Úloha IV.3 ... kulička ve stínu

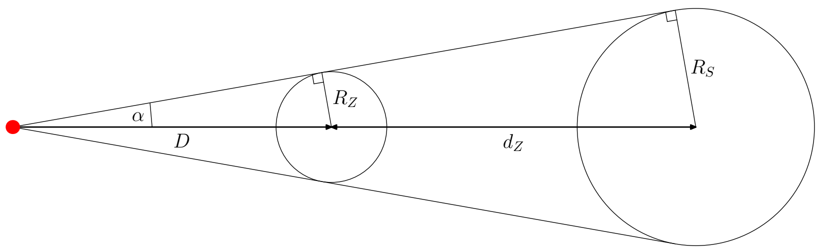
5 bodů; (chybí statistiky)

Malá kulička se nachází v co největší vzdálenosti od Země tak, aby ji ještě celou pokryl stín planety. Na jaké teplotě se kulička ustálí, pokud budeme Zemi považovat za dokonalé černé těleso o homogenní teplotě $T_\mathrm{Z} = 20\,{}^\circ\mathrm{C}$? Zdroje světla jiné než Slunce zanedbejte a předpokládejte, že se paprsky světla šíří po přímkách, lom světla v atmosféře nebo relativistické jevy tedy neuvažujte.

Původ úlohy byl taky zahalen stínem.

Země bude vytvářet stín ve tvaru kužele, jehož rozměry budou primárně záviset na poloměru Země a Slunce – označme si je postupně $R_\mathrm{Z} = 6{,}38 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$ a $R_\mathrm{S} = 6{,}96 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$ – a vzdálenosti Slunce od Země $d_\mathrm{Z} = 1\,\mathrm{AU} = 1{,}50 \cdot 10^8\,\mathrm{km}$. Úloha se pak ptá, jaká teplota bude ve vrcholu tohohle stínu. Proto nejprve začneme s odvozením vztahu pro jeho rozměry. Díky symetrii si můžeme dovolit řešit celou situaci v rovině.

Nejprve si vyjádříme délku stínu od Země, kterou označíme D. Nejvzdálenější bod stínu bude ze symetrie ležet na přímce mezi středem Země a Slunce. Zároveň musí tento bod ležet na společné tečně mezi Zemí a Sluncem. Pro jakýkoliv bližší bod by musel paprsek protnout Zemi, což fyzikálně není možné. Z intuitivní představy bude ale tato společná tečna téměř rovnoběžná se spojnicí středů planety a hvězdy. Situace je vyobrazena na obrázku 1.



Obrázek 1: Náčrt situace.

Pro představu, úhel mezi společnou tečnou a spojnicí středů je $\alpha \approx \sin\alpha = R_\mathrm{Z}/D \doteq 0{,}005$, což umožňuje použít tuto aproximaci. Samotné výpočty pro délku stínu D jsou tím pádem z podobnosti trojúhelníků

$$\sin\alpha = \frac{R_\mathrm{Z}}{D} = \frac{R_\mathrm{S}}{D + d_\mathrm{Z}}\,,$$

$$D = \frac{d_\mathrm{Z}}{\frac{R_\mathrm{S}}{R_\mathrm{Z}} - 1} = d_\mathrm{Z}\frac{R_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{S} - R_\mathrm{Z}}\,.$$

Po dosazení hodnot získáváme $D \doteq 1{,}4 \cdot 10^6\,\mathrm{km} \doteq 9{,}3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{AU}$.

Kulička bude přijímat teplo vyzařované Zemí (nikoliv Sluncem, protože je ve stínu!) a současně bude vyzařovat energii podle Stefanova-Boltzmannova zákona. V termodynamické rovnováze se tyto procesy vyrovnají. Energii přijatou za jednotku času díky záření Země můžeme spočítat následovně:

$$P_\mathrm{in} = A_\mathrm{k}\frac{L_\mathrm{Z}}{4\pi D^2} = A_\mathrm{k}\frac{\sigma S_\mathrm{Z} T_\mathrm{Z}^4}{4\pi D^2} = \sigma A_\mathrm{k} T_\mathrm{Z}^4 \left(\frac{R_\mathrm{Z}}{D}\right)^2\,,$$

kde $T_\mathrm{Z} = 20\,^\circ\mathrm{C}$ je teplota Země, S_Z a L_Z jsou postupně povrch a zářivý výkon Země, $\sigma = 5{,}670\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}{\cdot}K^{-4}}$ je Stefanova-Boltzmanova konstanta a A_k je plocha kuličky, která přijímá záření. V našem případě jsme zvolili klasickou aproximaci $A_\mathrm{k} \approx \pi r_\mathrm{k}^2$ s r_k jako poloměrem kuličky. Můžeme si to ospravedlnit tím, že kulička je velmi malá a paprsky dopadají více méně rovnoběžně, proto kulička přijme tolik záření, jako by to byl disk s poloměrem r_k. Kulička naopak vyzáří výkon

$$P_\mathrm{out} = \sigma S_\mathrm{k} T_\mathrm{k}^4 = 4\pi\sigma r_\mathrm{k}^2 T_\mathrm{k}^4 \,.$$

Když je porovnáme, můžeme si vyjádřit naši rovnovážnou teplotu T_k

$$\begin{aligned}
P_\mathrm{out} &= P_\mathrm{in} \,, \\
4\pi\sigma r_\mathrm{k}^2 T_\mathrm{k}^4 &= \pi\sigma r_\mathrm{k}^2 T_\mathrm{Z}^4 \left(\frac{R_\mathrm{Z}}{D}\right)^2 \,, \\
T_\mathrm{k} &= T_\mathrm{Z}\sqrt{\frac{R_\mathrm{Z}}{2D}} = T_\mathrm{Z}\sqrt{\frac{R_\mathrm{S} - R_\mathrm{Z}}{2d_\mathrm{Z}}} \,.
\end{aligned}$$

Numericky dostáváme teplotu $T_\mathrm{k} \doteq 14\,\mathrm{K}$.

Jonáš Dej
jonas.dej@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.