Úloha IV.5 ... kuřák na zastávce

10 bodů; (chybí statistiky)

Jarda stojí na zastávce a čeká na tramvaj. Ta ale stále nepřijíždí, a proto se Jarda vydá rychlostí v k informační ceduli vzdálené d, aby se podíval na jízdní řád. Hned vedle cedule si ale někdo krátí čekání pokuřováním cigarety. Určete, kdy se Jarda dostane do takové vzdálenosti od kuřáka, že kouř ucítí. Koncentrace kouřových částic ve vzdálenosti $d_0 = 1\,\mathrm{m}$ od kuřáka je c_0. Jarda ho ucítí, jestliže u něj bude koncentrace kouřových částic c_0/N. Kuřáka považujte za sféricky symetrický zdroj smradu. Předpokládejte, že nefouká.

A nejhorší jsou takoví, kteří s tou cigaretou chodí po zastávce tam a zpět.

Nejprve si trochu vyjasněme fyzikální rámec celé úlohy. V zadání je uvedeno, že nefouká, i přesto se však částice kouře šíří do prostoru. Tomuto jevu se říká *difuze* – proces samovolného rozptylování do prostoru. Je to jako když do vody kápnete trochu barviva – po čase se zbarví celý objem vody, aniž byste ji museli promíchávat.

Pokud se částice mohou v prostoru pohybovat, šíří se z prostředí o vyšší koncentraci do nižší. Podstatou je jejich konání chaotického tepelného pohybu. Atomy konají neuspořádaný náhodný pohyb a vyměňují si pozice. Když je ale atomů nějakého druhu v bodě A více než v bodě B, z bodu A jich přejde do bodu B více než naopak, protože pravděpodobnost přechodu je stejná, ale v bodě A jich je na začátku více. Látky tedy difundují z prostředí o vyšší koncentraci do prostředí s nižší a samovolně se snaží svou koncentraci všude vyrovnat.

Uvažujme malou plošku a počítejme počet částic, které skrz ni projdou jedním směrem za jednotku času. Označme jej jako j_1. Opačným směrem přes tuto plochu projde počet j_2, který ale může být jiný. Jako *tok částic* označme veličinu $j = j_1 - j_2$, tedy rozdíl těchto počtů.

Situace je dle zadání stacionární, u kuřáka pořád vznikají nové a nové částice kouře. Ty od něj difundují, aby vyrovnaly svou koncentraci v celém prostoru. Oblast otevřené zastávky je však tak velký prostor, že můžeme uvažovat, že částice nakonec musí putovat až do nekonečna a nikde se nehromadí. Jejich koncentrace se tak v okolí kuřáka v čase nemění. Pokud ale kuřák vyrábí x částic za jednotku času, všechny tyto částice musí efektivně projít přes nějakou plochu okolo něj, jinak by se u něj někde hromadily. Protože situace je dle zadání sféricky symetrická, uvažujme jako tuto plochu kouli o poloměru r se středem v kuřákovi. Ze symetrie každým bodem na této kouli prochází stejný tok částic j, a aby se koncentrace neměnila, musí platit

$$x = 4\pi r^2 j \quad \Rightarrow \quad j = \frac{x}{4\pi r^2}\,,$$

kde $4\pi r^2$ je povrch naší myšlenkové koule. Tok částic tedy klesá se vzdáleností od kuřáka úměrně $1/r^2$.

Vraťme se na chvíli k předchozím úvahám. Uvedli jsme, že rychlost difuze závisí na koncentraci; z míst s větší koncentrací se částice přemisťují do míst s menší. Z našich jednoduchých základních úvah také vyplynulo, že tok j_1 je úměrný koncentraci na jedné straně c_1, podobně pak j_2 je úměrný koncentraci na druhé straně plošky c_2. Jejich rozdíl, tedy náš tok, je pak

$$j = j_1 - j_2 = Dc_1 - Dc_2 = D\left(c_1 - c_2\right)\,,$$

kde jsme úměrnost zaznačili pomocí konstanty D, která se nazývá *difuzní koeficient.* Vidíme, že tok je úměrný rozdílu koncentrací na jedné a na druhé straně plošky. Pokud se obecně koncentrace mění v prostoru bod od bodu, je možné zavést tok částic jako vektor a předchozí rovnici zapsat ve tvaru *1. Fickova zákona*

$$\mathbf{j} = -D\nabla c\,,$$

kde ∇ je symbol pro operátor *gradient*. Tento operátor nám říká, jak rychle se veličina za ním uvedená mění ve směru jejího největšího růstu – v podstatě se tedy jedná o derivace této veličiny podle všech souřadnic. Znaménko mínus zde vystihuje, že tok částic probíhá z míst s vyšší koncentrací do prostoru s nižší, jak jsme již uvedli výše.

Jestliže známe tok částic v závislosti na poloze, řešením této rovnice bychom se mohli dopracovat ke koncentračnímu profilu. Obecně je řešení takové rovnice matematicky náročné, my se k němu ale dopracujeme (možná trochu překvapivě) pomocí analogie s gravitačním polem.

Uvažujme sféricky symetrické gravitační pole, které je například kolem hvězd. Síle F je podle Newtonova zákona úměrné $1/r^2$, podobně jako náš tok částic. Zároveň je v tomto poli možné zavést potenciální energii V, která je úměrná $-1/r$. Obecně ale mezi silou a potenciální energií platí vztah, který jste si možná ve škole uváděli, a to

$$\mathbf{F} = -\nabla V \ .$$

Tato rovnice má až na konstantu stejný tvar jako první Fickův zákon! Bude mít proto stejné řešení. Tedy, jestliže je tok částic úměrný $1/r^2$ (jako síla), koncentrace bude úměrná $-1/r$ (jako potenciální energie)!

Pokud tedy $c \propto 1/r$, pak součin $c{\cdot}r = K$ je konstantní v celém prostoru. Zejména pak $c_0{\cdot}d_0 = K$, kde jsme použili hodnoty ze zadání. Jestliže je limitní koncentrace, kterou Jarda ucítí, $c_{\mathrm{lim}} = c_0/N$, pak toto nastane, pokud bude ve vzdálenosti

$$d_{\mathrm{lim}} = \frac{K}{c_{\mathrm{lim}}} = \frac{K\ N}{c_0} = \frac{c_0 d_0 N}{c_0} = N d_0 \,.$$

Protože se zadání ptá na čas, za který Jarda po rozejití se ucítí kuřáka, musíme určit rozdíl vzdáleností mezi Nd_0 a Jardovou počáteční polohou d a vydělit jej jeho rychlostí

$$t = \frac{d - N d_0}{v} \,.$$

Pokud by bylo $d < Nd_0$, cítil by Jarda kuřáka už na druhém konci zastávky, což se ale podle zadání nestalo.

Jako výsledek úlohy jsme dostali velmi jednoduchý vztah. To je samozřejmě důsledek mnoha zjednodušení, která jsme na naší cestě provedli. Zároveň zde ale vidíme matematickou eleganci fyziky. V řešení jsme využili analogii s gravitační silou, která je zdánlivě úplně nesouvisející. Je to možné kvůli tomu, že tyto jevy jsou popsány rovnicemi se stejným tvarem, jen vlastně jinými písmeny. Stejné rovnice ale musí mít stejné řešení. Mimochodem, rozmyslete si sami, jestli by stejná analogie nešla udělat pomocí zákonů elektrostatiky.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.