Úloha IV.4 ... čas na zkoušku

7 bodů; (chybí statistiky)

Jarda se na svou zkoušku z STR připravuje na své chatě na jednom z Jupiterových měsíců. Nějak si nehlídal čas a najednou zjistil, že mu zkouška začíná už za dvě hodiny (čas má synchronizovaný s pozemským). Nasedl proto do své extrémně rychlé rakety a vydal se na cestu k Zemi, která je momentálně vzdálená 8 AU *od jeho chaty. Po cestě se v raketě bude ještě učit. Jde mu to tam ovšem* 1,5*krát pomaleji než při čekání ve škole před zkouškou, protože se musí soustředit i na řízení. Jak rychle musí letět, aby se toho stihl co nejvíce naučit? Loď se celou cestu pohybuje konstantní rychlostí. Čas na zrychlení a zpomalení zanedbejte.* *Jarda bydlí až v Brně.*

Označme $T = 2\,\mathrm{hod}$ čas, který zbývá do zkoušky z pohledu pozorovatele na Zemi (který bude hodnotit Jardův výkon u zkoušky). Tento čas rozdělme na t_l, který stráví Jarda v raketě, a t_Z, kdy už bude na Zemi. V raketě Jardovi ubíhá čas pomaleji, takže se tam bude učit po dobu t_l/γ, kde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

je Lorentzův faktor určující dilataci času a v je rychlost, kterou raketa letí. Rychlost může nastavit podle sebe, ale tak, aby platilo $vt_\mathrm{l} = d$, kde $d = 8\,\mathrm{AU}$. Také musí být taková, aby stihl doletět k Zemi.

Označme w Jardovu rychlost učení na Zemi. Pak pro získání co nejvíce vědomostí potřebujeme maximalizovat výraz

$$wt_\mathrm{Z} + \frac{w}{n}t_\mathrm{l}\,,$$

kde $n = 1{,}5$ je faktor, o který se Jarda v raketě učí pomaleji. Jako proměnnou volíme t_l a po dosazení dostáváme funkci naučených vědomostí jako

$$w\left((T-t_\mathrm{l}) + \frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{d}{ct_\mathrm{l}}\right)^2}\,t_\mathrm{l}\right)\,.$$

Zavedením substituce $x = ct_\mathrm{l}/d$ dostaneme

$$\frac{wd}{c}\left(\frac{Tc}{d} - x + \frac{1}{n}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\,x\right)\,.$$

Derivace této funkce podle x je

$$\frac{wd}{c}\left(-1 + \frac{1}{n}\frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} + \frac{1}{n}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)\,,$$

odkud nulovou hodnotu derivace najdeme jako řešení rovnice

$$n\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = 1\,,$$

což je

$$x = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}}}\,.$$

Hledaná optimální rychlost rakety pak je

$$v = \frac{c}{x} = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}c = \frac{\sqrt{5}}{3}c \doteq 0{,}75c\,.$$

O tom, že se jedná o rychlost, při které se toho Jarda naučí nejvíce, se můžeme přesvědčit druhou derivací, nebo vykreslením derivované funkce v nějakém grafickém editoru.

Ještě musíme ověřit, jestli Jarda touto rychlostí vůbec stihne na Zemi doletět, protože ve vztahu se nevyskytuje ani čas T, ani vzdálenost d. Čas strávený na cestě touto rychlostí je ale

$$t_1 = \frac{d}{v} \doteq 90\,\mathrm{min}\,,$$

takže Jarda opravdu stihne doletět.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.