

Úloha III.P ... chleba

9 bodů; průměr 4,86; řešilo 49 studentů

Chleba dokážeme poměrně dobře zmáčknout, je v něm totiž mnoho prostoru naplněného plynem. Určete vnitřní povrch všech dutin pro chléb Šumava.

Jarda studuje na Katedře povrchů (a plazmatu).

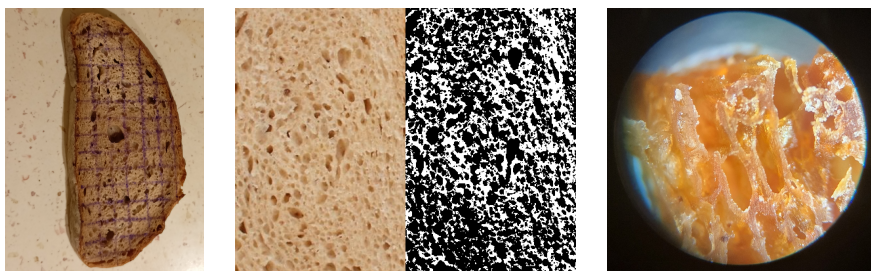
S ohledem na různorodost přístupů, které řešitelé zaujali při odhadování vnitřního povrchu chleba, je takřka nemožné všechny správné myšlenky shrnout jedním vybraným řešením. V tomto textu proto kromě vybraného řešení naleznete též shrnutí hlavních přístupů a komentářů k došlým řešením.

Přístupy k řešení úlohy

Na začátek zmiňme, že níže uvedené přístupy nepostihují zdaleka všechna došlá řešení a že většina kvalitních řešení naopak obsahovala jejich kombinaci. Účelem této sekce je proto spíše bodové shrnutí myšlenek, které si zaslouží větší komentář.

Odhady objemu pórů Hlavní myšlenkou za většinou došlých řešení bylo určení vnitřního povrchu z vnitřního objemu. V došlých pracích se objevily např. následující myšlenky.

1. **Měření objemu chleba před a po stlačení.** Vyjdeme-li z předpokladu, že se nám stlačením (celého nebo části) chleba podaří zbavit veškerého vzduchu v pórech, lze tímto způsobem odhadnout objem dutin. Pro měření objemu před stlačením a po něm byla navrhována např. aproximace chlebu elipsoidem či ponoření chlebu do kapaliny – v takovém případě je ale třeba u měření uvažovat pronikání kapaliny do chleba a některé chemické či jiné jevy.
2. **Analýza 2D řezů.** Řešitelé pořizovali fotografie krajíce (mobil, skener) a počítali póry ručně na zvolené mřížce či poloautomaticky v programu. Výsledné plošné podíly pórů pak převáděli na prostorové hodnoty úvahou. Některé z fotek zahrnutých v účastnických řešeních naleznete na obrázku 1.



Obrázek 1: Zleva: rozdělení krajíce chleba na sektory pro ruční určení počtu dutin (Alena Marešová), fotografie krajíce chleba pro počítačovou analýzu (Marco Komarnik), fotografie řezu chlebem pod mikroskopem (Tamara Dědková)

3. **Odhady z literatury.** Spousta řešitelů také uvedla odhady založené na studiích či článcích týkajících se této problematiky. Zde zmiňme především studii *The bubble size distribution in wheat flour dough* [1], která se přímo zabývá poměrným zastoupením různých velikostí bublinek a poskytuje i matematické modely.

Klíčovým zdrojem nejistoty je (kromě správného určení objemu) volba *typické bubliny* použité pro přepočítání objemu na povrch. Někteří řešitelé volili pro zjednodušení průměrný poloměr získaný např. měřením pórů či spočítaný na základě údajů v literatuře. Tento předpoklad nicméně zanedbává fakt, že menší bublinky k objemu přispívají řádově méně než k povrchu – z tohoto důvodu je volba jednoho poloměru přinejmenším problematická a řešitelé, kteří pro své výpočty zvažili např. více poloměrů, získali odhady, které byly v tomto aspektu věrohodnější.

Také zmíníme, že část řešitelů správně diskutovala o aspektech jako tvar dutin („*Je správné uvažovat kouli?*“), distribuce dutin (viz paragraf výše, „*Kolik a jak velkých dutin vlastně chleba obsahuje?*“), definice dutin (vnitřek chleba má ve své podstatě fraktální povahu, je tedy nasnadě se ptát: „*Co je to vůbec dutina? Jak velké dutiny uvažujeme?*“) apod.

Instrumentální metody V rámci rešerše a rozboru situace část řešitelů uváděla strojové metody, které by se daly pro určení povrchu použít.

- **Rentgenová mikrotomografie (μCT)** – nedestruktivní metoda s vysokým rozlišením, která byla použita např. ve dříve zmíněném článku [1].
- **Magnetická rezonance (MRI)** – šetrná metoda bez ionizujícího záření; rozlišení je však hrubší a vyžaduje delší měřicí čas [2].
- **Rtuťová porozimetrie** – metoda určování velikostí pórů založená na vsakování rtuti (nebo jiné nesmáčivé kapaliny) pod vysokým tlakem, kterým je vyrovnáván tlak kapilární. Pro další informace o této metodě doplňme studie [3] a [4], které se užitím porozimetrie (přímo v kontextu měření pórovitosti pečiva!) zabývají a které poukazují na fakt, že tato metoda nezvládne změřit dutiny výrazně větší než desetiny milimetru v průměru.
- **Optické profilometry nebo laserové 3D skenery** – další instrumentální metody, které je možné použít např. na precizní měření vnitřní struktury řezů chleba.

Teoretické modely Pár řešitelů se k problému pokusilo přistoupit též čistě matematicky. Zaměřili se například na odhadování konkrétního matematického rozdělení bublin v chlebu nebo na úvahy o fraktální dimenzi chlebu. Ač zde není prostor pro konkrétní nástin řešení opírajících se o komplikovanější matematický model, pro zájemce zmiňme problémovou úlohu ve 4. sérii 30. ročníku FYKOSu [5], která se zabývá podobnou problematikou a která tedy může sloužit jako inspirace pro tato řešení.

Příklad řešení

Níže na ukázkou uvádíme řešení úlohy od Michala Stroffa, které, i přes zdánlivé slabiny (např. chybějící rešerše nebo poněkud arbitrární odhady parametrů¹), dobře kombinuje intuitivní a precizní fyzikální přístup k situaci a získává kvalitní řádový odhad.

Pro začátek problému můžeme udělat pár předpokladů. Jeden z nich bude takový, že vnitřní dutiny chlebu mají kulovitý tvar, což je v rámci řádového odhadu poměrně validní předpoklad. Dejme tomu, že v jednom chlebu budeme mít n těchto bublinek a jejich jakýsi střední kvadratický poloměr bude r . Celkový povrch vnitřních dutin pak bude

$$S = 4\pi nr^2.$$

Jejich celkový objem bude limitován celkovým objemem chlebu

$$V_{\text{chléb}} = \frac{4}{3}\pi nr^3.$$

Ve skutečnosti se mezi kulovitými mezírkami ještě musí prostor využít těstem, ovšem tahle část je vzhledem k našim hrubým aproximacím rovněž zanedbatelná. Dále uvažujme, že všechny dutiny jsou skoro stejně velké. Je-li droždí do těsta přidáno rovnoměrně, není důvod, aby se během kynutí těsta někde vytvářely větší bubliny než jinde.

Modelujeme-li těsto kolem bublin jako tekutinu s povrchovým napětím σ , budou menší bubliny při kolizi s většími zanikat díky tomu, že mají vyšší vnitřní tlak p . Připomeňme, že

$$p = \frac{2\sigma}{r},$$

kde jasně vidíme, že malé bublinky jsou při spojení s většími bublinami v přetlaku a vypustí se do nich. Dále ukažme, že ke vzájemné kolizi bude docházet primárně u bublin se silně rozdílnými poloměry. Modelujeme-li proudění těsta kolem bubliny jako laminární (nízká rychlost, vysoká viskozita, nízké Reynoldsovo číslo), stoupá bublina rychlostí

$$v \propto r^2,$$

což získáme ze Stokesova vztahu $F = 6\pi\eta rv$. Čili velké bubliny stoupají výrazně rychleji, než ty menší. To znamená, že podobně velké bubliny do sebe nebudou tolik narážet, ale samy budou poměrně efektivně (díky svým velkým rozměrům) odchytávat bublinky menší. Jejich rychlost není dostatečně vysoká na to, aby bubliny unikly z povrchu těsta do okolního prostředí. Posunou se, hádám, o pár milimetrů, což ale bohatě stačí na vychytání malých bublin. Proč je důležité, že malé bublinky vymizí? No jednoduše proto, že, jak brzy uvidíme, největší příspěvek do povrchu S mají při normovaném objemu právě ty nejmenší bublinky (čehož se v přírodě využívá např. při trávení tuků). Nemůžeme je tedy zanedbat s argumentem makroskopické nerozlišitelnosti, protože mají větší vliv na výsledný povrch než bubliny viditelné. Naštěstí by ale měly zanikat, tudíž se s nimi nemusíme trápit. Navíc má pak předpoklad

$$\sqrt[3]{\langle r^3 \rangle} = \sqrt{\langle r^2 \rangle} \equiv r$$

¹ Což vzhledem k celkové snaze o získání řádového odhadu výrazně nevadí.

mnohem větší váhu. Oba poloměry vystupující ve vzorcích pro $V_{\text{chléb}}$ a S považujeme tedy za stejné. Oba tyto vzorce lze sloučit do jednoho:

$$S \sim \frac{3V_{\text{chléb}}}{r}.$$

Vidíme tedy, že pro malé bublinky se vnitřní povrch dutin zvyšuje (jak jsme avizovali výše). Řádově tedy můžeme odhadnout povrch vnitřních dutin chleba jako

$$S \sim \frac{L_{\text{chléb}}^3}{r},$$

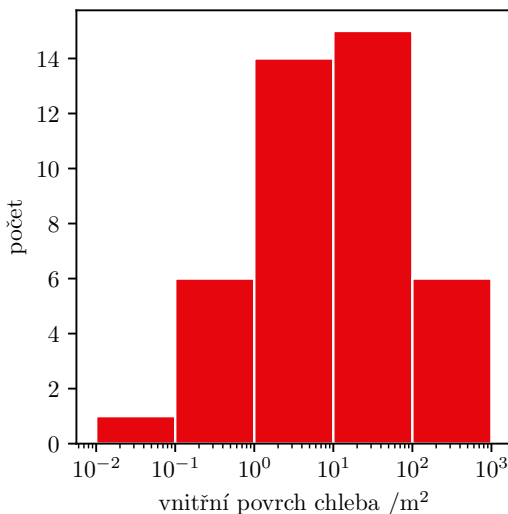
kde $L_{\text{chléb}}$ značí charakteristický rozměr chleba Šumava, např. jeho šířku $L_{\text{chléb}} = 20$ cm. Poloměr bublin $r = 2$ mm můžeme určit tak, že si jednoduše prohlédneme vnitřní strukturu chleba. Pak dostáváme

$$S \sim \frac{0,2^3}{0,002} \text{ m}^2 = 4 \text{ m}^2.$$

Řádově je tedy povrch vnitřních dutin chleba v jednotkách metru čtverečního.

Výsledky

Na závěr, pro zajímavost, uvádíme v histogramu na obrázku 2 souhrn výsledků, ke kterým řešitelé došli. Je zajímavé, že se většina řešitelů, i přes různorodost použitých přístupů (a různou míru chyb ☺), shodla alespoň řádově, takže si čtenář na základě těchto dat může vytvořit o vnitřním povrchu chleba vlastní představu.



Obrázek 2: Souhrn výsledků.

Reference

- [1] P. S. Kadan, E. A. Robinson, and J. B. Thibodeau, "Characterization of texture of bread using compression testing and stress-relaxation," *Food Research International*, vol. 39, no. 3, pp. 265–272, 2006. <https://doi.org/10.1016/j.foodres.2006.07.020>
- [2] S. F. Bader, S. E. Taylor, and J. H. Hotchkiss, "Proton nuclear magnetic resonance imaging of bread dough during proofing and baking," *Cereal Chemistry*, vol. 80, no. 4, pp. 390–395, 2003. <https://doi.org/10.1094/CCHEM.2003.80.4.390>
- [3] M. E. Flores-López and R. G. Labavitch, "Application of mercury porosimetry to the study of bread crumb structure," *Food Microstructure*, vol. 11, no. 2, article 4, 1992. <https://digitalcommons.usu.edu/foodmicrostructure/vol11/iss2/4>
- [4] A. N. Tihonov and V. V. Varlamov, "Application of porosimetry and fractal analysis in food structure investigation," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 35, no. 9, pp. 4352–4361, 2011. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.03.047>
- [5] FYKOS, "Řešení úlohy 4-6 – FYKOS 30. ročník," 2016. [Online]. Available: <https://static.fykos.cz/problems/fykos/30/media/solution4-6.cs.pdf>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.