87	45 ± 2
91	99	43 ± 2
104	110	43 ± 2
112	145	38 ± 2

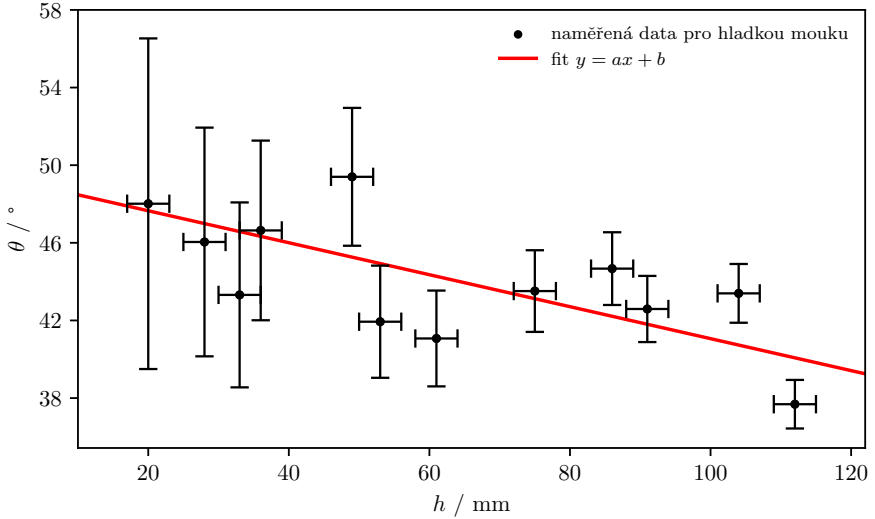
Tabulka 2: Naměřené hodnoty h, r, θ pro mák.

$\frac{h}{\text{mm}}$	$\frac{r}{\text{mm}}$	$\frac{\theta}{^\circ}$
26	46	30 ± 4
32	58	29 ± 3
36	60	31 ± 3
39	69	30 ± 3
41	71	30 ± 3
43	74	30 ± 2
45	73	32 ± 2
48	76	32 ± 2
50	79	32 ± 2
51	81	32 ± 2

Tabulka 3: Hmotnost máku m_1 a jeho hmotnostní koncentrace c ve směsi s moukou o hmotnosti 100 g; naměřené hodnoty h, r ; závislost synpého úhlu θ na koncentraci c .

$\frac{m_1}{\text{g}}$	$\frac{c}{\%}$	$\frac{h}{\text{mm}}$	$\frac{r}{\text{mm}}$	$\frac{\theta}{^\circ}$
21	$17,4 \pm 0,7$	44	43	46 ± 3
41	$29,1 \pm 0,6$	49	46	47 ± 3
62	$38,3 \pm 0,5$	46	52	41 ± 3
84	$45,7 \pm 0,4$	51	53	44 ± 3
104	$51,0 \pm 0,4$	46	52	41 ± 3
124	$55,4 \pm 0,4$	54	62	41 ± 2
145	$59,2 \pm 0,3$	38	52	36 ± 3
167	$62,6 \pm 0,3$	42	49	41 ± 3
187	$65,2 \pm 0,3$	51	55	43 ± 3
200	$66,7 \pm 0,3$	47	57	40 ± 3

Následně jsme tato data fitovali přímkou ve tvaru $y = ax + b$ v Python 3 pomocí funkce ODR z knihovny `scipy`. Při fitování byly zohledněny chyby závislé i nezávislé proměnné. Data společně s fitem jsou zobrazeny v grafech na obrázcích 3, 4 a 5. Parametry fitů jsou uvedené v popisích příslušných grafů.



Obrázek 3: Graf závislosti $\theta(h)$ sypaného úhlu na výšce kužele pro mouku. Parametry fitu jsou $a = (-0,08 \pm 0,03)^\circ \cdot \text{mm}^{-1}$ a $b = (49 \pm 3)^\circ$.

Pro sypané úhly máku a mouky jsme vypočetli výběrový průměr $\bar{\theta}$ podle vzorce

$$\bar{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \theta_i,$$

a výběrovou směrodatnou odchylku s jako

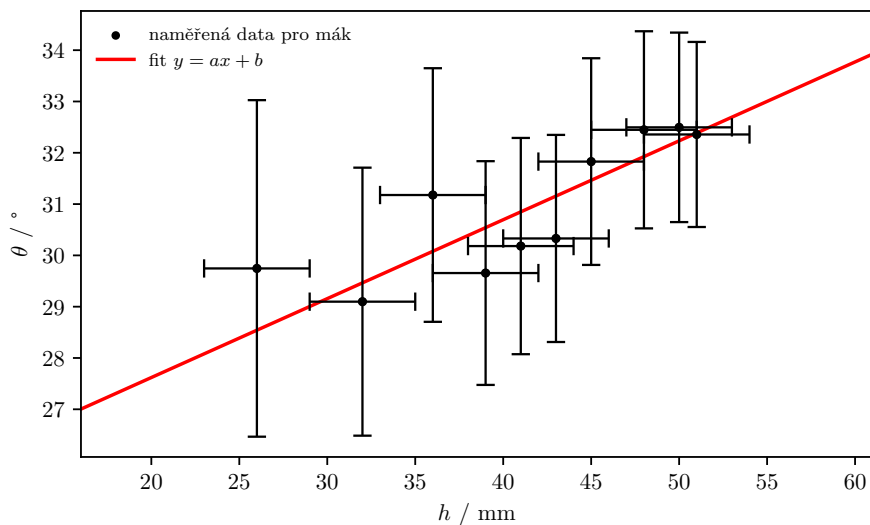
$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\theta_i - \bar{\theta})^2},$$

kde θ_i je i -té měření úhlu a n je počet měření. Nejistotu výběrového průměru $\sigma_{\bar{\theta}}$ jsme určili podle známého vzorce jako

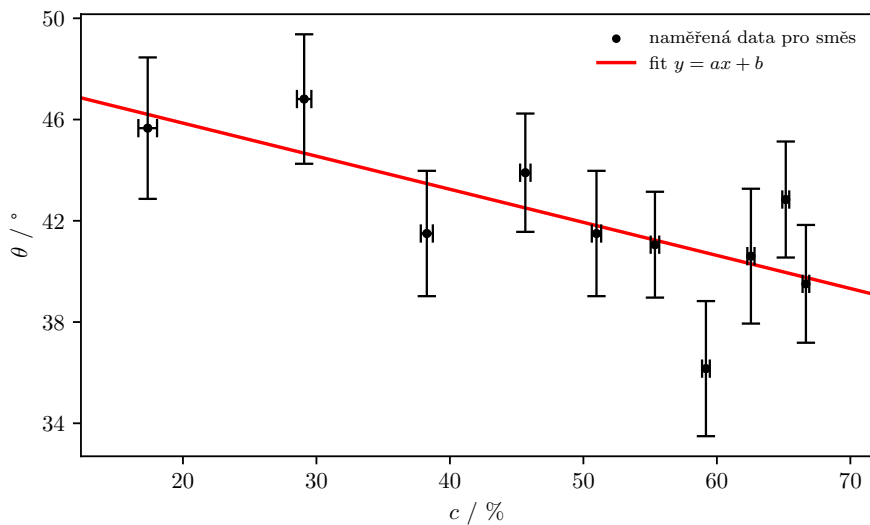
$$\sigma_{\bar{\theta}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Výslednou nejistotu sypaného úhlu jsme určili jako $\sqrt{\sigma_{\bar{\theta}}^2 + \sigma_s^2}$, kde σ_s je maximální chyba úhlu θ vypočtená ze vztahu (4) pro jednotlivá měření.

Naměřené hodnoty průměrných sypaných úhlů jsou $\theta_{\text{mouka}} = (44 \pm 9)^\circ$ pro mouku a $\theta_{\text{mák}} = (31 \pm 4)^\circ$ pro mák.



Obrázek 4: Graf závislosti $\theta(h)$ synpého úhlu na výšce kužele pro mák. Parametry fitu jsou $a = (0,15 \pm 0,03)^\circ \cdot \text{mm}^{-1}$ a $b = (25 \pm 2)^\circ$.



Obrázek 5: Graf závislosti $\theta(c)$ synpého úhlu na hmotnostní koncentraci máku. Parametry fitu jsou $a = (-13 \pm 5)^\circ$ a $b = (49 \pm 3)^\circ$.

Diskuse

Nejprve se zaměříme na měření sypných úhlů samostatné mouky a samostatného máku. K měření byla využita hladká mouka, pro kterou jsme dohledali hodnotu sypného úhlu $(49 \pm 2)^\circ$ ¹. Námí určený interval toto rozmezí zahrnuje jen díky malé přesnosti měření (relativní nejistota představuje až 20 %). Naměřená střední hodnota intervalu se od té tabulkové liší až o 10 %, rozdíl se pokusíme odůvodnit níže.

Pro mák je teoretická hodnota o něco nižší – kolem 26° ². V tomhle případě bylo měření přesnější, s nejistotou přibližně 13 %. Střední hodnota se od teoretické liší o 19 %.

Původců tak velkých odchylek může být několik. Nejpravděpodobnějším je zejména použití ne úplně vhodné aparatury, která byla zvolena především pro její dostupnost v domácích podmínkách. Hrdlo trychtýře bylo vůči podstavě vzniklého kužele poměrně široké, materiál tedy dopadal na relativně velkou plochu, nikoliv na „jedno místo“, jak předpokládá teorie. Přestože ústí trychtýře bylo jen těsně nad vrcholem kužele, materiál měl dostatečnou rychlost na to, aby se z pláště skutálel, a dokonce způsobil kolaps vrcholu kužele. U máku jednotlivá semínka často odskakovala do větších vzdáleností. Dalším možným zdrojem rozdílů byla práce s odlišnými druhy mouky a máku, než byly použity v dohledaných teoretických výsledcích.

Mezi sekundární zdroje chyb můžeme zařadit způsob odečítání rozměrů, ne zcela ideální kuželovitý tvar nasypaného útvaru a občasné mírné zatřesení trychtýřem při zaseknutí materiálu.

Nám ovšem šlo převážně o určení závislosti sypného úhlu na výšce. Z obou grafů je patrné, že přímky, kterými jsme data proložili, nejsou zcela horizontální. Hodnoty sklonu určené fitem jsou však relativně nízké, a navíc zatížené velkou relativní chybou. Pro přesnější měření by proto bylo potřeba proměřit úhel pro více výšek kužele pomocí přesnější aparatury. Případná odchylka od nezávislosti na výšce by mohla být způsobena jevy jako je koheze (soudržnost částic), která může být závislá na tlaku či způsobu dopadání a zastavení částic, jak bylo zmíněno výše.

Při měření závislosti sypného úhlu na koncentraci jsme pozorovali v úvodu zmíněný předpoklad, že s rostoucí koncentrací máku (který má nižší sypný úhel) by měl i sypný úhel směsi klesat. Pro ověření linearity závislosti by opět bylo nutné provést více měření přesnější aparaturou. Ovšem můžeme si povšimnout, že z parametrů určených fitem by z této závislosti vycházel sypný úhel přibližně 49° pro čistou mouku a 36° pro čistý mák, což jsou hodnoty systematicky vyšší, než jsme dříve určili. Kromě již řečených možných příčin jsme v tomhle případě pozorovali také částečnou separaci směsi – většina makových semínek na povrchu se skutálela až do dolní poloviny kužele, jak ukazuje obrázek 6.

Nakonec uvedme možnosti přesnějšího měření. V praxi se často pro určení tzv. statického sypného úhlu (toho, kterého jsme měřili my) využívá ještě postupného pomalého naklánění průhledné nádoby obsahující sypký materiál, dokud nedojde k jeho pohybu, načež můžeme odměřit sypný úhel. Hlavní výhoda tohoto postupu by spočívala v minimalizaci chyb vzniklých měřením vzdáleností (ke krabici můžeme přímo přiložit úhloměr). Druhou možností by například bylo nasypat materiál do nádoby s přesně změřeným kruhovým průřezem a pak ji pomalu zvedat, čímž by vznikl výsledný kužel. Výhodou by opět bylo přesnější změření jedné vzdálenosti, nevýhodou naopak vyšší náklady na techniku (hodně různých nádob).

¹https://www.researchgate.net/publication/339839974_Analysis_of_static_angle_of_repose_with_respect_to_powder_material_properties

²<https://scispace.com/pdf/physical-properties-of-seeds-of-the-selected-oil-plants-1xluude3a5.pdf>



Obrázek 6: Kužel vzniklý při měření pro směs.

Závěr

Experimentem jsme naměřili průměrné hodnoty sypaných úhlů pro mouku a mák jako

$$\theta_{\text{mouka}} = (44 \pm 9)^\circ, \quad \theta_{\text{mák}} = (31 \pm 4)^\circ$$

a prokázali závislost sypaného úhlu směsi na hmotnostní koncentraci obou látek. Také jsme pozorovali mírnou závislost sypaných úhlů na výšce, kterou by ovšem bylo nutné ověřit podrobnějším měřením.

Petr Sacher
petr.sacher@fykos.cz

Radovan Lev
radovan.lev@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.