

Úloha IV.2 ... nudná Země

3 body; (chybí statistiky)

Dávno zapomenutí bohové se při koukání na Zemi náramně nudili, a tak se rozhodli, že změní její tvar z koule na válec, jehož osa otáčení prochází středem jeho podstavy a je na ni kolmá. Jaký bude poměr délky dne na nové Zemi ku původní délce dne? Považte, že to jsou sice bohové, ale rozhodně ne nějakí kouzelníci, a tak hmotnost, hustota i moment hybnosti válce zůstanou stejné jako hmotnost, hustota a moment hybnosti původní Země. Výška válce je rovna průměru původní Země.

Lukáš se inspiroval Saudskou Arábií.

Začneme tak, že si zavedeme značení – poloměr Země označme R , poloměr válce r a jeho výšku označme h . Nechť má Země v kulatém stádiu velikost momentu hybnosti L_1 , úhlovou rychlost ω_1 a periodu T_1 . Ve válcovém stádiu budeme uvažovat, že má Země velikost momentu hybnosti L_2 , velikost úhlové rychlosti ω_2 a periodu T_2 . Moment setrvačnosti koule označíme J_1 a platí pro něj $J_1 = 2mR^2/5$. Moment setrvačnosti válce pojmenujme J_2 a platí pro něj $J_2 = mr^2/2$. Využijme faktu, že se moment hybnosti zachová a dostaneme

$$\begin{aligned} L_1 = L_2, & \Rightarrow J_1\omega_1 = J_2\omega_2, \\ \frac{2}{5}mR^2\omega_1 &= \frac{1}{2}mr^2\omega_2, \\ \frac{2}{5}R^2\frac{2\pi}{T_1} &= \frac{1}{2}r^2\frac{2\pi}{T_2}, \\ \frac{T_2}{T_1} &= \frac{5}{4}\frac{r^2}{R^2}. \end{aligned}$$

Zachová se i hustota, dostaneme tedy

$$\begin{aligned} \rho_1 = \rho_2 & \Rightarrow \frac{m}{V_1} = \frac{m}{V_2} \Rightarrow V_1 = V_2, \\ \frac{4}{3}\pi R^3 &= \pi r^2 h, \\ \frac{r^2}{R^2} &= \frac{4}{3}\frac{R}{h}. \end{aligned}$$

Dosadíme do vztahu plynoucího ze zachování momentu hybnosti a dostaneme

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} \frac{R}{h} = \frac{5}{3} \frac{R}{h}.$$

Nakonec dosadíme za h a dostaneme výsledný poměr period

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{5}{6}.$$

Jaromír Potůček

jaromir.potucek@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.